LE LOGARITHME
NÉ PAIE RIEN

Hervé Stève,
herve.steve@hotmail.fr

Kafemath du 12 avril 2018

À la Coulée Douce, Paris 12ème

Introduction

- Bio succincte de John Napier (ou Neper)
-
- Construction d'une table de logarithme décimale
-
- Lecture d'une table log
-
- Fonctions logarithmes

John Napier (1550-1617)

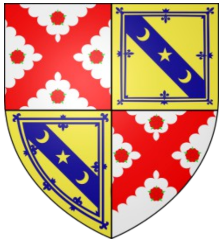
- Ou Neper, Naper, Napeir, Neperus en latin, … etc

- Ecossais protestant, 8ème baron de Merchiston (près d'Édimbourg),
- Descendants de John : les Lord Napier of Merchiston

- Mathématiques :
- Notation anglaise décimale du point : 3.1415926…
- Logarithme d'un sinus puis logarithme « Napier »
  « *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* » (1614)
  « Mirifici logarithmorum canonis constructio » (1619)
- Bâtons de Neper : simplification des calculs (produits, divisons et racines carrées)
  « Rhabdologiae » (1617)

- Théologie : prédicateur (fin du monde) écrit en 1593
  « Plaine Discovery of the Whole Revelation of St John »

- Napier est l'inventeur du logarithme et du mot lui-même
  logarithme = *logos* (raison, relation) + *arithmos* (nombre)



Les 15 Lord Napier

Archibald Napier	1575-1645, 1er lord Napier de Merchiston 1627
Archibald Napier	1625-1658, 2nd lord Napier
Archibald Napier	-1683, 3ème lord Napier
Thomas Nicolson	1669-1688, 4ème lord Napier
Margaret Brisbane	-1706, 5ème lady Napier
Francis Scott Napier	1705-1773, 6ème lord Napier
William Napier	1730-1775, 7ème lord Napier
Francis Napier	1758-1823, 8ème lord Napier
William John Napier*	1786-1834, 9ème lord Napier
Francis Napier	1819-1898, 10ème lord Napier
William John George Napier	1846-1913, 11ème lord Napier
Francis Edward Basil	1876-1841, 12ème lord Napier
William Francis Cyril James Hamilton Napier	1900-1954, 13ème lord Napier
Francis Nigel Napier	1930-2012, 14ème lord Napier
Francis David Charles Napier	1962, 15ème lord Napier

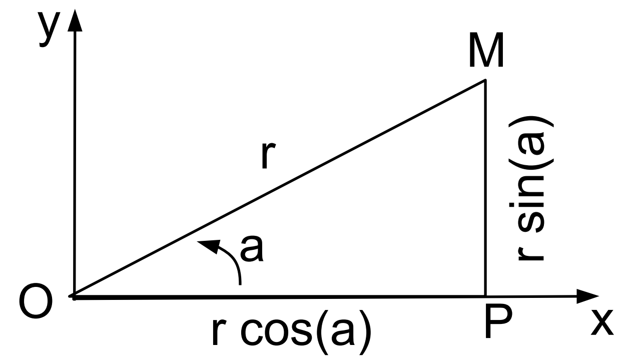
(*) Capitaine bataille de Trafalgar

Nicholas Henry Napier Rose 1957 est arrière-arrière-arrière petit-fils du 9ème lord Napier

Les Froggy Stew

Avec Nick Rose, à la Coulée Douce le 6 juillet 2008

Origine des logarithmes



- Astronomie et trigonométrie
- Tables de sinus et cosinus : Werner (1468-1528)
  cos(a) x cos(b) =1/2 [cos(a-b) + cos(a+b)]
  Les produits deviennent des sommes
- Tables de suites géométriques :

Indices n	1	2	3	4	…	7 = 3 + 4	…
Puissances n de 2	**2**	**4**	**8**	**16**	**…**	**128 = 8 x 16**	**…**

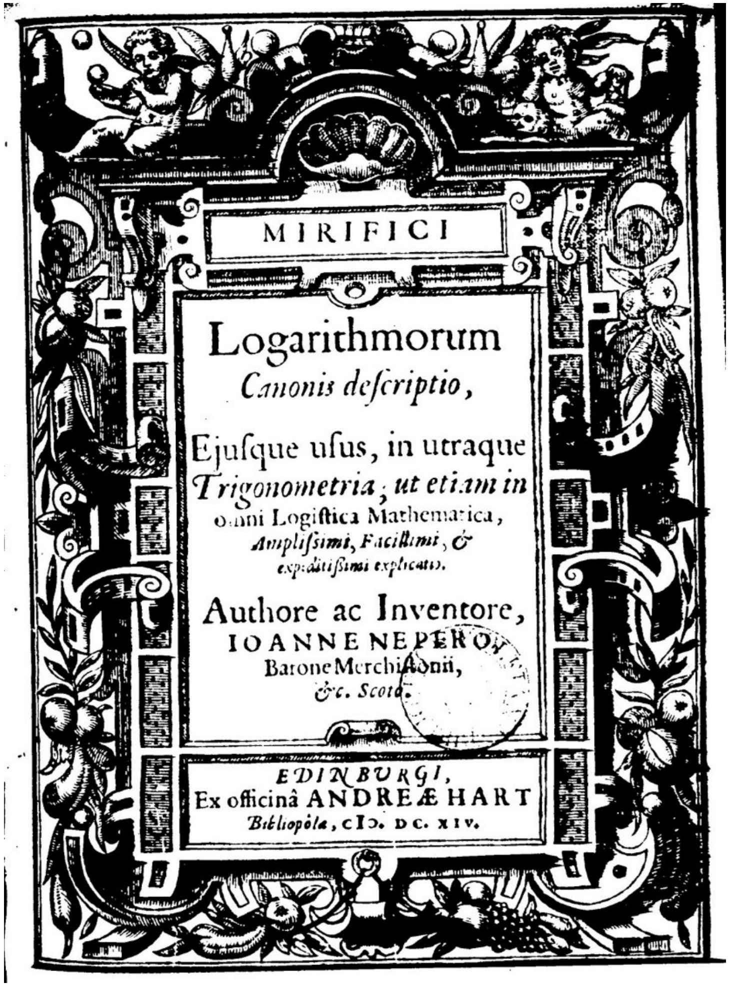
$2^{3+4} = 2^3 \times 2^4$: sommes d'indices ⇔ produits de puissances

- John Napier (1614) : tables de correspondances de sinus et tangentes d'angles, i.e. **logarithmes** (relation entre les nombres), entre des produits d'une colonnes et des sommes d'une autre colonne.
  Notation NapierLog (1616) puis construction des tables de logarithmes (1619)

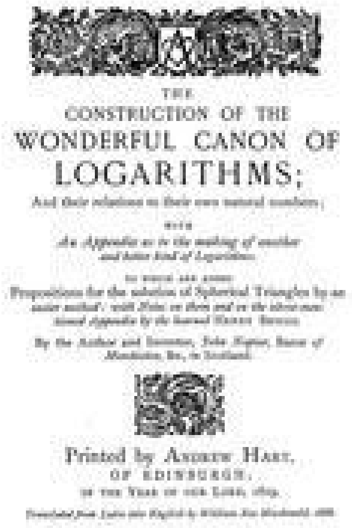
  Nlog (a x b) = Nlog (a) + Nlog (b)

- Henry Briggs (1624) : tables des logarithmes décimaux $\log_{10}$
  $\log_{10}(1) = 0$ et $\log_{10}(10) = 1$

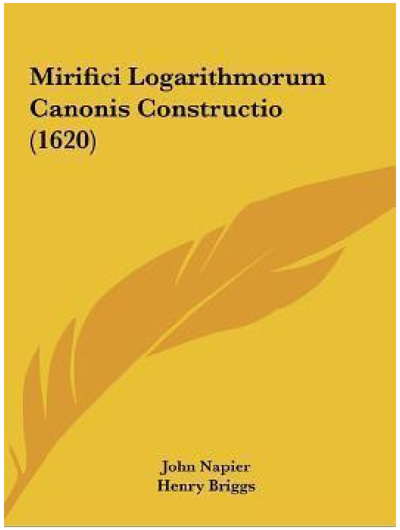
Bibliographie


MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis descriptio,
Ejusque usus, in utraque Trigonometria; ut etiam in omni Logistica Mathematica, Amplissimi, Facillimi, & expeditissimi explicatio.
Authore ac Inventore, IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, &c. Scoto.
EDINBURGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART
Bibliopôlæ, CIↃ. DC. XIV.

1614


THE
CONSTRUCTION OF THE
WONDERFUL CANON OF
LOGARITHMS;
Printed by ANDREW HART,
OF EDINBURGH.


HENRICI
BRIGGII
CANON
LOGARITHMORUM
PRO NUMERIS
SERIE NATURALI
CRESCENTIBUS
AB I. AD 20000.
VIENNÆ AUSTRIÆ.


Mirifici Logarithmorum
Canonis Constructio
(1620)
John Napier
Henry Briggs

N°177

Construction : 1ère étape

On va établir une table de logarithme

-
- Idée de John Napier : « **continuité** » de la correspondance entre nombres x de 0 à 1 (logarithmes de sinus) et les puissances d'un nombre $r=1-10^{-7}=0{,}9999999$, soit 10 000 000 logarithmes calculés en 20 ans !
-
- H. Briggs : cherche un nombre x tq $r^{x}=b$ avec $r=1+10^{-7}$ et b =10 base décimale
-
- Exemple avec puissances successives de $r=1+10^{-2}=1{,}01$ jusqu'à la base 10

  on ne conserve que 4 décimales, calculs fait « à la main » :

  $$a \times 1{,}01=a \times (1+0{,}01)=a + a \times 0{,}01=a + a/100$$

- 2nde puissance : 1,01 + 1,01/100 = 1,01 + 0,0101 = 1,0201
- 3ème puissance : 1,0201 + 1,0201/100 = 1,0201 + 0,0102 = 1,0303
- 4ème puissance : 1,0406 … jusqu'à la 232ème !

n	1	2	3	4	…	11	…	231	x?	232
$(1{,}01)^n$	1,01	1,0201	1,0303	1,0406	…	1,1155	…	9,9595	10	10,0591

Interpolation linéaire

- Quel est la puissance x tq : $1{,}01^{x} = 10$?

- Méthode de **l'interpolation linéaire** : petits accroissements

on cherche x tq f(x)=y
soit f(a)=c et f(b)=d, on a

$$(x-a) / (b-a) = (f(x)-f(a)) / (f(b)-f(a))$$

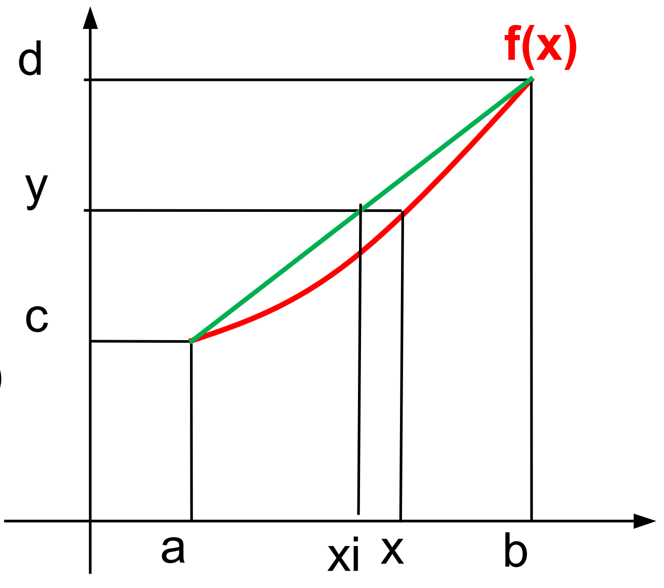
soit xi l'interpolant linéaire qui approche x :

$$xi = a + (b-a)\,(y-c) / (d-c)$$

pour a=231, b=232, c=9,9595, d=10,0591et y=10

alors xi=231 +(232-231)(10-9,959)/(10,0591-9,9595)

d'où xi=231+0,041/0,0996=
231+0,041x10=231,41



Construction : 2nde étape

on a $10=1{,}01^{231{,}41}$, on pose $\log(10)=\log(1{,}01^{231{,}41})=231{,}41*\log(1{,}01)=1$
d'où $\log(1{,}01)=1/231{,}41=0{,}0043$

- $\log(1{,}0201)=\log(1{,}01^2)=2*\log(1{,}01)=0{,}0086$… etc $\mathbf{\log(1{,}01^n)=n/231{,}41}$

n	0	1	2	3	4	…	69	70	…	231	231,41
$x=(1{,}01)^n$	1	1,01	1,0201	1,0303	1,0406	…	1,9867	2,0066	…	9,9595	10
log(x)	0	0,0043	0,0086	0,0129	0,0172	…	0,2982	0,3025	…	0,0998	1

- log entiers par interpolation linéaire : $m = (1{,}01)^a \Rightarrow \log(m)=a/231{,}41$
  - $\log(1)$? $\log(1)=\log(1^2)=2\log(1)$ d'où $\log(1)=0$!
  - $\log(2)$ est entre la 69ème et 70ème puissance de 1,01 :
    on trouve que $\mathbf{2=1{,}01^{69{,}66*}}$ d'où $\log(2)=69{,}66\log(1{,}01)=69{,}66/231{,}41=0{,}30104$
  - Idem pour $\log(3)=110{,}41/231{,}41=0{,}47712$;
  - $\log(4)=2\log(2)=0{,}60208$;
  - $\log(5)=\log(10/2)=\log(10\text{x}1/2)=\log(10)+\log(1/2)=1-\log(2)=1-0{,}30104=0{,}69897$
  - $\log(6)=\log(2\text{x}3)=\log(2)+\log(3)=0{,}77816$
  - $\log(7)=195{,}56/231{,}41=0{,}84508$
  - $\log(8)=3\log(2)=0{,}90312$
  - $\log(9)=2\log(3)=0{,}95424$

(*) par interpolation linéaire
$69+(70-69)(2-1{,}9867)/(2{,}0066-1{,}9867)\sim 69{,}66$

Table de logarithmes

- Tables des 10 premiers log

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
log(x) T	0	0,30104	0,47712	0,60208	0,69897	0,77816	0,84508	0,90312	0,95424	1
log(x) *	0	0,30103	0,47712	0,60206	0,69897	0,77815	0,84510	0,90309	0,95424	1

(*) évaluation

- Tables étendues :

Table des logarithmes décimaux entre 0,01 et 1

N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)
0,01	−2	0,21	−0,677 78	0,41	−0,387 22	0,61	−0,214 67	0,81	−0,091 51
0,02	−1,698 97	0,22	−0,657 58	0,42	−0,376 75	0,62	−0,207 61	0,82	−0,086 19
0,03	−1,522 88	0,23	−0,638 27	0,43	−0,366 53	0,63	−0,200 66	0,83	−0,080 92
0,04	−1,397 94	0,24	−0,619 79	0,44	−0,356 55	0,64	−0,193 82	0,84	−0,075 72
0,05	−1,301 03	0,25	−0,602 06	0,45	−0,346 79	0,65	−0,187 09	0,85	−0,070 58
0,06	−1,221 85	0,26	−0,585 03	0,46	−0,337 24	0,66	−0,180 46	0,86	−0,065 5
0,07	−1,154 9	0,27	−0,568 64	0,47	−0,327 9	0,67	−0,173 93	0,87	−0,060 48
0,08	−1,096 91	0,28	−0,552 84	0,48	−0,318 76	0,68	−0,167 49	0,88	−0,055 52
0,09	−1,045 76	0,29	−0,537 6	0,49	−0,309 8	0,69	−0,161 15	0,89	−0,050 61
0,1	−1	0,3	−0,522 88	0,5	−0,301 03	0,7	−0,154 9	0,9	−0,045 76
0,11	−0,958 61	0,31	−0,508 64	0,51	−0,292 43	0,71	−0,148 74	0,91	−0,040 96
0,12	−0,920 82	0,32	−0,494 85	0,52	−0,284	0,72	−0,142 67	0,92	−0,036 21
0,13	−0,886 06	0,33	−0,481 49	0,53	−0,275 72	0,73	−0,136 68	0,93	−0,031 52
0,14	−0,853 87	0,34	−0,468 52	0,54	−0,267 61	0,74	−0,130 77	0,94	−0,026 87
0,15	−0,823 91	0,35	−0,455 93	0,55	−0,259 64	0,75	−0,124 94	0,95	−0,022 28
0,16	−0,795 88	0,36	−0,443 7	0,56	−0,251 81	0,76	−0,119 19	0,96	−0,017 73
0,17	−0,769 55	0,37	−0,431 8	0,57	−0,244 13	0,77	−0,113 51	0,97	−0,013 23
0,18	−0,744 73	0,38	−0,420 22	0,58	−0,236 57	0,78	−0,107 91	0,98	−0,008 77
0,19	−0,721 25	0,39	−0,408 94	0,59	−0,229 15	0,79	−0,102 37	0,99	−0,004 36
0,2	−0,698 97	0,4	−0,397 94	0,6	−0,221 85	0,8	−0,096 91	1	0

Table des logarithmes décimaux entre 1 et 100

N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)
1	0	21	1,322 22	41	1,612 78	61	1,785 33	81	1,908 49
2	0,301 03	22	1,342 42	42	1,623 25	62	1,792 39	82	1,913 81
3	0,477 12	23	1,361 73	43	1,633 47	63	1,799 34	83	1,919 08
4	0,602 06	24	1,380 21	44	1,643 45	64	1,806 18	84	1,924 28
5	0,698 97	25	1,397 94	45	1,653 21	65	1,812 91	85	1,929 42
6	0,778 15	26	1,414 97	46	1,662 76	66	1,819 54	86	1,934 5
7	0,845 1	27	1,431 36	47	1,672 1	67	1,826 07	87	1,939 52
8	0,903 09	28	1,447 16	48	1,681 24	68	1,832 51	88	1,944 48
9	0,954 24	29	1,462 4	49	1,690 2	69	1,838 85	89	1,949 39
10	1	30	1,477 12	50	1,698 97	70	1,845 1	90	1,954 24
11	1,041 39	31	1,491 36	51	1,707 57	71	1,851 26	91	1,959 04
12	1,079 18	32	1,505 15	52	1,716	72	1,857 33	92	1,963 79
13	1,113 94	33	1,518 51	53	1,724 28	73	1,863 32	93	1,968 48
14	1,146 13	34	1,531 48	54	1,732 39	74	1,869 23	94	1,973 13
15	1,176 09	35	1,544 07	55	1,740 36	75	1,875 06	95	1,977 72
16	1,204 12	36	1,556 3	56	1,748 19	76	1,880 81	96	1,982 27
17	1,230 45	37	1,568 2	57	1,755 87	77	1,886 49	97	1,986 77
18	1,255 27	38	1,579 78	58	1,763 43	78	1,892 09	98	1,991 23
19	1,278 75	39	1,591 06	59	1,770 85	79	1,897 63	99	1,995 64
20	1,301 03	40	1,602 06	60	1,778 15	80	1,903 09	100	2

Lecture d’un table log

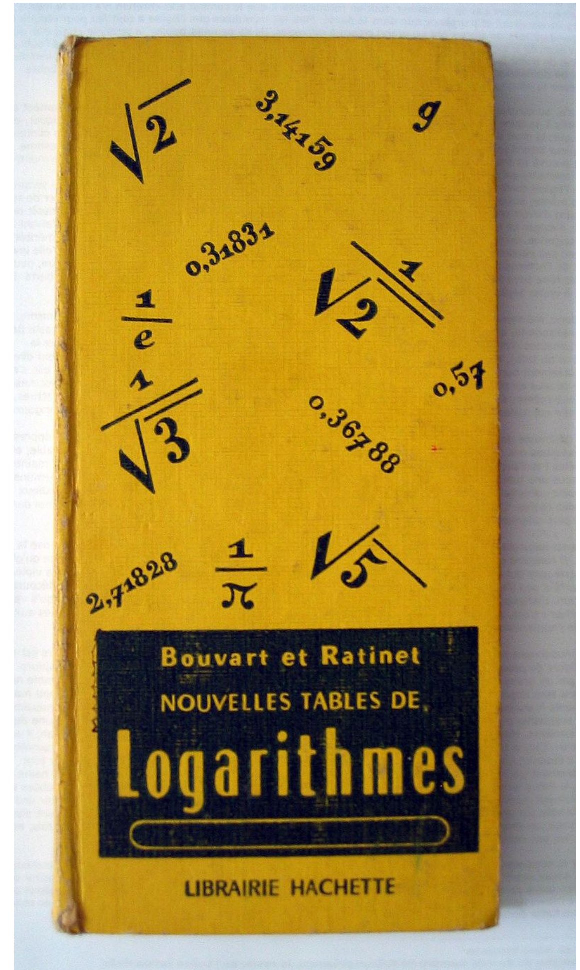
- Table de 1 à 100 000 de Bouvart et Ratinet

(74 éditions de 1905 à 1970)

254ème souvenir de Georges Perec

- Extrait de 10 à 99 avec 5 décimales :

N	0	1	2	3	…	9
10	0000	0043	0086	0128	…	0374
11	0414	0453	0492	0531	…	0756
12	0792	0828	0864	0899	…	1106
13	1139	1173	1206	1239	…	1430
14	1461	1492	1523	1553	…	1732
15	1761	1790	1818	1847	…	2014
16	2041	2068	2095	2122	…	2279
17	2304	2330	2355	2380	…	2529
18	2553	2577	2601	2625	…	2765
19	2788	2810	2833	2856	…	2989
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
99	9956	9957	9957	9958	…	9960



$\log_{10}$(ligne/10 + colonne/100)=N/10000

ex) $\log_{10}(1{,}81)=0{,}2577$

$\log_{10}(0{,}00181)=\log_{10}(1{,}81/1000)=0{,}2577-3=-2{,}7423$

$\log_{10}(18{,}1\underline{7})=1+\log_{10}(1{,}817)=1+0{,}2577+\underline{7}\text{x}0{,}00024=1{,}2594$ (interpolation linéaire)

$\log_{10}(N)=1{,}211=1+0{,}2110=1+0{,}2095+0{,}0015=1+0{,}2095+X*0{,}00027$

$5\leq X\leq\underline{6}$ d’où $N=10\text{x}1{,}62\underline{6}=16{,}2\underline{6}$

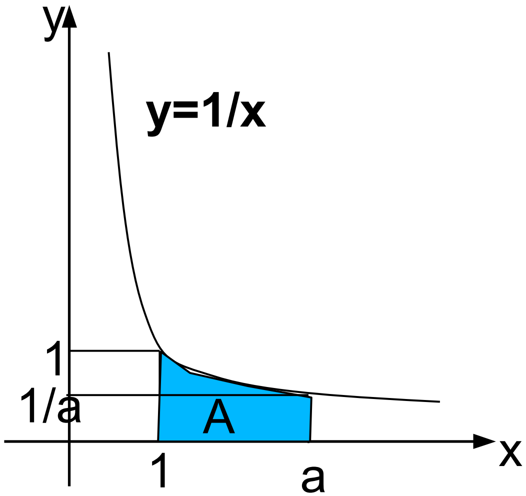
Fonctions logarithmes

- Des tables de correspondances aux fonctions log (G. W. Leibniz 1697)
-
- f(xy)=f(x)+f(y) ou réciproquement g(x+y)=g(x)g(y)
  en effet g(f(xy))=g(f(x)+f(y))=g(f(x))g(f(y))=xy

  - f(1)=f(1 x 1)=f(1)+f(1) $\Rightarrow$ f(1)=0
  - f(1)=f(x/x)=f(x)+f(1/x)=0 d'où f(1/x)=-f(x)
  alors f(x/y)=f(x)+f(1/y)=f(x)-f(y) : quotients en différences
  - f(x^n) = n f(x) : puissances en produits

- f(x) **logarithme** notée ln(x) et
  g(x) **exponentielle** notée exp(x)

- Lien avec **l'hyperbole 1/x** : G. de Saint Vincent (1647)
  puis C. Huygens (1661) :
  A=aire de 1/x entre 1 et a = ln(a) - ln(1)=ln(a)
  ln est de la **primitive** de 1/x
  ou 1/x la **dérivée** de ln(x)



Logarithmes utiles

- $\log_e$ noté ln : **logarithme naturel ou népérien** base e=2,71828… (nombre d'Euler) et
  g=exp : **exponentielle** tq exp(ln(1))=e

  utilisés en mathématiques (nombres premiers, transformée de Fourier, dimensions fractales …)

  Napier logarithme base 1/e : $Nlog(x)=10^7 \ln(10^7/x)$ avec $x=10^7\sin(a)$ et $Nlog(10^7)=0$!

- $\log_{10}$: **logarithme base décimale (de Briggs)**, $\log_{10}(10)=1$ et $\log_{10}(x)=\ln(x)/\ln(10)$

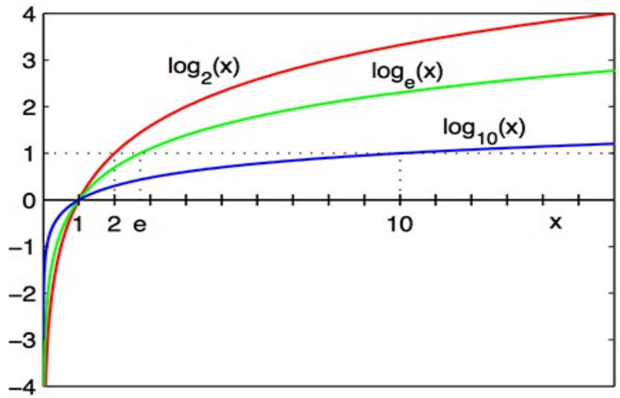
  utilisé pour les calculs (décibels, pH, magnitudes, …), échelles logs, …

  ex) $10^{3,5}10^{0,5}=10^4=1000$ et $\log_{10}(10^{3,5}10^{0,5})=\log_{10}(10^{3,5})+\log_{10}(10^{0,5})=3,5+0,5=4$

- $\log_2$ noté lb : **logarithme binaire**, lb(2)=1 et lb(x)=ln(x)/ln(2)

  utilisé en informatique, nombre de bits pour écrire un nombre

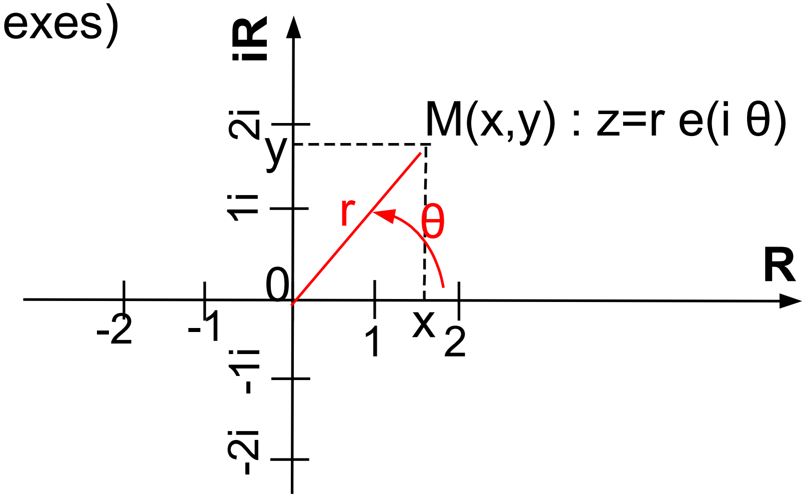
  ex) $lb(10^{19})=63,12$: il faut 64 bits pour 19 chiffres décimaux !



log(x) fonction croissante
log(0) singulier
log(-x) non défini

Logarithmes complexes

- ln(-1) ?
-
- Exponentielle complexe : extension de la formule
  $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \ldots + x^n/n! + \ldots$ avec $n!=1 \times 2 \times 3 \times .. \times n$
  x dans R (réels) puis z dans C = R x R (complexes)



$z = x + i\,y$ avec $i^2 = -1$
$z = r \exp(i\,\theta)$ avec $r=|z|=d(OM)=\sqrt{x^2+y^2}$
$\theta = \arctan(y/x)$, $x=r \cos\theta$ et $y=r \sin\theta$
$\exp(i\,\pi/2) = i$: rotation de 90° du point (1,0)
$\exp(i\,\pi) = -1$ relation d'Euler

d'où $\ln(-1) = \ln(\exp(i\,\pi))=i\,\pi$
mais $0=\ln(1)=\ln(-1^2)=2\ln(-1)=2\,i\,\pi$!
monodromie du logarithme : lacet autour de la singularité en 0
(monodromie de $\sqrt{-1}$ = i ou –i)

- fonction $L(z)=L(|z|\exp(i \arg(z))) = \ln(|z|) + i \arg(z)$ avec $L(x+iy)=\ln(r)+2i \arctan(y/(x+r))$
  $x>0, y=0 : L(x)=\ln(x)$; $x<0, y=0 : L(x)=\ln(|x|)+i\pi$; $x=0, y=1 : L(i)=i\pi/2$
  $L(zw)=L(w)+L(z)$? $\exp(L(z))=z$ mais $L(\exp(z))=z+2i\pi Z$ (Z entiers relatif)

Plus de logarithmes

- **Cologarithme** : log(-x)=-log(x)=colog(x)   ex) pH = $colog_{10}(c(H_30^+))$
-
- **Antilogarithme** = dual du log_a : $a^x=y$
-
- **Logarithme discret** : sur les groupes cycliques Z/nZ={0,1,2,3,…,n-1}
  application en cryptographie
  x log discret de Z/nZ* dans la base a tq $a^x=g$
  Exemple) table de multiplication dans Z/7Z*={1,2,3,4,5,6}

1	2	3	4	5	6
2	4	6	1	3	5
3	6	2	5	1	4
4	1	5	2	6	3
5	3	1	6	4	2
6	5	4	3	2	1

$3^0=1$; $3^1=3$; $3^2=2$; $3^3=6$; $3^4=4$; $3^5=5$; $3^6=1$ …
d'où la table de log en base 3 :
On a $\log_3(2x3)=\log_3 2+\log_3 3$
mais $\log_3(2x4)\neq\log_3 2+\log_3 4$

x	1	2	3	4	5	6
$\log_3$ x	0	2	1	4	5	3
$\log_5$ x	0	4	5	2	1	3

! $2^4=2^1=2$ donc $\log_2$ non défini dans Z/7Z*