

Le **PROBLÈME** de l'**ARBRE** de **STEINER MINIMUM** De Fermat ... aux Grands Réseaux

K
A
F
E
M
A
T
H



Steven RUBIN-Computer Aids for VLSI Design

14-12-2017

Die Theorie ist nicht die Würzel, sondern die Blüte der Praxis

L'ECHELLE de TEMPS du PROBLEME de JACOB STEINER

6

Aujourd'hui ...

Quelques domaines d'application : informatique (processeurs, réseaux), biologie (repliement des protéines).

5

2000 ...

Extension du domaine de la recherche : on change de dimension ou d'espace métrique.

4

1960 ...

Algorithmique du problème de Steiner. Approximation et Conjecture.

INTERMÈDE : Avant de poursuivre, quelques mots sur les graphes

3

1941 ...

R. COURANT «officialise» le problème sous le nom de (Jacob) **STEINER**. **Caractéristiques** des Arbres de Steiner.

2

1810...1879

GERGONNE, GAUSS et autres : le problème refait surface et se généralise à **$n > 4$** points.

1

1647...1750

Les solutions pour **$n=3$** points : **TORRICELLI, CAVALIERI** et **SIMSON**.

0

1643

FERMAT : 1^{ère} formulation du problème.



0

1638
1643

... d'après Descartes,
FERMAT
formule le problème



Nous sommes en 1638. DESCARTES s'intéresse
aux *courbes* de la forme :

$$\sum_{i=1}^4 \|p_i - x\| = c$$

FERMAT, dans son étude sur les « Maxima et Minima », en 1643, reprend le problème en termes géométriques ... avec comme condition supplémentaire que **c** soit minimale.

C'est l'amorce de ce qui deviendra un problème
d'optimisation très actuel ...

0-1) La formulation du Problème par FERMAT

Etant donnés $n=3$ points du plan, **A**, **B** et **C**, non alignés,
comment “choisir” un 4ème point **P** du plan pour que
la somme des longueurs des segments de droite
de **P** à chacun des points **A**, **B** et **C** soit minimale ?

0-2) Les Deux Cas du Problème par FERMAT pour $n=3$

**Les 3 points du plan, A, B et C, sont les sommets
d'un triangle dont les angles internes
sont tous inférieurs à 120°**

**L'un des angles du triangle formé par les 3 points du plan
A, B et C, est égal ou supérieur à 120°**

Nous allons nous intéresser seulement au *premier* de ces deux cas ... car c'est sous cette forme que le problème « renaîtra » plusieurs fois de Fermat à nos jours !

Pour visualiser la solution géométrique du problème, exécutons un petit travail d'écolier, que chacun peut refaire chez soi.

1

La Solution du Problème pour $n=3$ points.



1647

1-1) 1^{er} cas : La Construction de TORRICELLI

Point de Torricelli.

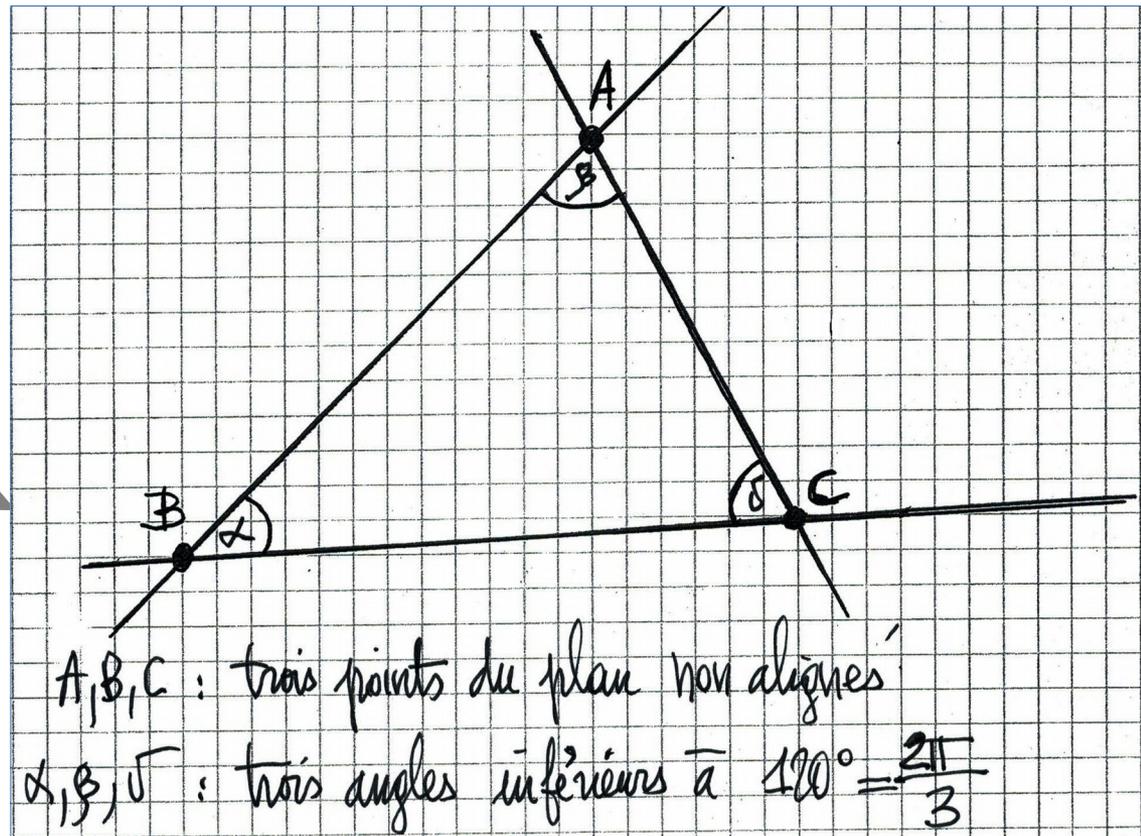
Evangelista **Torricelli** (1608-1647), géomètre et physicien, inventeur du baromètre, traite en 1647 le 1^{er} cas du problème de Fermat.

Premier cas
de figure :

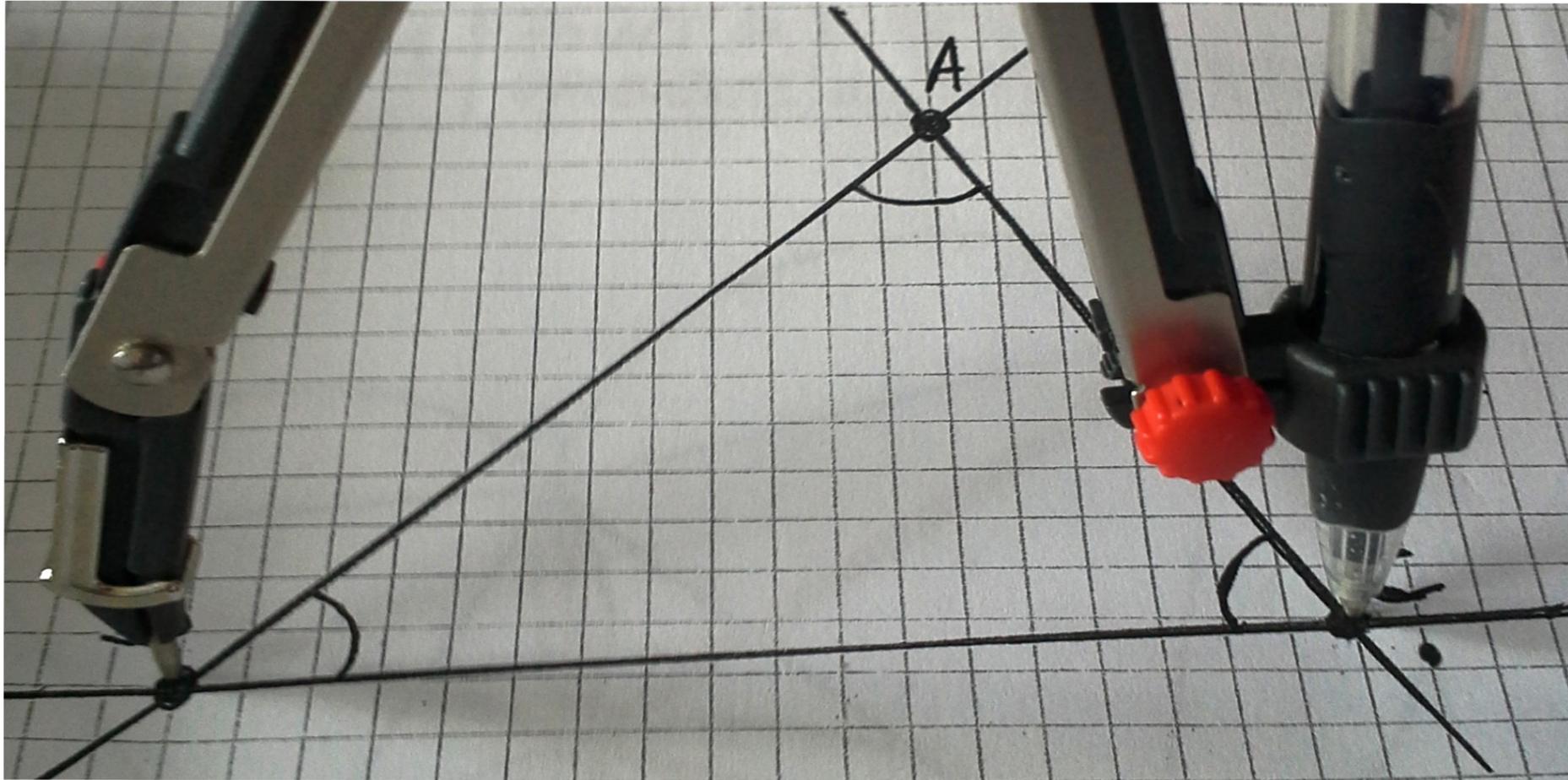
Les angles

α, β et δ

sont $< 120^\circ$



On construit d'abord un triangle équilatéral dont l'un des côtés est égal à BC :



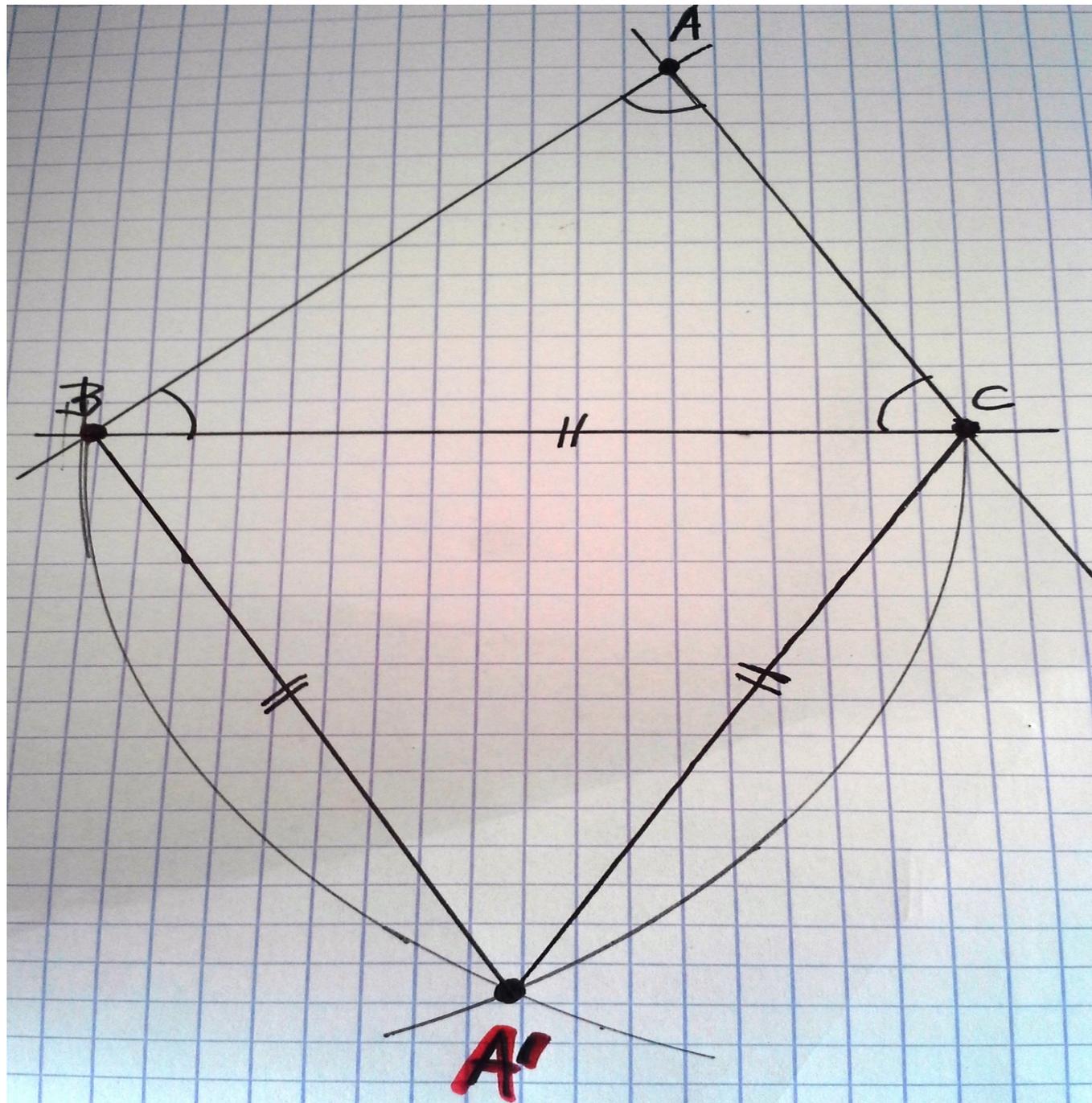
Ici, on choisit le côté BC , mais on peut aussi bien choisir les côtés AB ou AC .

On trace le segment partant du sommet **C** au point **A'** d'intersection des deux arcs **CA'** et **BA'**

... puis on trace le segment partant du sommet **B** au point **A'**.

On obtient ainsi le triangle équilatéral **A'BC**

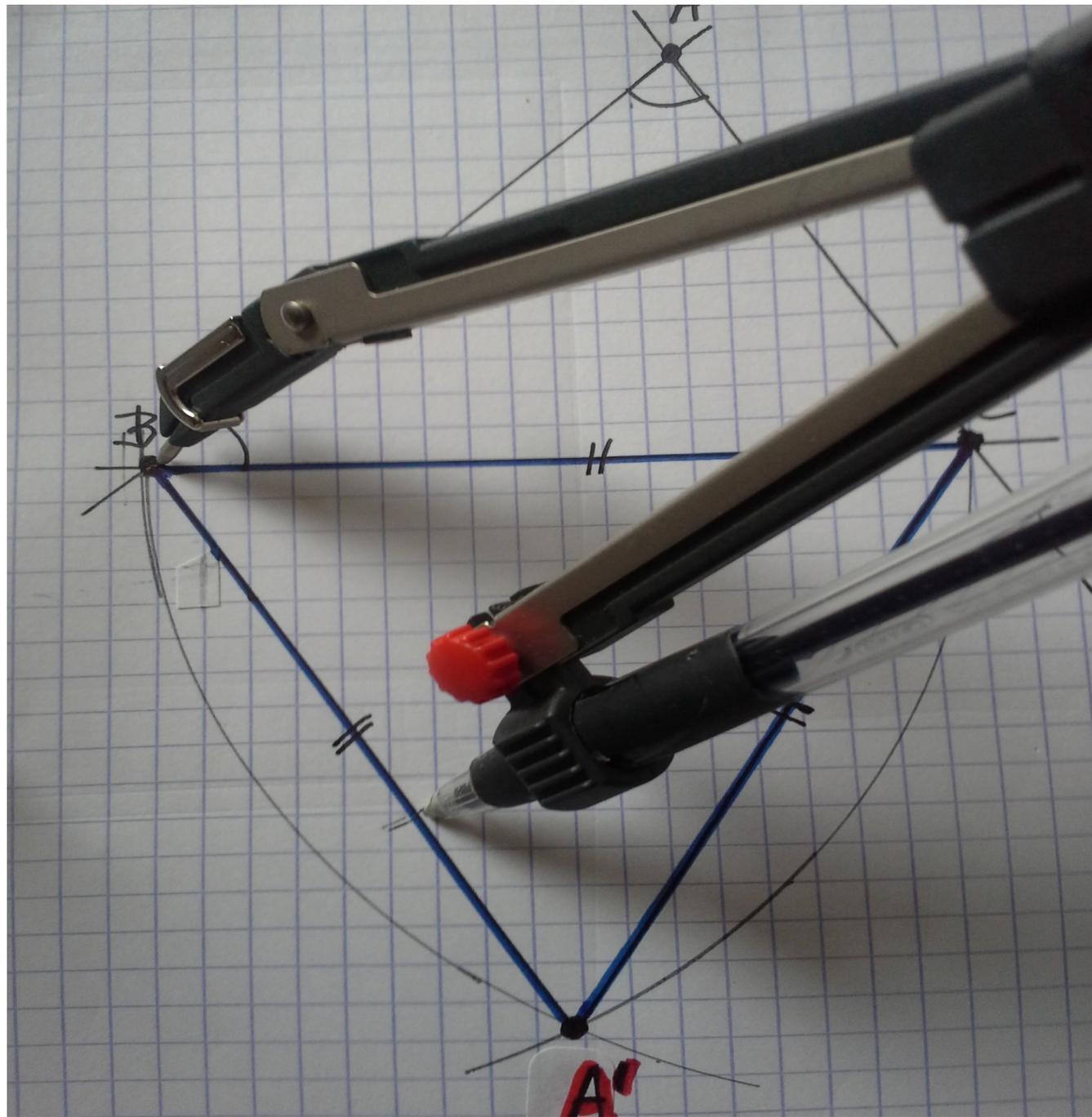
...



...

Plaçons la pointe du
compas sur le
sommet **B**,
par exemple, et
prenons un
écartement r tel que
 $|BA'|/2 < r < |BA'|$

...



...

Plaçons la pointe du

compas sur le

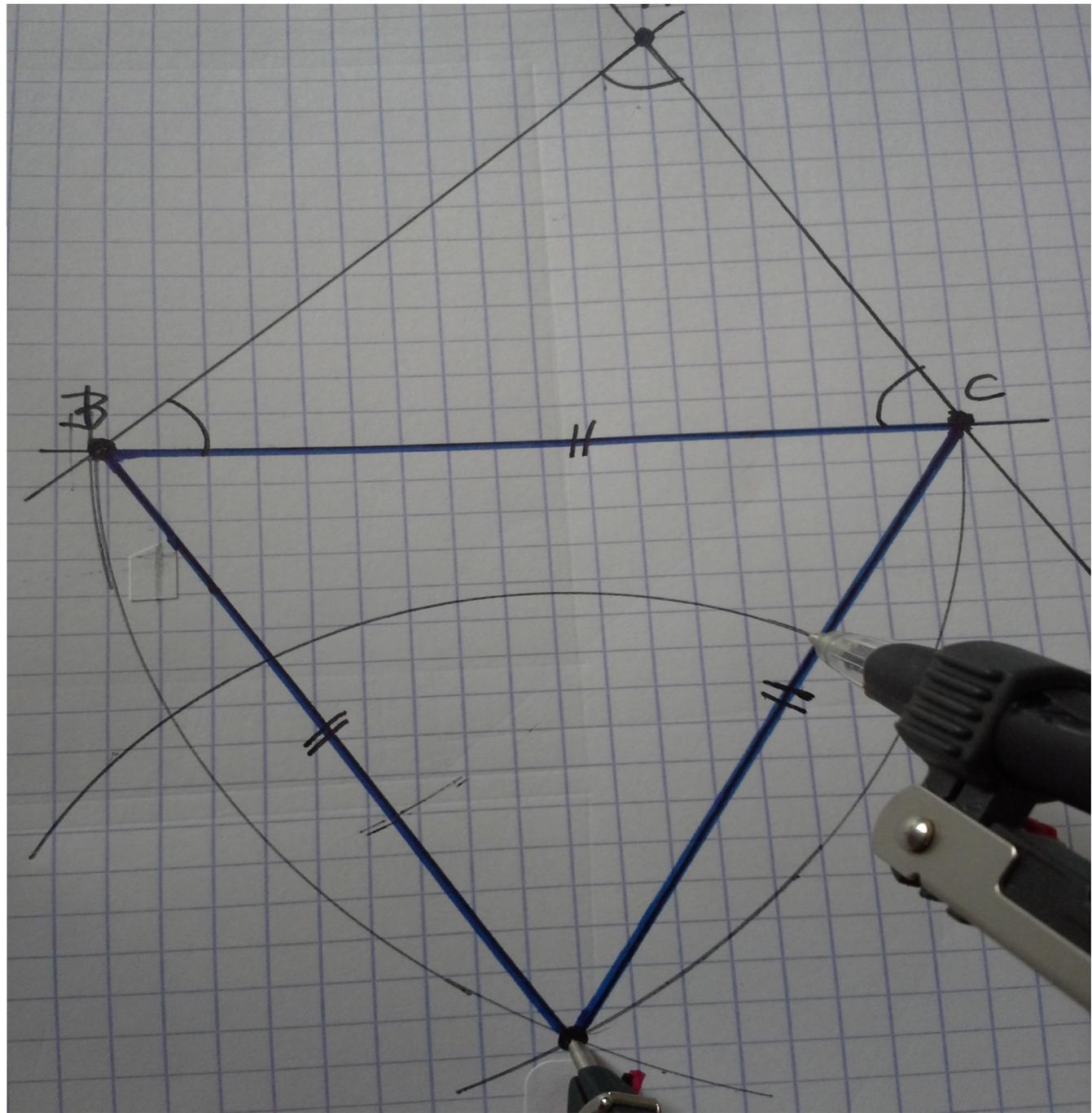
sommet **A'**

et traçons un arc

de rayon r

qui coupe **A'B** et **A'C**

...



...

Plaçons la pointe du

compas sur le

sommet **B**

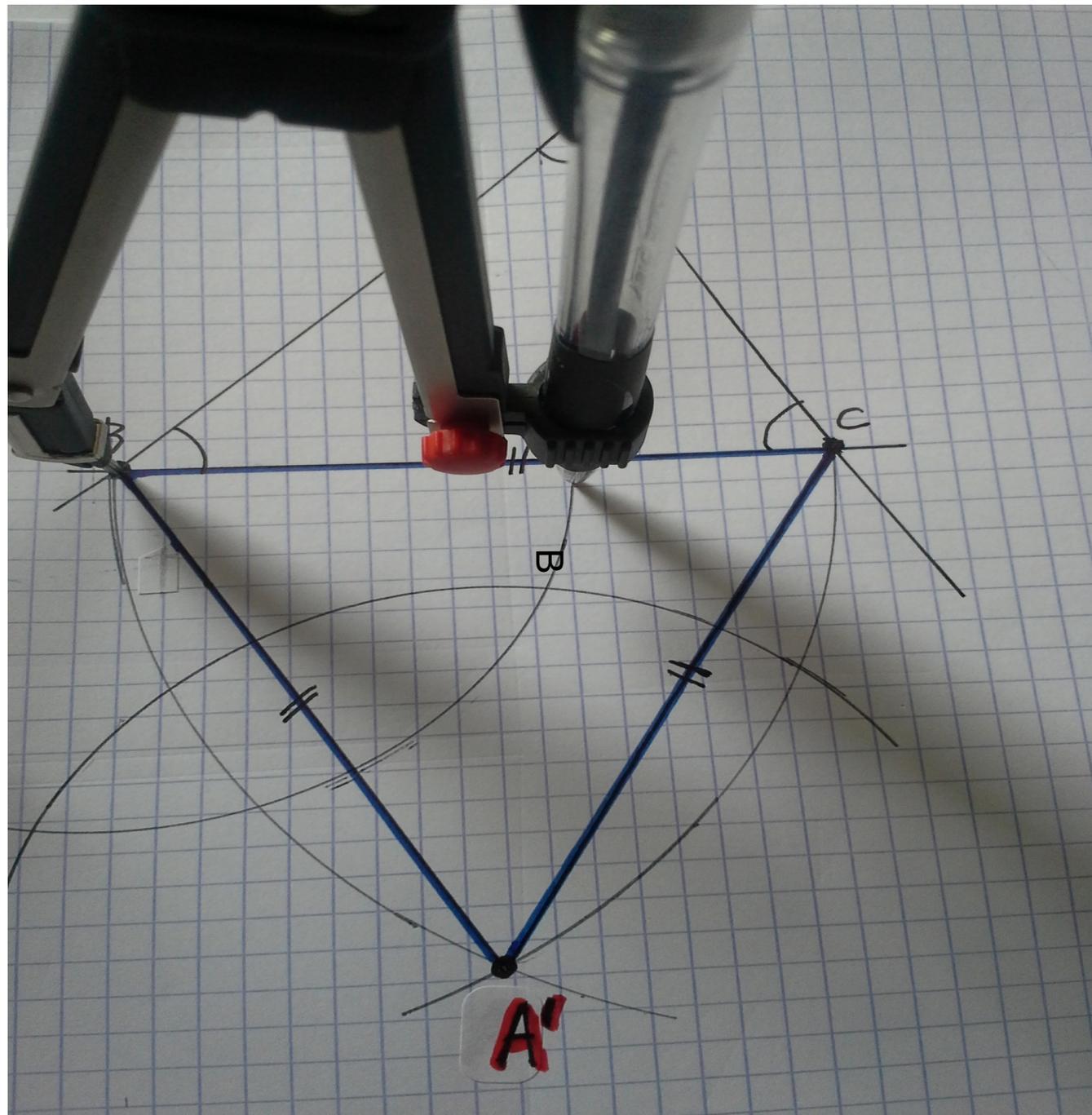
et traçons un

deuxième arc

de rayon r

qui coupe **A'B** et **BC**

...



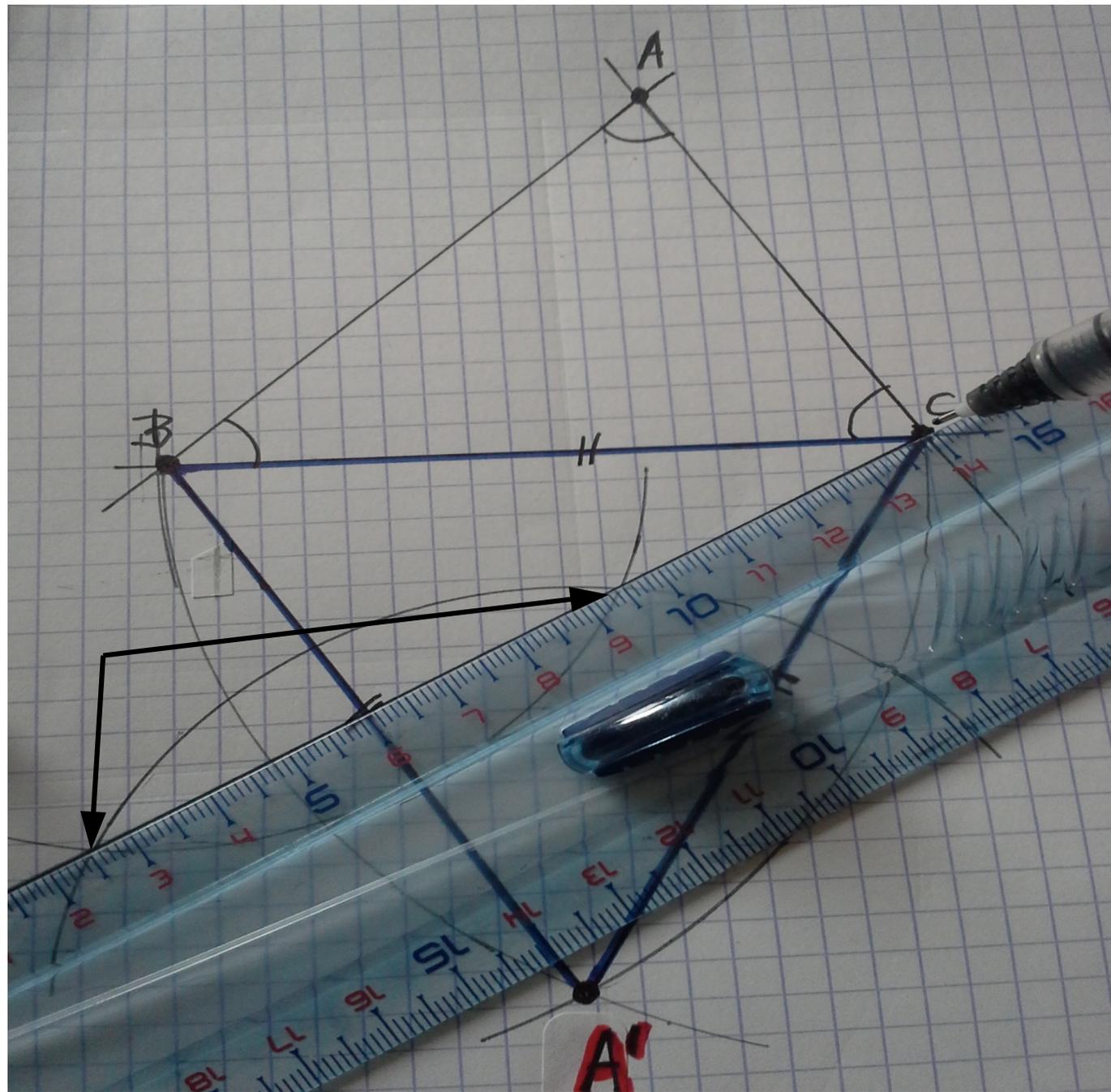
...

Traçons la droite
passant par le point
C

et les deux points
d'intersection des

deux arcs

...



...

En plaçant
la pointe du compas

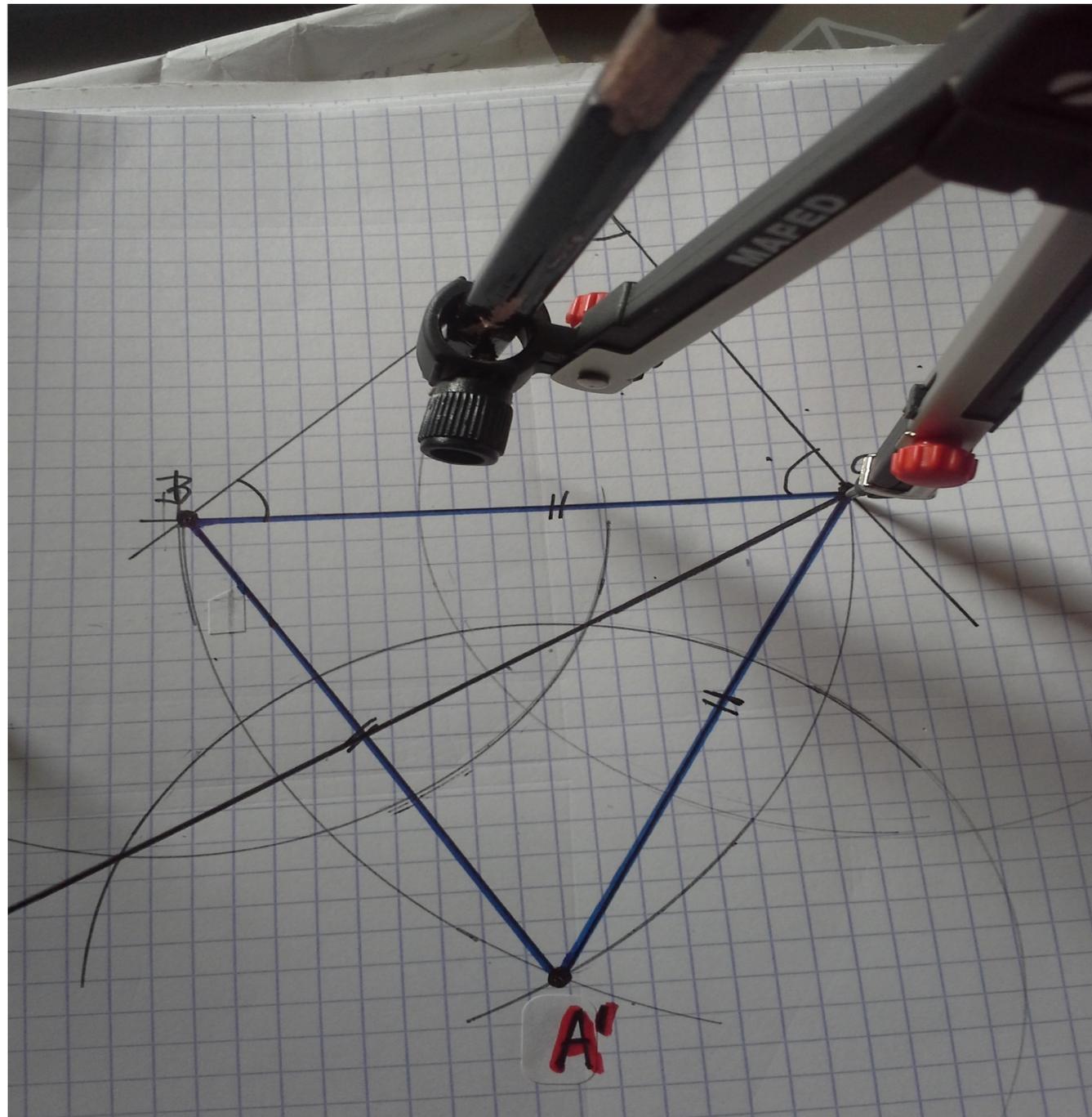
sur le sommet **C**

traçons l'arc

de rayon r

et de centre **C**

...



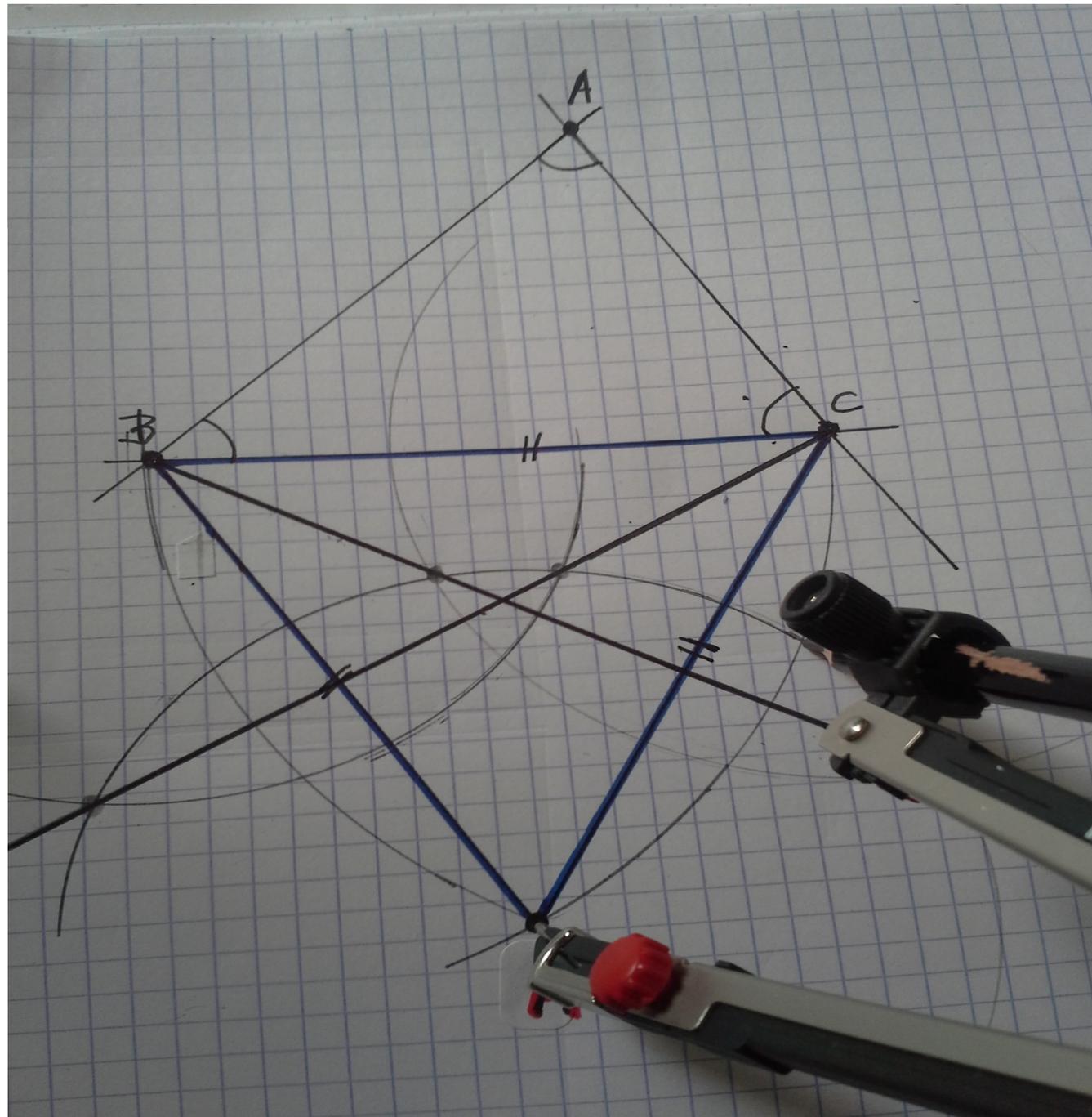
...

Puis traçons l'arc

de même rayon r

et de centre A'

...



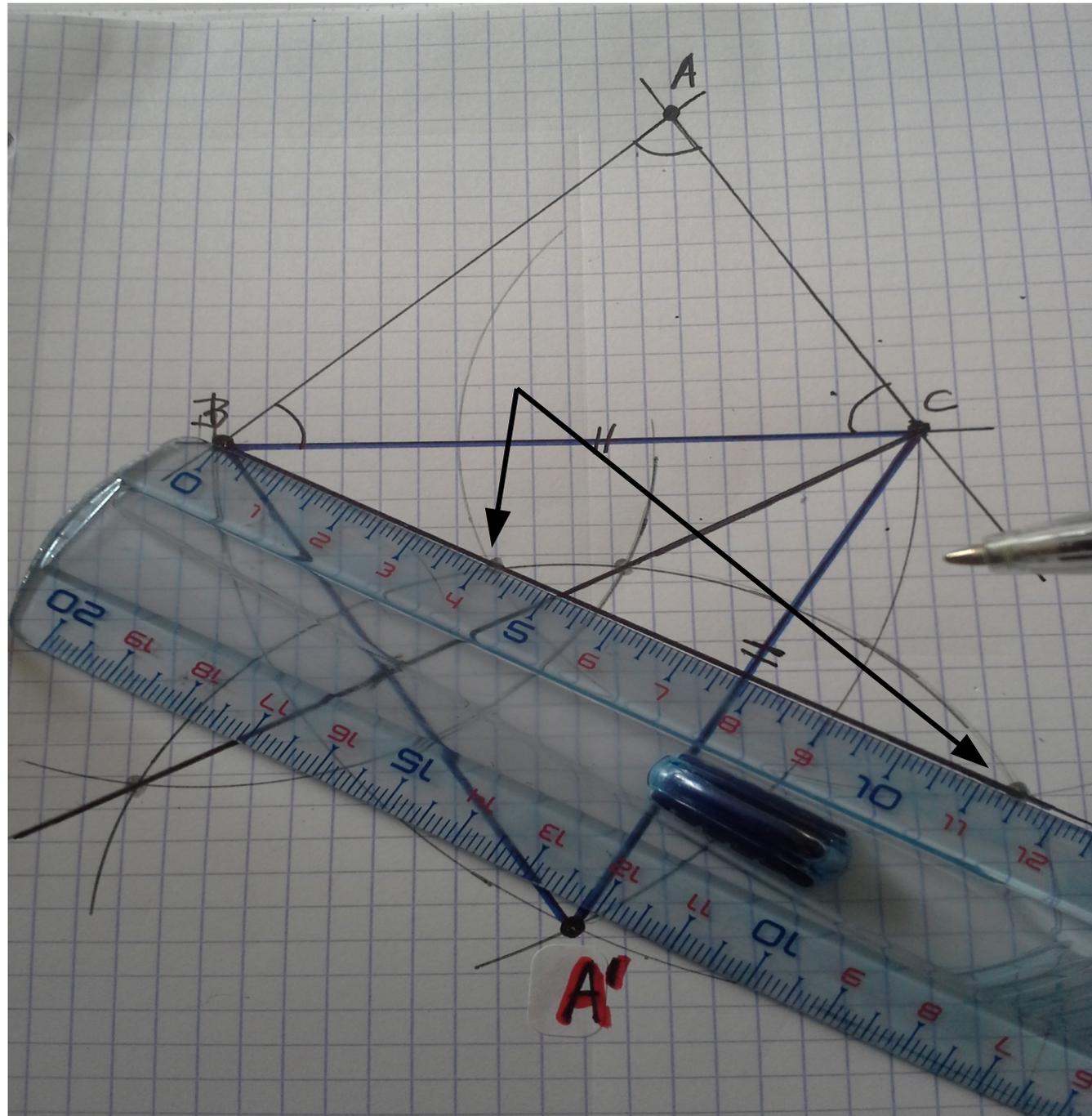
...

Traçons la droite
passant par le point **B**

et les deux points
d'intersection des

deux arcs

...



...

En prenant comme

centre le point

d'intersection des

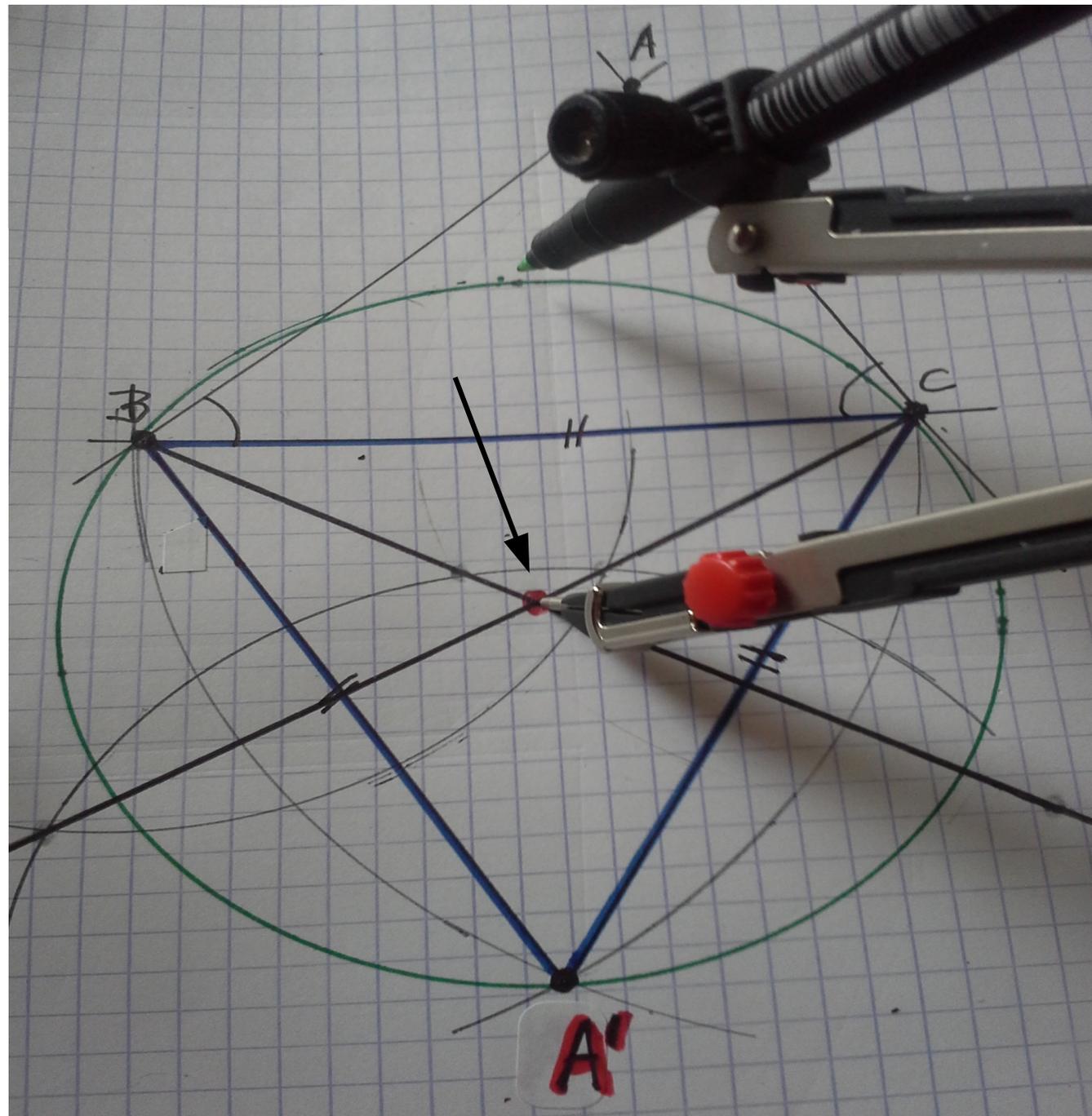
droites issues de **B** et

de **C**, traçons le

cercle circonscrit

au triangle **A'BC**

...



...

Traçons la droite

passant par le point **A**

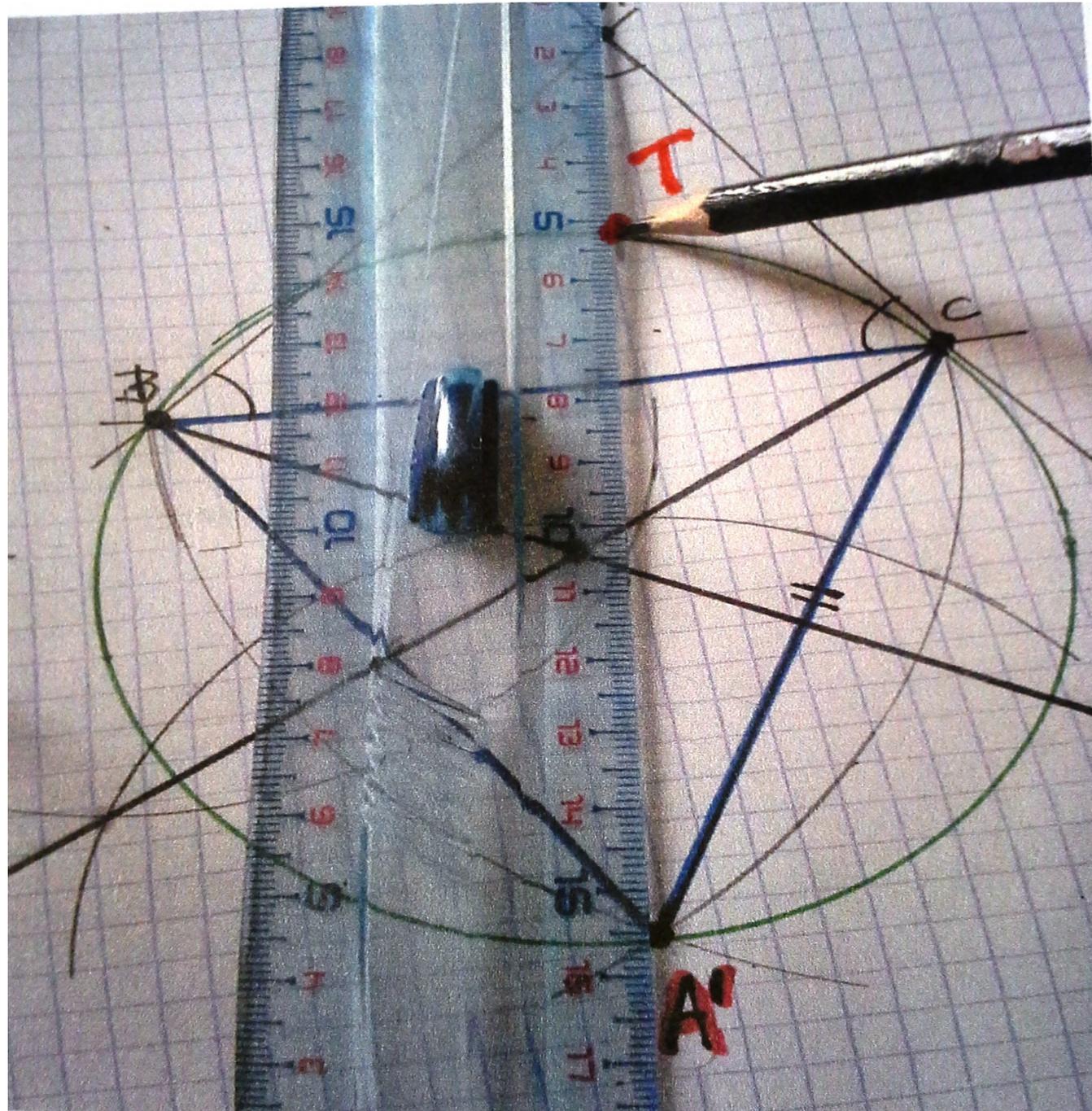
et le point **A'**

La droite (**AA'**) coupe

le cercle circonscrit

au point **T**

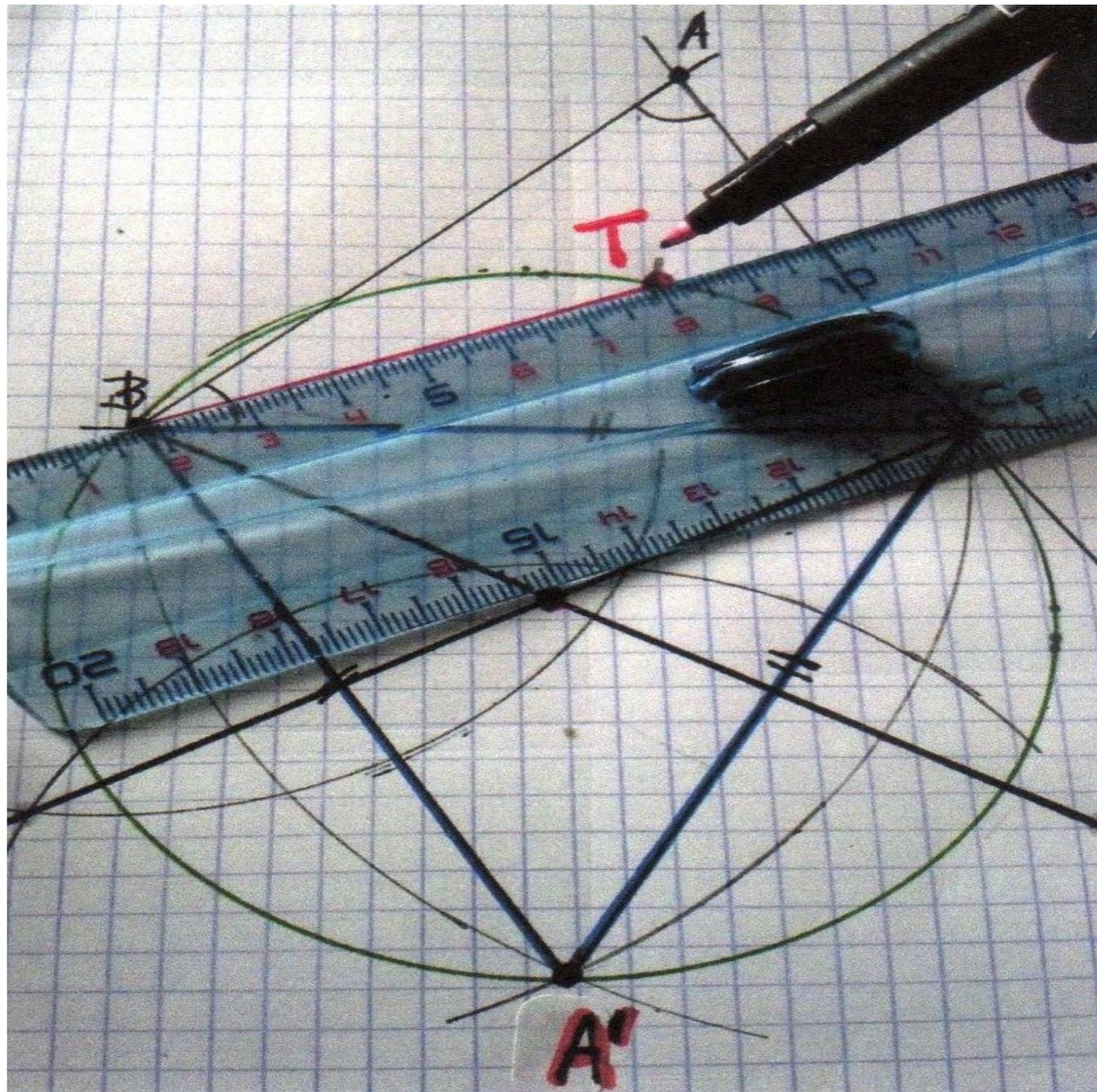
...



...

Du point **T**, traçons le
segment **TB**

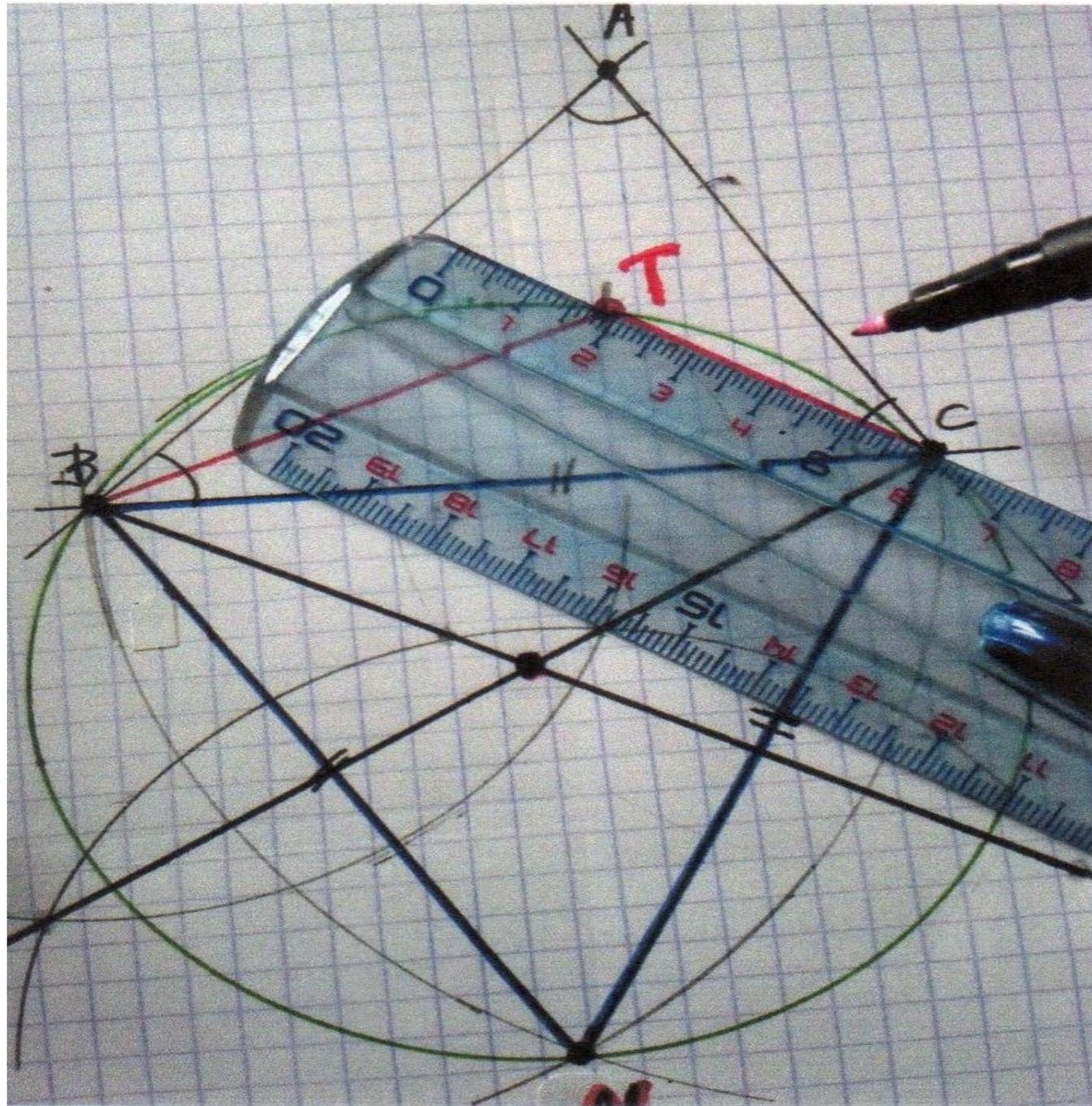
...



...

Du point **T**,
traçons le
segment **TC**

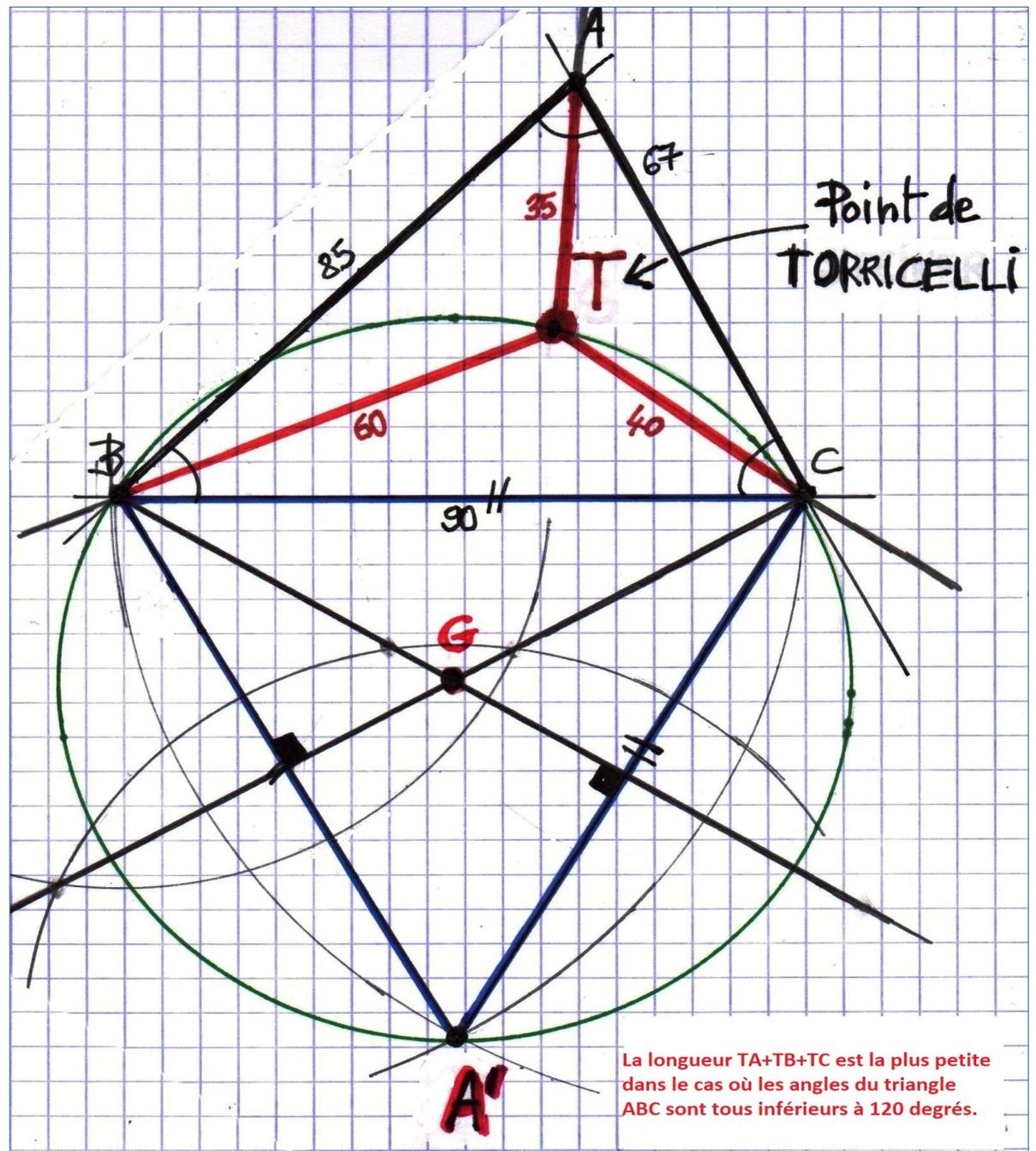
...



...

Le point **T** que nous
venons de construire
est le
point de
TORRICELLI
dans le cas de $n=3$.

...



On effectue une construction analogue sur les deux autres côtés, AB et AC, du triangle ABC.

...

Le point **T** de

TORRICELLI

est le point d'intersection

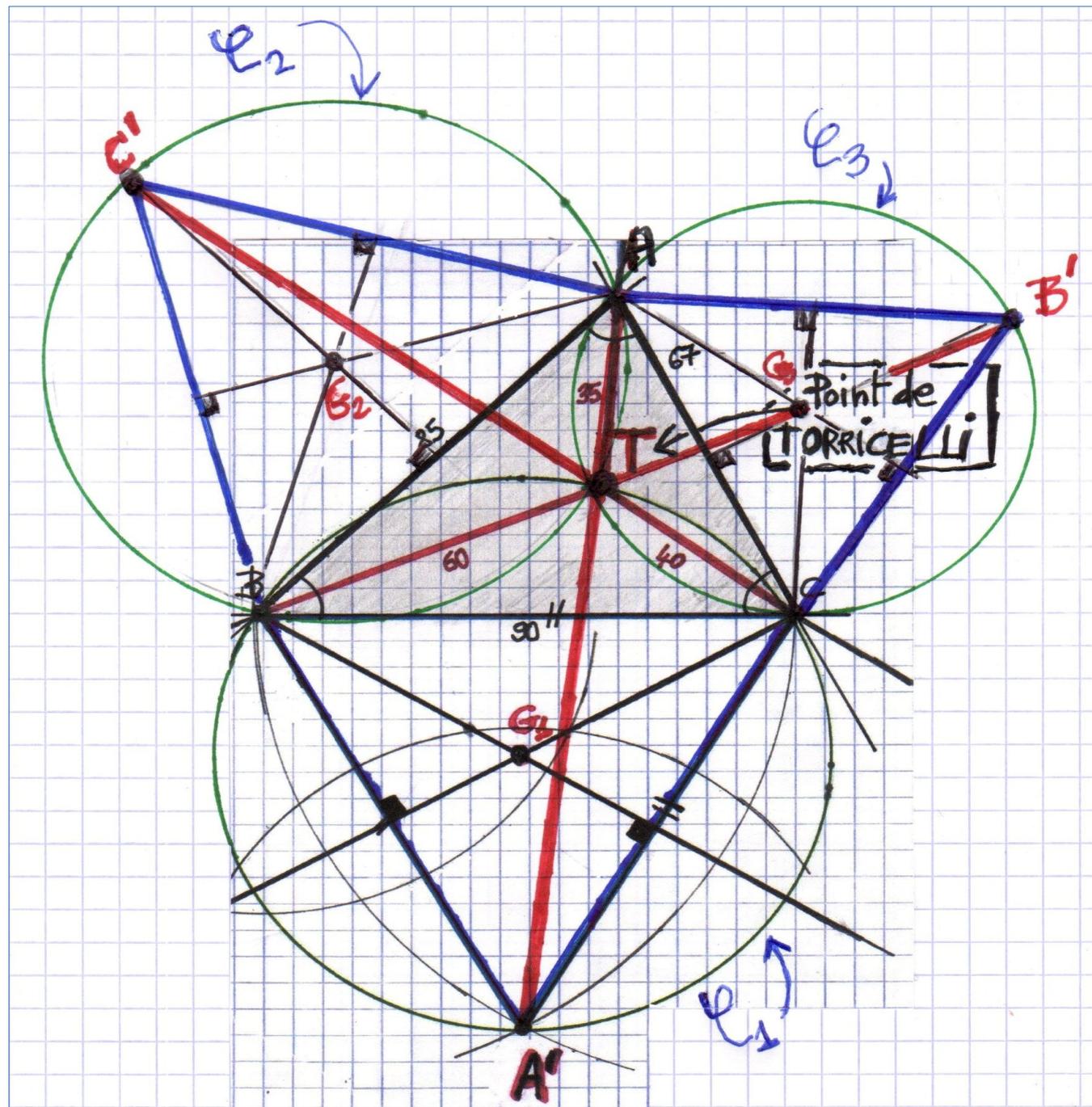
des trois cercles

C_1 , C_2 et C_3 ,

circonscrits aux triangles

équilatéraux $A'BC$, $C'BA$

et $B'CA$ respectivement.





1647

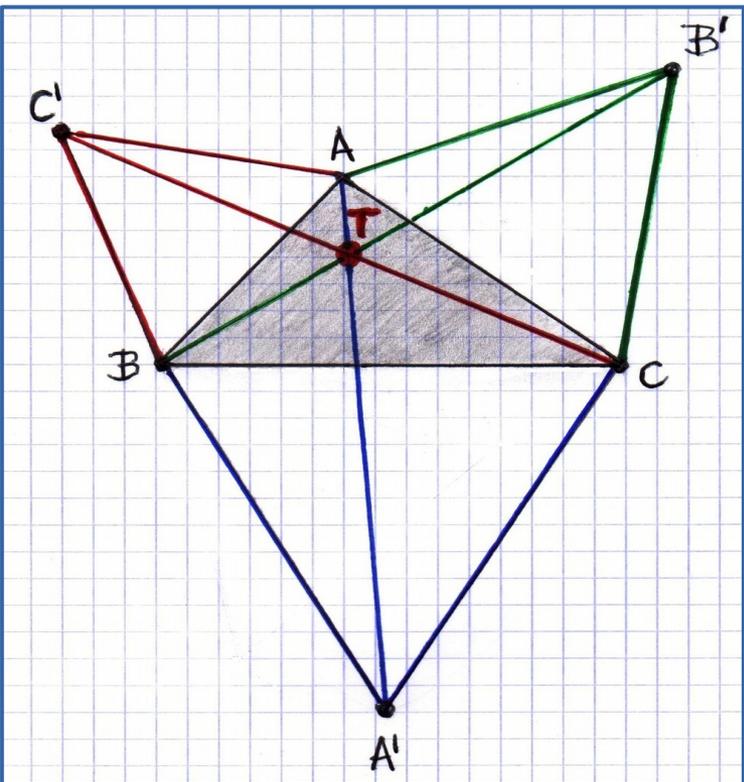
1-2) CAVALIERI et le Deuxième cas de figure

- Bonaventura **Cavalieri** (1598-1647) a montré que, dans le second cas, celui où l'un des angles α, β ou δ est $\geq 120^\circ$, le point qui minimise la longueur totale est le sommet de l'angle obtus ...
- Il a aussi montré que, dans le premier cas, les angles ayant le point de Torricelli pour sommet mesurent 120° .



1750

1-3) La Construction de SIMSON



Pendant environ un siècle, le **problème de Fermat-Torricelli** tombe à peu près dans l'oubli ...

Jusqu'à ce que **Robert Simson** (1687-1768) propose une autre *construction*.

Dans cette construction, Simson utilise les droites **[A'A], [B'B] et [C'C]**. Ce sont les **droites de ... Simson**.

Elles joignent les sommets (A', B' et C'), qui dans chacun des triangles équilatéraux *n'appartiennent pas* au triangle ABC, aux sommets opposés (A, B et C) du triangle d'origine ABC.

Simson montre qu'**elles se coupent en un point T qui est le même que le point de Torricelli**.



2

1810
1879

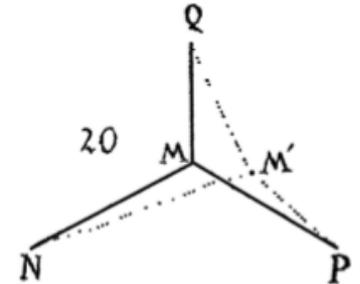
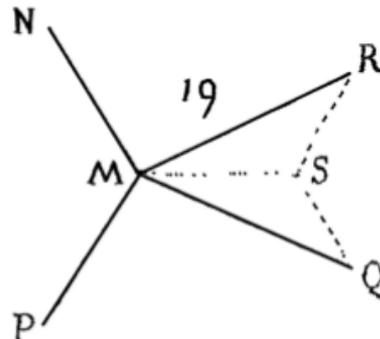
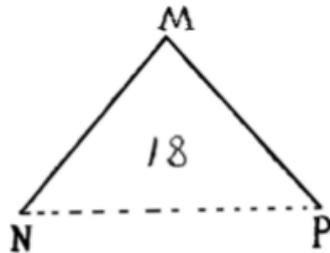
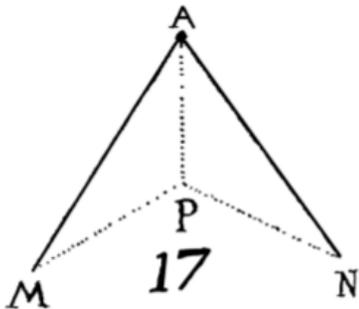
GERGONNE, GAUSS et autres :
le problème «refait surface»
et se généralise à $n \geq 4$ points.



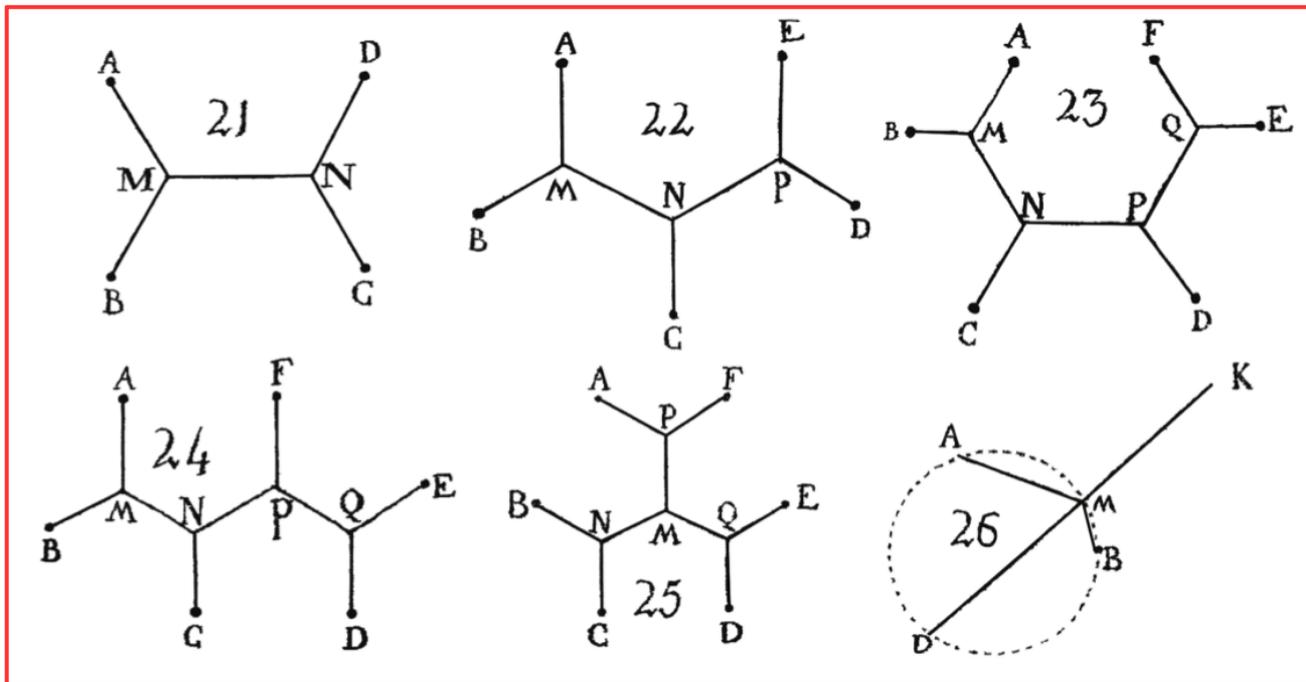
Le **problème de Fermat-Torricelli** est de nouveau quasiment tombé dans l'oubli jusqu'à ce que **Joseph Diaz Gergonne** (1771-1859) le remette au goût du jour, en **1810**, dans le journal qu'il a créé, les "Annales de Gergonne".

2-1) La formulation de GERGONNE

Gergonne formule le problème en termes de réseau : « Un *ingénieur* veut établir une communication de longueur minimale entre **trois** villes au moyen d'un *réseau* formé de trois branches joignant ces trois villes et passant par un quatrième point ... ». Puis il proposera de généraliser à un réseau de $n > 3$ points ...



Quelques figures proposées par Gergonne dans le cas de $n > 3$



2-2) GAUSS et quelques autres s'en mêlent ...

En **1836**, dans une correspondance, découverte en 1986, avec l'astronome Ch. Schumacher (1777-1855), **Gauss** reformule le problème en termes de circuit de chemin de fer entre $n \geq 4$ villes ... Sa participation n'ira guère plus loin apparemment.

En **1879**, Karl **Bopp** (1856-1905) fait une étude détaillée du problème de Fermat-Torricelli, spécialement dans le cas de $n=4$ points. En **1890**, un article d'Eduard **Hoffmann** (1858-1923) marquera la fin de l'intérêt porté au problème de Steiner ... jusqu'au siècle suivant.



3

1941 ...

Richard COURANT (1888-1972) «officialise» le nom du problème de (Jacob) **STEINER** ... et ouvre une nouvelle période de recherche.

Le problème de Fermat-Torricelli est de nouveau “oublié” pendant une bonne partie du XXème siècle, même s’il en est question en 1934, dans un article de Jarnik et Kössler, pour qui le problème s’énonce ainsi : « Trouver le plus court réseau qui interconnecte les n points du plan ».

3-1) Le Problème de Fermat-Torricelli devient le «problème de STEINER»

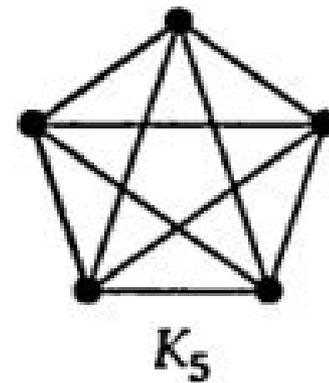
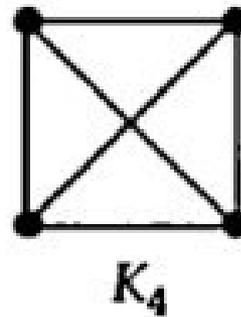
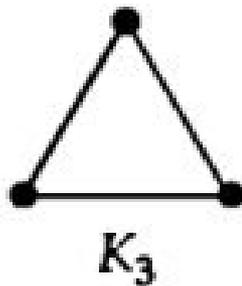
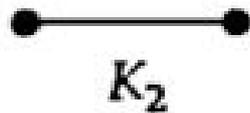
En **1941**, R. Courant et H. Robbins publient « What is mathematics ? », ouvrage à grand succès dans lequel la paternité du problème de Fermat-Torricelli est attribuée à *Jacob Steiner*. Depuis, on ne parle plus que du ...
problème de (l’arbre minimum) de Steiner.

Courant et Robbins reformulent le problème de Steiner expressément en termes de “réseau” :

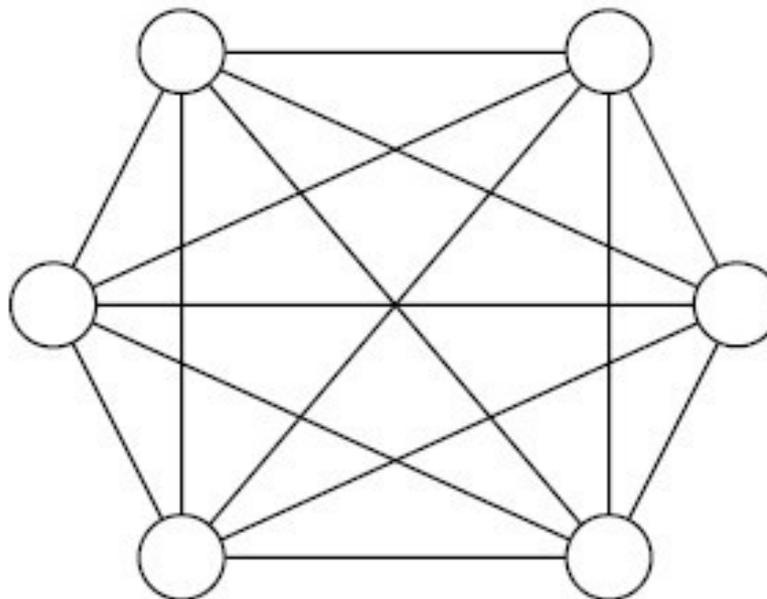
Etant donné un ensemble fini de points d’un *espace métrique*, trouver un **réseau de longueur minimale** qui connecte *tous* les points de cet ensemble.

Un graphe est dit **complet**, si chacun de ses sommets est relié aux autres sommets par une seule arête.

K_1

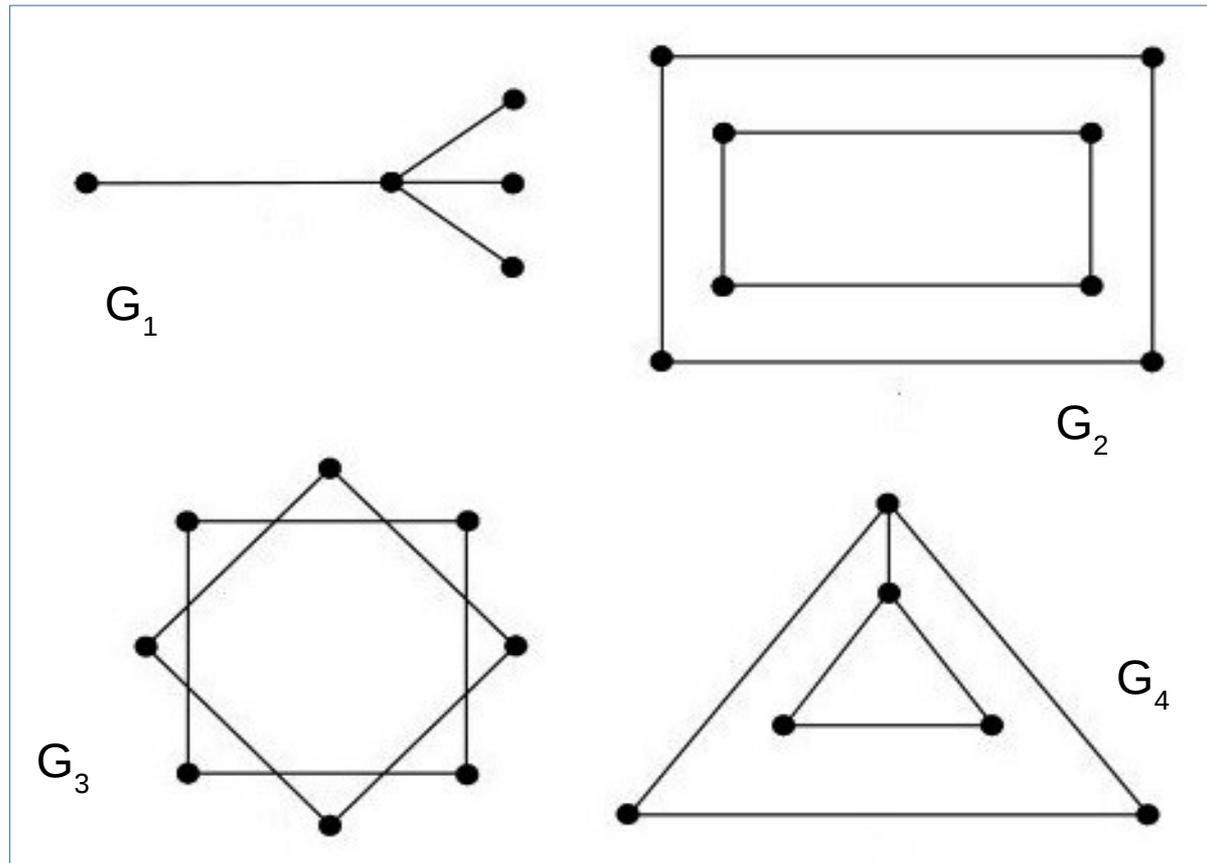


K_6



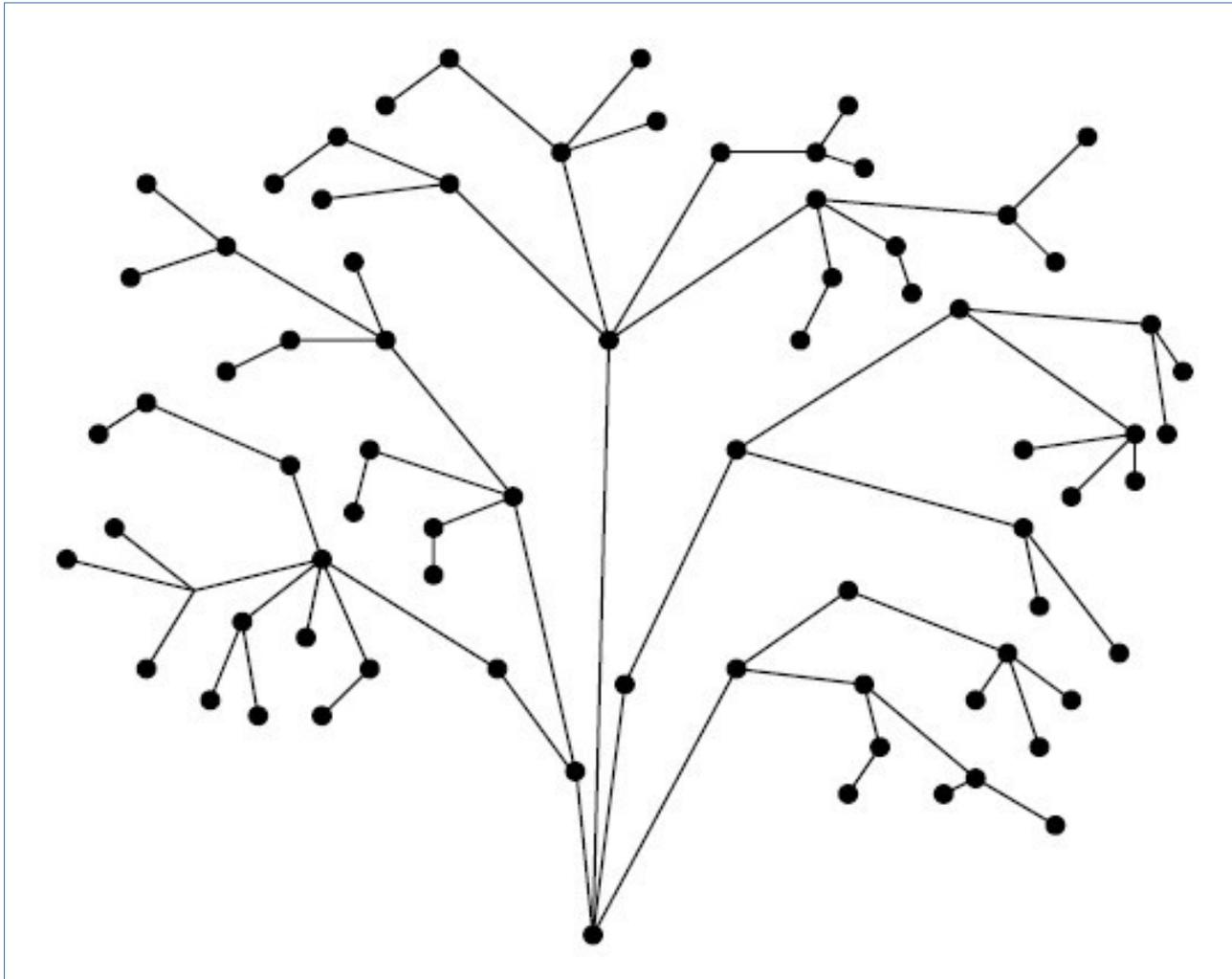
- On appelle **chemin** de x à y une succession finie d'arêtes d'un graphe G qui permet de joindre un sommet y à partir d'un sommet x en parcourant sans saut différentes arêtes de G .
- Un graphe est dit **connexe** si, pour toute paire de sommets (x,y) , il existe un chemin entre x et y : on dit alors que les sommets x et y sont *connectés*.

Parmi ces quatre graphes, G_1 et G_4 , sont connexes, les autres non :

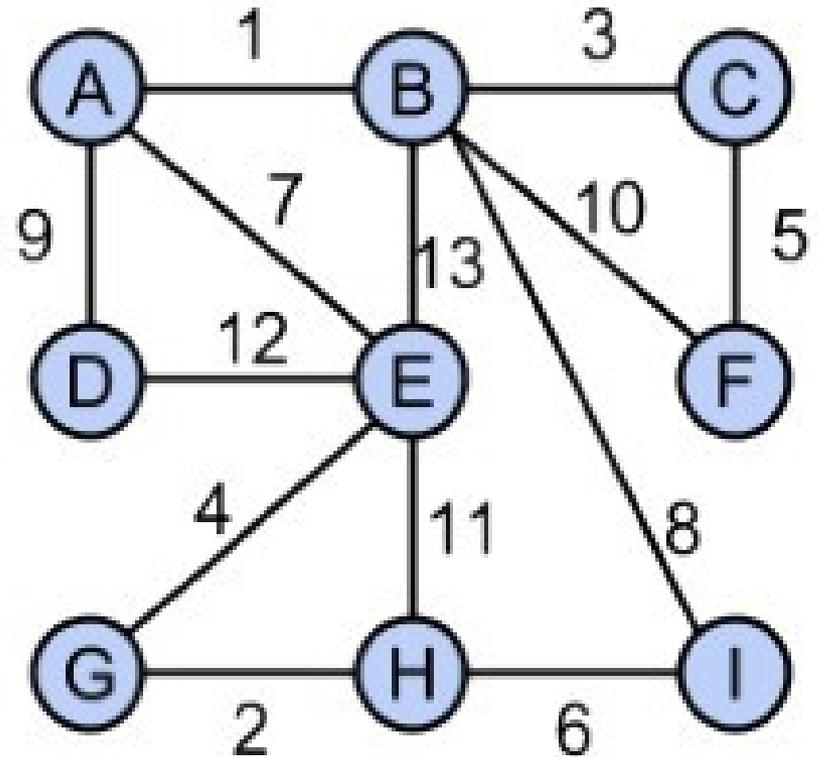
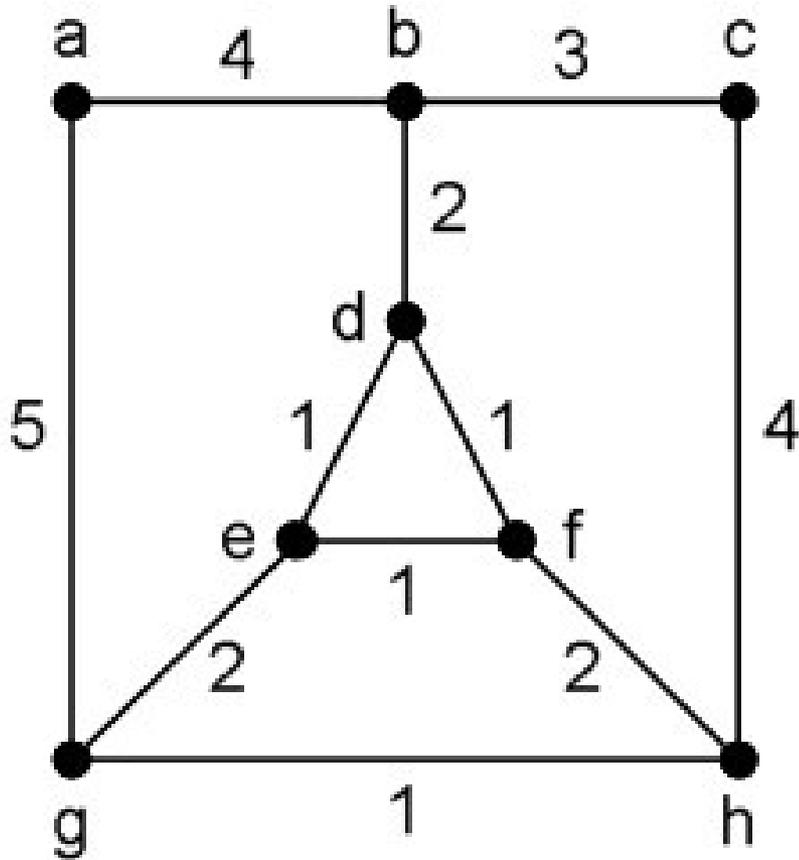


Un **arbre** est un graphe sans *boucle* qui est :

- **connexe** : il y a *toujours un chemin* reliant toute paire de sommets
et
- **sans cycle** : il n'y a *jamais de chemin* reliant un sommet à lui-même.



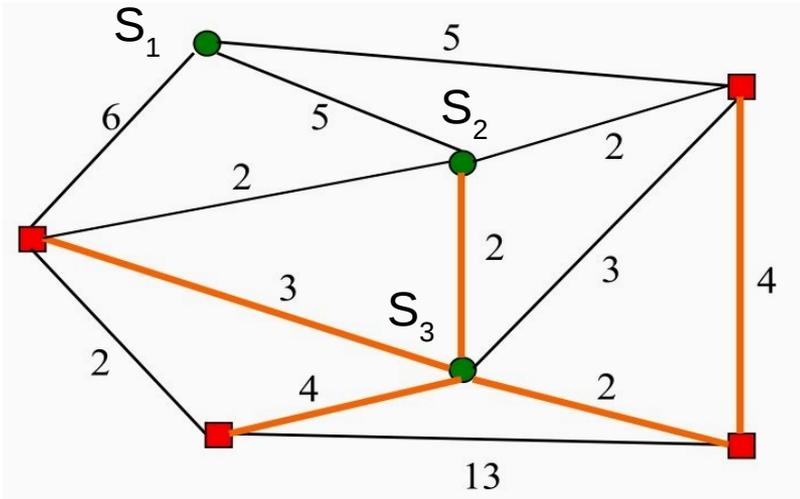
Un graphe G est dit **valué**, si chaque arête de G reçoit une « valeur » convenue, en général un nombre représentant une mesure dans l'espace métrique considéré.



Exemples de graphes valués

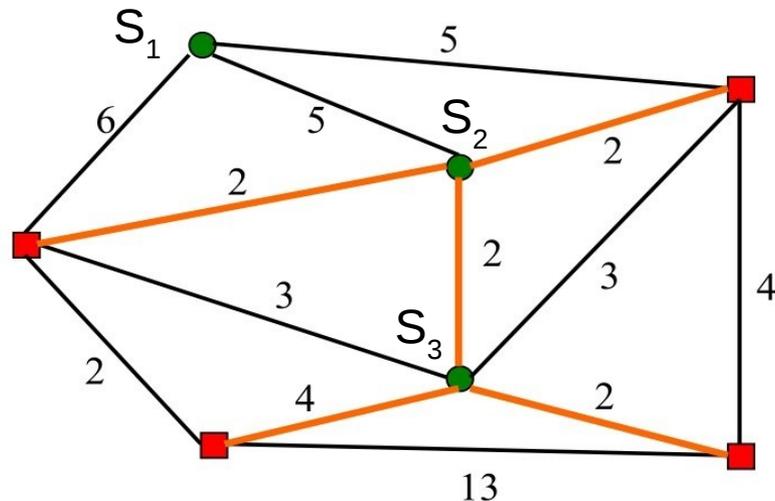
3-2) Caractéristiques et Propriétés d'un arbre de STEINER (minimal)

1 - Pour un même nombre de sommets *terminaux* et de *points de Steiner*, il existe **plus d'un** arbre de Steiner.



Pour les trois points de Steiner S_1, S_2 et S_3 , il existe un arbre de Steiner dont le « poids » total est :

$$2+3+4+2+4 = \mathbf{15}.$$



Pour les trois mêmes points de Steiner S_1, S_2 et S_3 , il existe un arbre de Steiner dont le « poids » total est plus petit :

$$2+2+2+4+2 = \mathbf{12}.$$

2 - La propriété angulaire : les angles formés par les arêtes d'un arbre de Steiner mesurent 120°

Déjà Cavalieri avait énoncé cette propriété des trois angles en T :

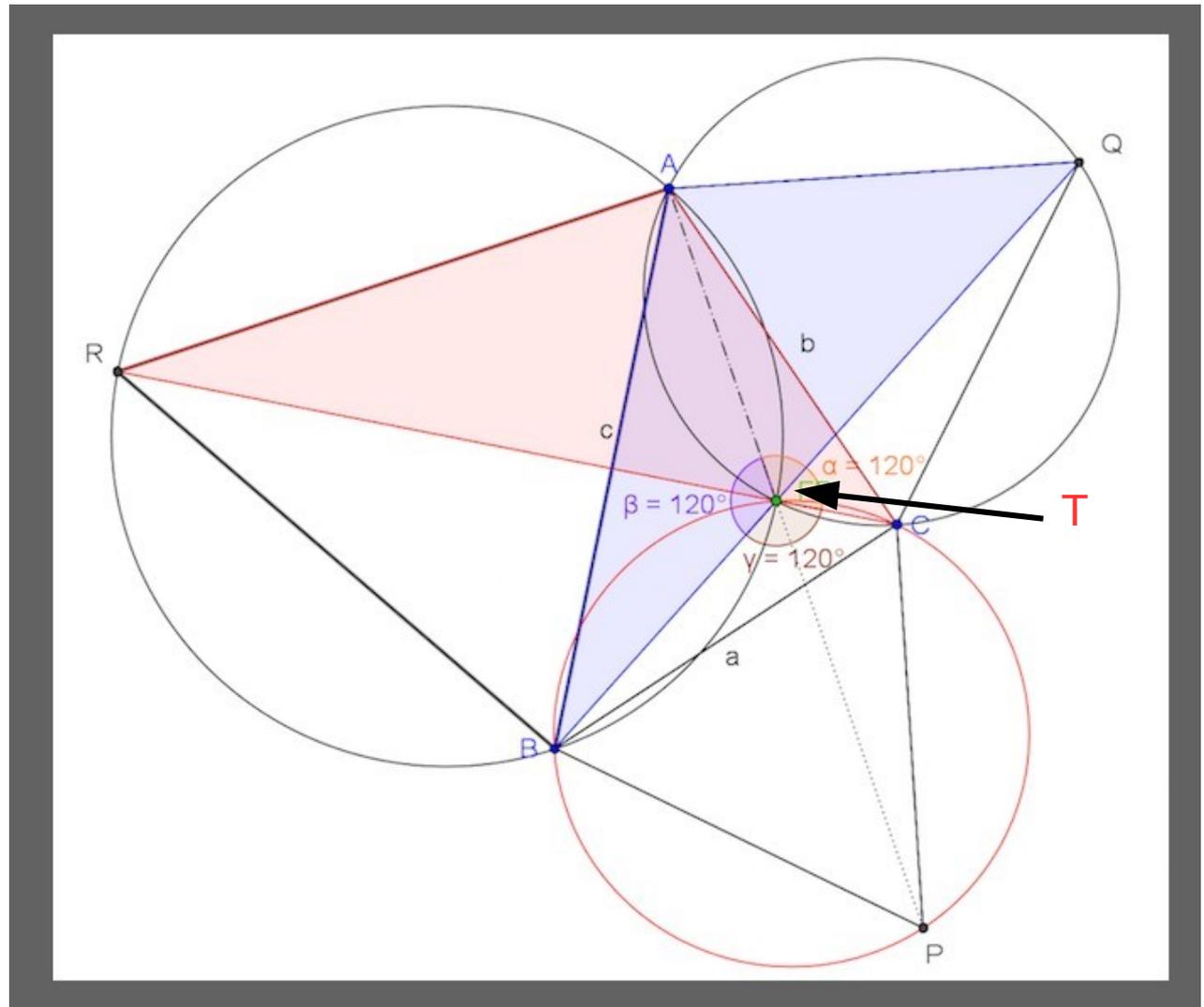
$$\alpha = \angle ATC,$$

$$\beta = \angle ATB$$

et

$$\gamma = \angle BTC$$

mesurent 120° .

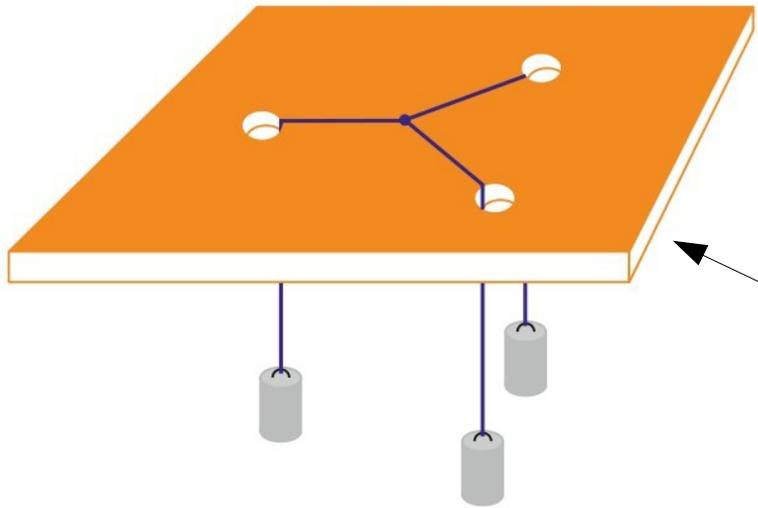


3 - Le degré des points de Steiner : Dans un arbre de Steiner, chaque *point de Steiner* est de degré $d=3$ (relié à 3 sommets)

3-3) Topologies de STEINER

On appelle **topologie** d'un arbre (de Steiner) la représentation des "connexions" (arêtes) entre les points *terminaux* P_1, \dots, P_n et les *points de Steiner* S_1, S_k .

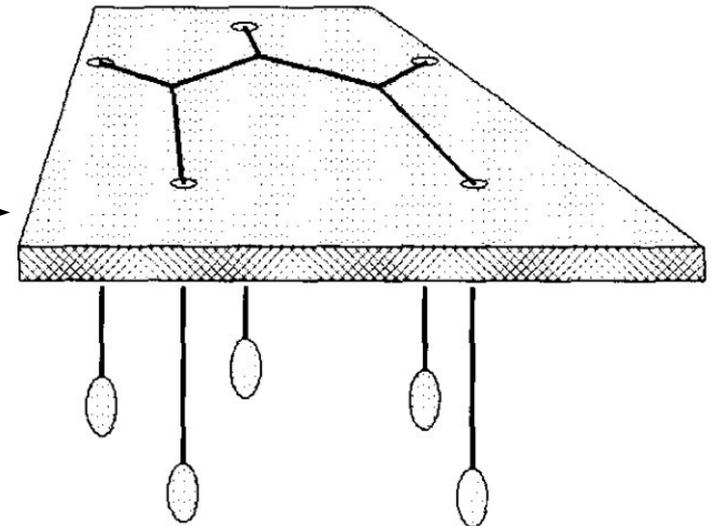
Attention ! Dans une topologie, ce sont les connexions qui sont spécifiées, pas le « lieu » des points de Steiner ! C'est bien là l'une des difficultés !



Pour concrétiser la notion de **topologie de Steiner**, on peut même « construire » une version « mécanique » d'un arbre de Steiner.

Par exemple dans le cas de **n=3** ...

... ou encore dans le cas de **n=5**



Dans ces deux cas, pour un nombre n de points *terminaux*, on a $n-2$ points de Steiner.

Les **topologies de Steiner** qui nous intéressent sont celles dans lesquelles il y a effectivement **$n-2$ points de Steiner** pour **n sommets terminaux**, d'après le « modèle » correspondant au cas de **$n=3$** résolu par Torricelli.

n	2^n	$f(n)$
1	2	0
2	4	0
3	8	1
4	16	3
5	32	15
6	64	105
7	128	945
8	256	10,395
9	512	135,135
10	1,024	2,027,025
11	2,048	34,459,425
12	4,096	654,729,075
13	8,192	13,749,310,575
14	16,384	316,234,143,225
15	32,768	7,905,853,580,625
16	65,536	213,458,046,676,875

Le problème de Steiner revient ainsi à trouver, parmi toutes les topologies de Steiner, celles dont la somme des distances est *minimale*.

Le nombre de **topologies** est une fonction **f** du nombre **n** de *terminaux* :

$$[1] \quad f(n) = \frac{(2n - 4)!}{2^{n-2}(n - 2)!}$$

... il augmente de façon *super-exponentielle* avec le nombre **n** de terminaux !

Petit intermède : on démontre la formule [1] par récurrence

La formule est vraie pour $n=3$: $f(3) = \frac{(2 \times 3 - 4)!}{2^{3-2}(3-2)!} = 1$ (c'est le cas du point de Torricelli, pour $n=3$)

Supposons la formule vraie pour n : $f(n) = \frac{(2n-4)!}{2^{n-2}(n-2)!}$

et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$:

$$f(n+1) = \frac{(2(n+1)-4)!}{2^{(n+1)-2}((n+1)-2)!} = \frac{(2n-2)!}{2^{(n-1)}(n-1)!}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(n+1) &= (2n-3) \cdot f(n) \\ &= (2n-3) \cdot \frac{(2n-4)!}{2^{n-2}(n-2)!} \\ &= \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!} \\ &= \frac{(2n-2) \times (2n-3)!}{(2n-2) \times 2^{n-2}(n-2)!} \\ &= \frac{(2n-2)!}{2 \times 2^{n-2} \cdot (n-1) \times (n-2)!} \\ &= \frac{(2n-2)!}{2^{n-1} \cdot (n-1)!} \end{aligned}$$

Algorithmique du Problème de Steiner. Approximation et Conjecture.

Quelques années après R. Courant, la recherche théorique se développe ...

En même temps que l'algorithmique.

4-1) Les algorithmes : de Melzak à GeoSteiner

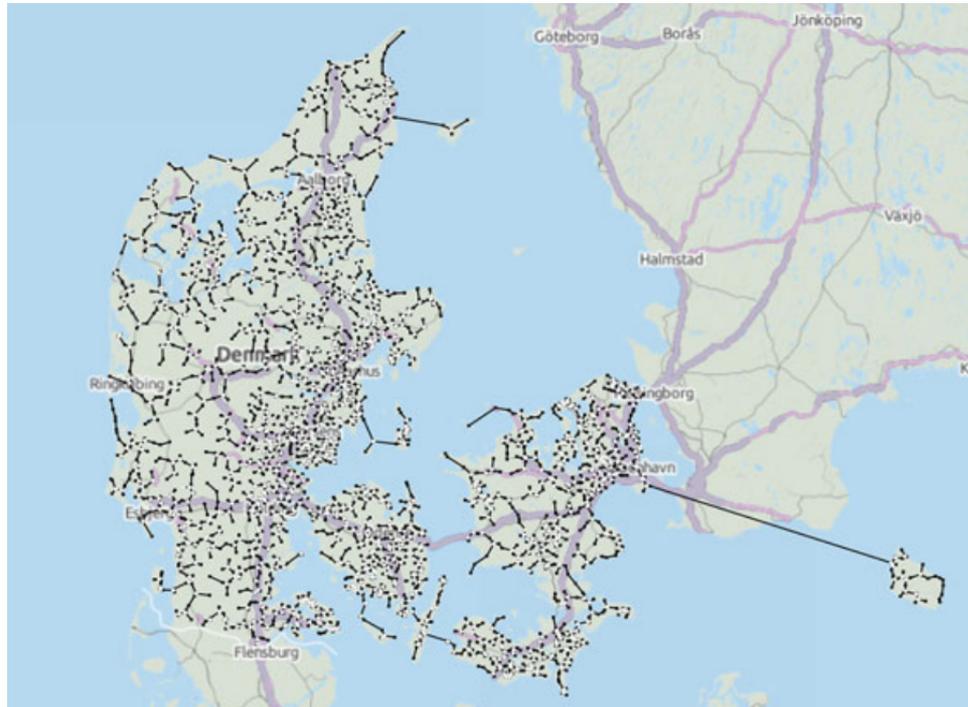
4-2) Le problème de l'arbre couvrant minimum (ACM/MST)

4-3) Approximation et Ratio de Steiner

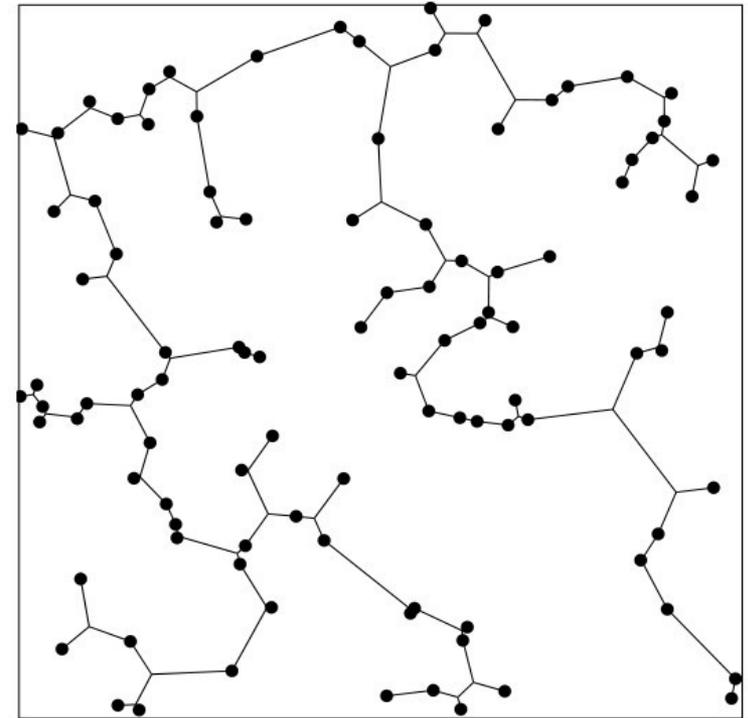
4-4) La conjecture de Gilbert et Pollack

4-1) Les algorithmes : de Melzak à GeoSteiner

La recherche d'un arbre de Steiner peut être très coûteuse en temps et en capacité de calcul ...



Arbre de Steiner minimal de $n=2741$ villes du Danemark, trouvé par GeoSteiner 4.0 (Brazil Marcus)



Arbre de Steiner minimal **euclidien** de $n=100$ terminaux

Dans l'algorithmique du problème de Steiner, on distingue :

- les *algorithmes exacts*, qui ont l'inconvénient d'être à *complexité exponentielle*,
- les (algorithmes) *heuristiques*, qui offrent une plus ou moins bonne *approximation* du problème de Steiner, mais ont l'avantage d'aboutir.

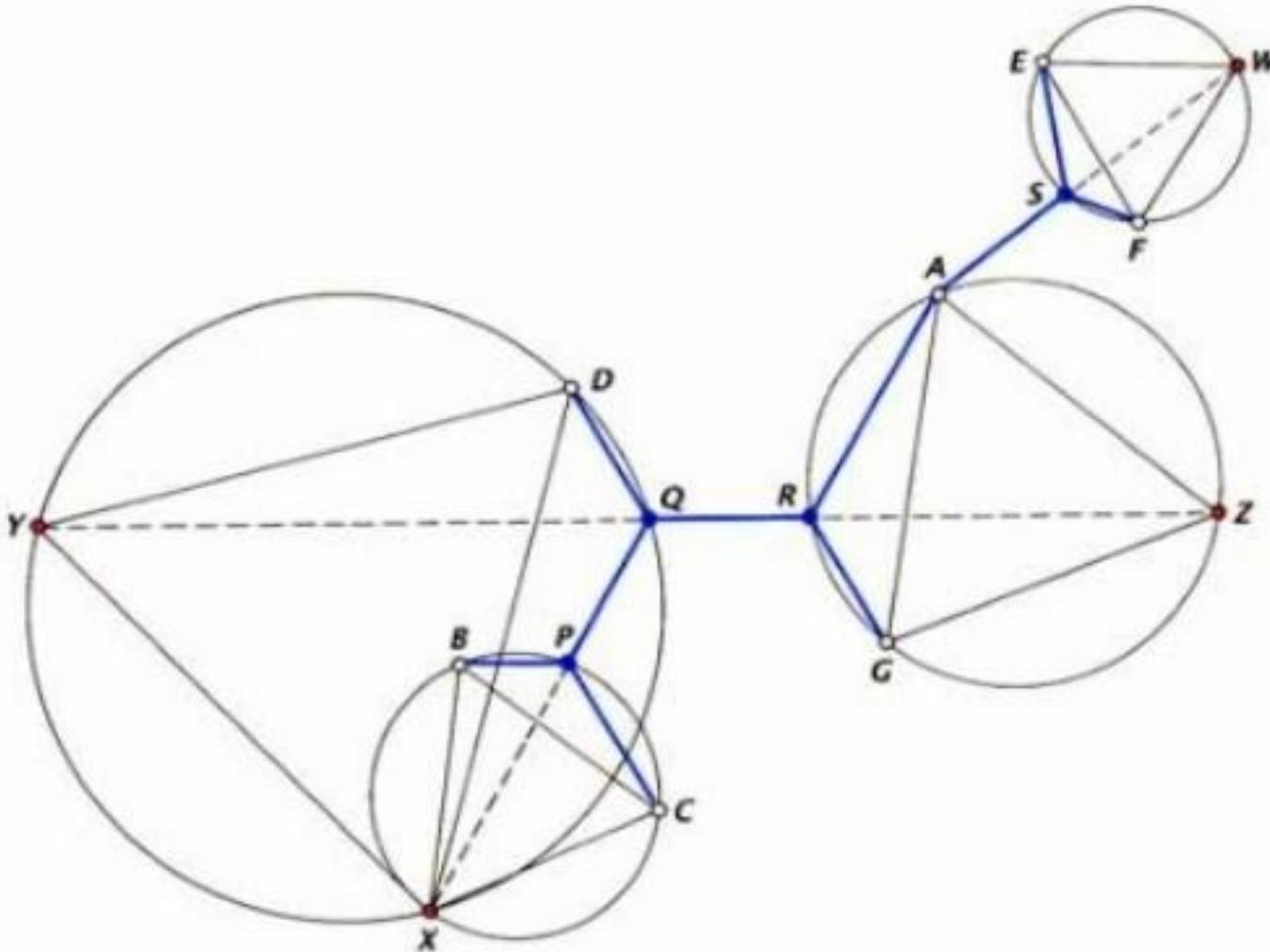
Dans la pratique (conception de « grands réseaux », tels que circuits routiers, installations électriques d'envergure, etc), on recherchera souvent à construire un réseau ***approximativement* minimal** ...

Que signifie le mot « *approximativement* » ?

Techniquement, cela veut dire qu'on dispose d'une suite de k algorithmes en *temps polynomial* telle que le $k_{i\text{ème}}$ algorithme trouve *un* arbre dont la longueur soit au plus égale à $1+\varepsilon_k$ fois la longueur de l'arbre minimum de Steiner, avec $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$.

4-1-1) L'algorithme de MELZAK (1961)

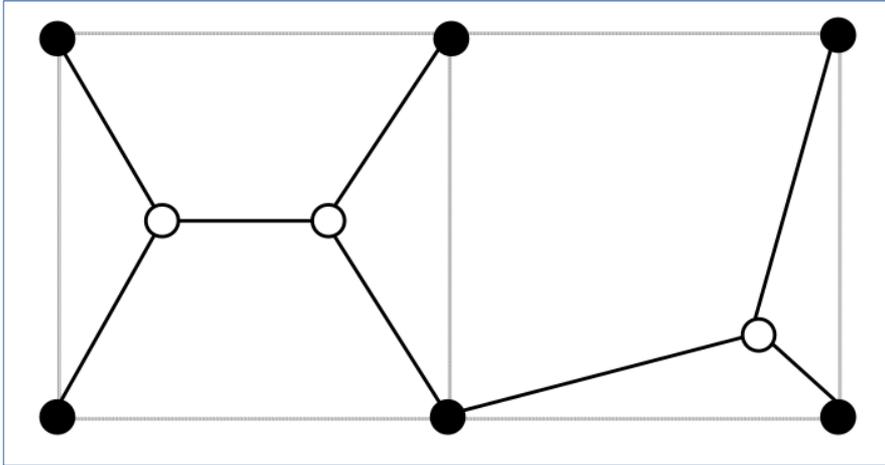
En **1961**, Z.A. **Melzak**, mathématicien polonais, publie le premier algorithme *exact* qui donne l'arbre minimum de Steiner, en théorie pour un nombre **n** quelconque de sommets.



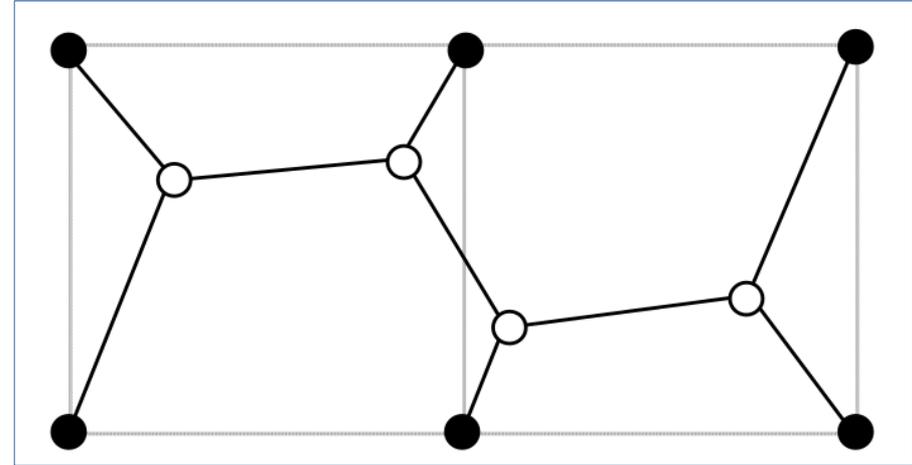
L'algorithme construit de proche en proche l'arbre minimal de Steiner ...

En pratique, c'est un algorithme lent. On ne peut l'appliquer qu'à un petit nombre de terminaux et seulement en dimension 2 (plan euclidien).

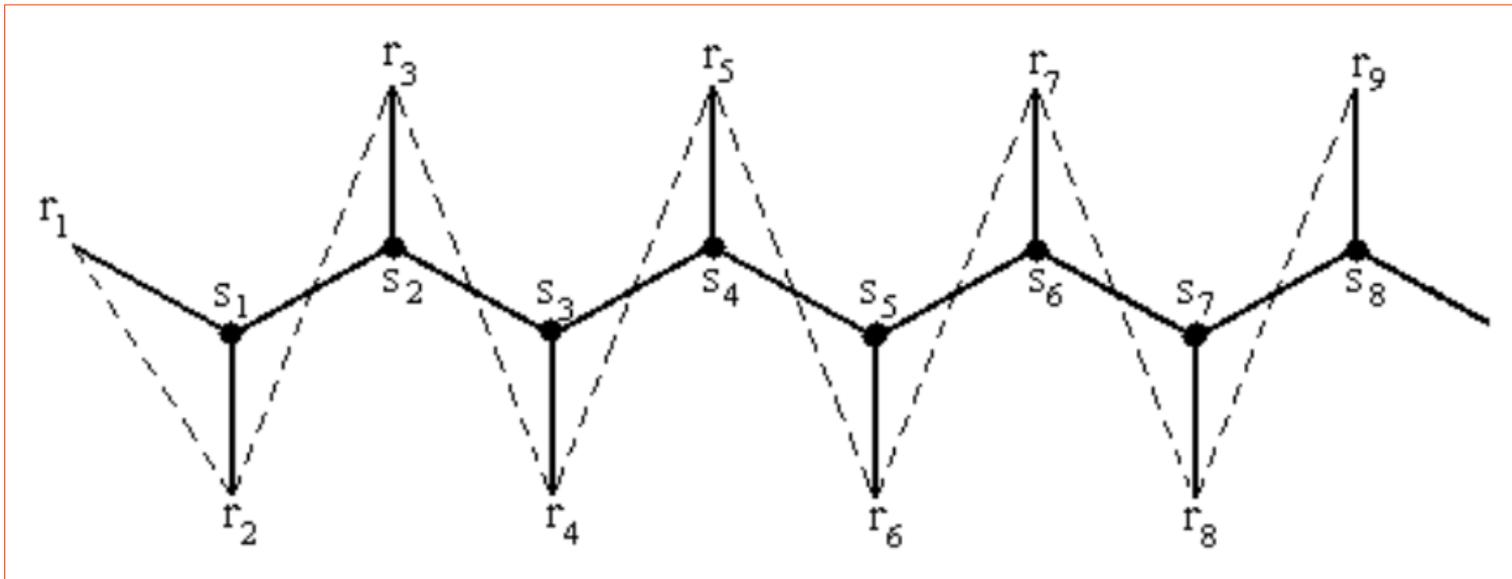
L'algorithme de Melzak fonctionne parce qu'il est possible d'obtenir un arbre de Steiner par **combinaison** d'arbres de Steiner plus petits ...



Combinaison d'arbres de Steiner pour un **carré** et un **triangle isocèle droit**.



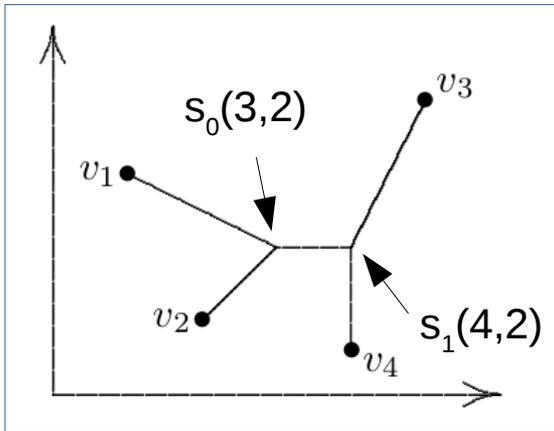
Un arbre de Steiner *plus court* pour le même ensemble de terminaux.



Autre combinaison d'arbres de Steiner.

4-1-2) L'algorithme Numérique de SMITH

L'algorithme numérique de **Smith** s'appuie sur un système d'équations linéaires de la forme ...



(Soothill G, Euclidean Steiner Problem)

$$x_k^{i+1} = \frac{\sum_j \frac{u_j^{i+1}}{\sqrt{[u_j^i - x_k^i]^2 + [v_j^i - y_k^i]^2}}}{\sum_j \frac{1}{\sqrt{[u_j^i - x_k^i]^2 + [v_j^i - y_k^i]^2}}}$$

$$y_k^{i+1} = \frac{\sum_j \frac{v_j^{i+1}}{\sqrt{[u_j^i - x_k^i]^2 + [v_j^i - y_k^i]^2}}}{\sum_j \frac{1}{\sqrt{[u_j^i - x_k^i]^2 + [v_j^i - y_k^i]^2}}}$$

Exemple : A la 1ère étape de l'algorithme, pour les terminaux $v_1(1,3)$, $v_2(2,1)$, $v_3(5,4)$, $v_4(4,0.6)$ et les points de Steiner $s_0(3,2)$ et $s_1(4,2)$, l'arbre de départ a pour longueur :

$$L^0 = \sqrt{(1-3)^2 + (3-2)^2} + \sqrt{(2-3)^2 + (1-2)^2} + \sqrt{(3-4)^2 + (2-2)^2} + \sqrt{(5-4)^2 + (4-2)^2} + \sqrt{(4-4)^2 + (0.6-2)^2} = 8.286.$$

Il faut résoudre ensuite les systèmes équations linéaires permettant de calculer les coordonnées des (x_k, y_k) des k points de Steiner en fonction des n terminaux

Pas plus efficace que celui de Melzak, l'algorithme de Smith a l'avantage d'être applicable en dimension $d > 2$.

4-1-3) Delaunay, Voronoï, Enveloppe Convexe et Triangulation au service de Steiner

Certains algorithmes s'appuient sur la technique de **triangulation**.

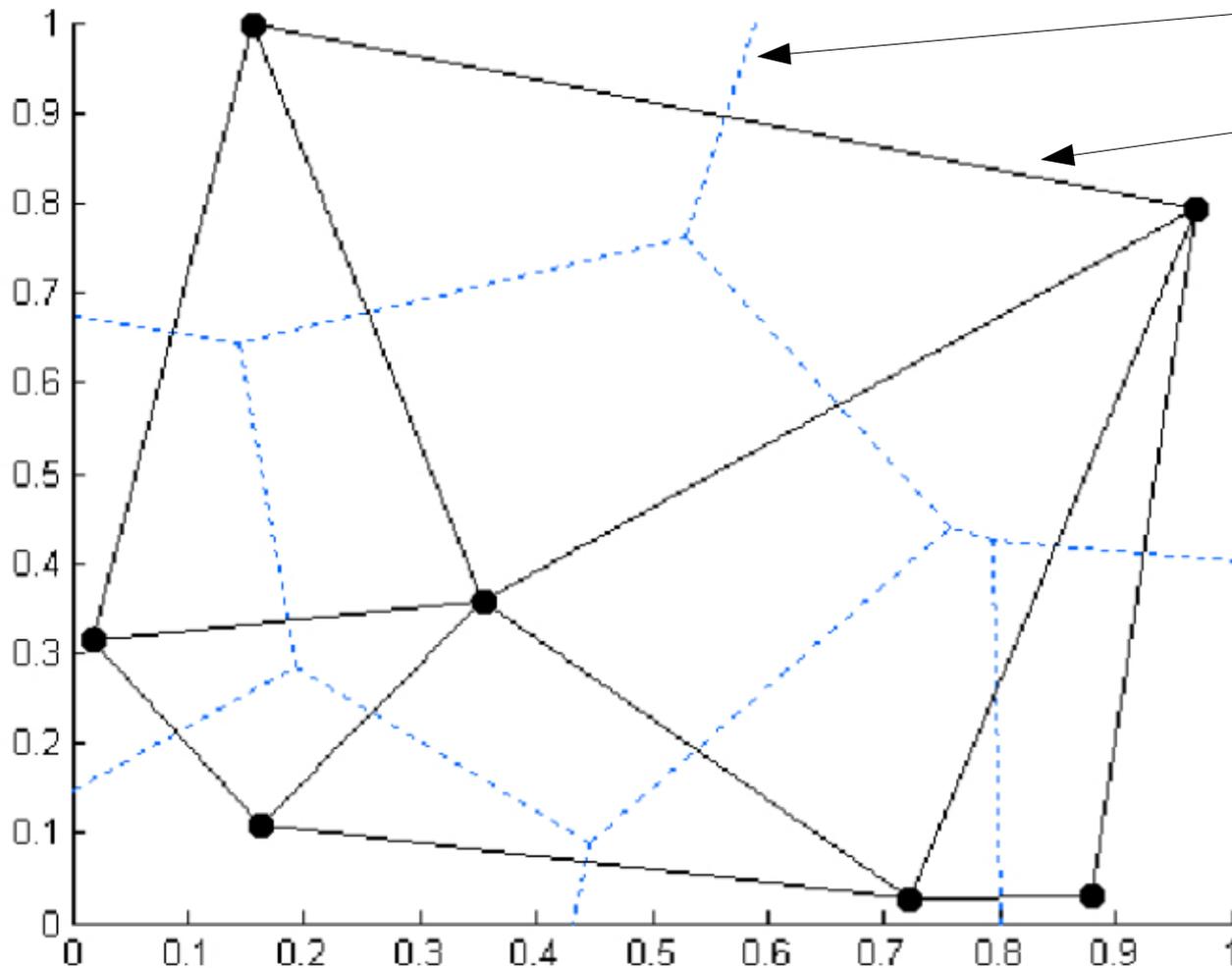


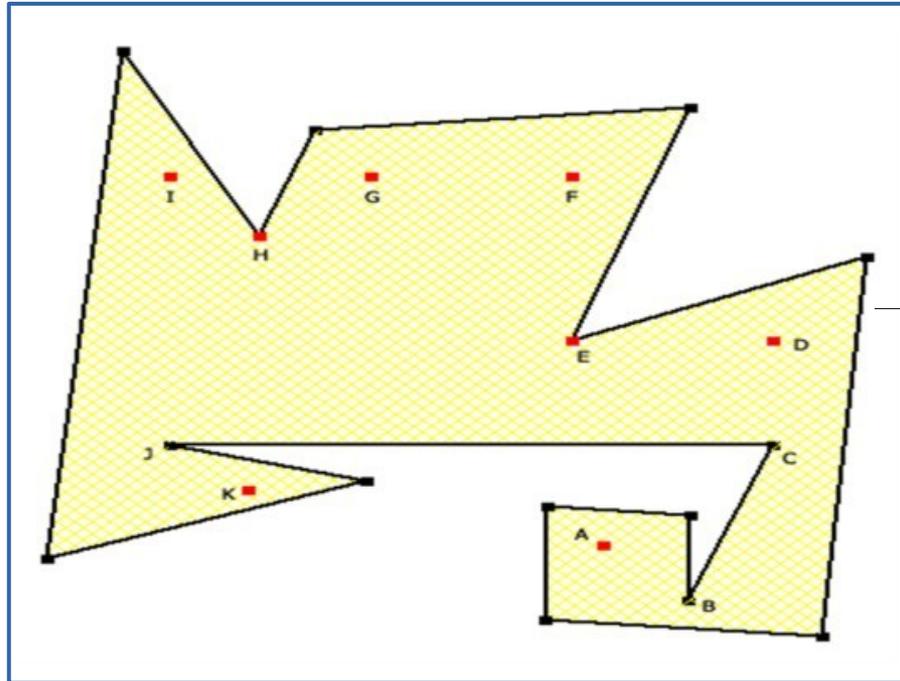
Diagramme de **Voronoi**
(traits en pointillés)

Triangulation de
Delaunay (traits pleins)

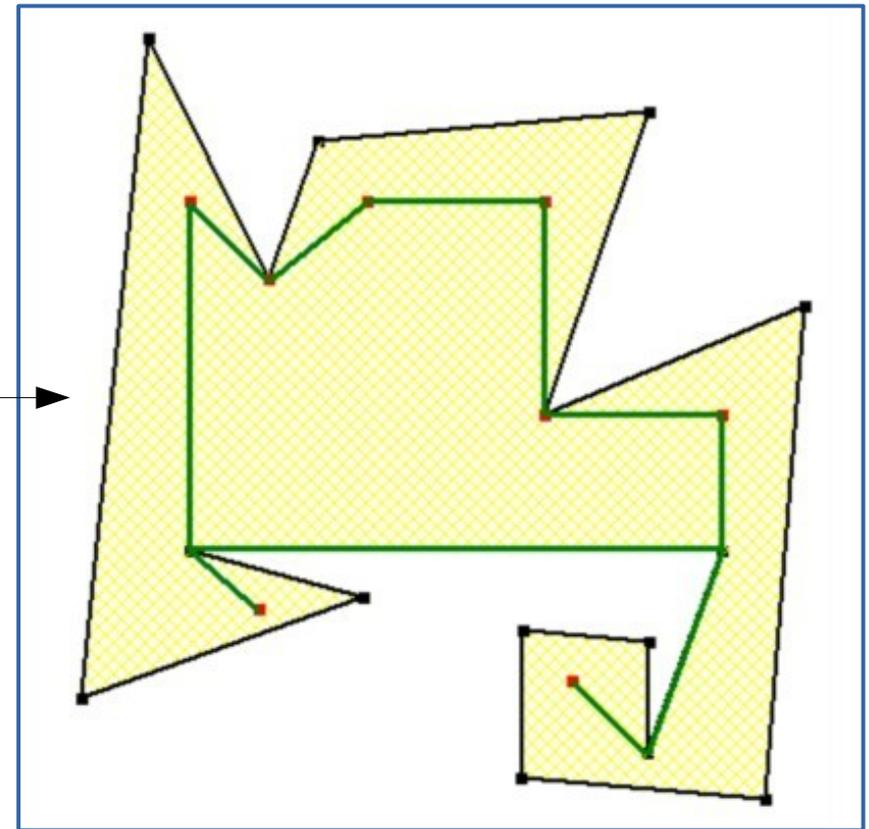
On peut montrer
que :

**Pour un
ensemble de n
terminaux, la
triangulation de
Delaunay contient
l'Arbre Couvrant
Minimum.**

Exemple : Etant donné un *polygone* de **m** sommets et **n** terminaux, ...



1) Polygone de m sommets et n terminaux

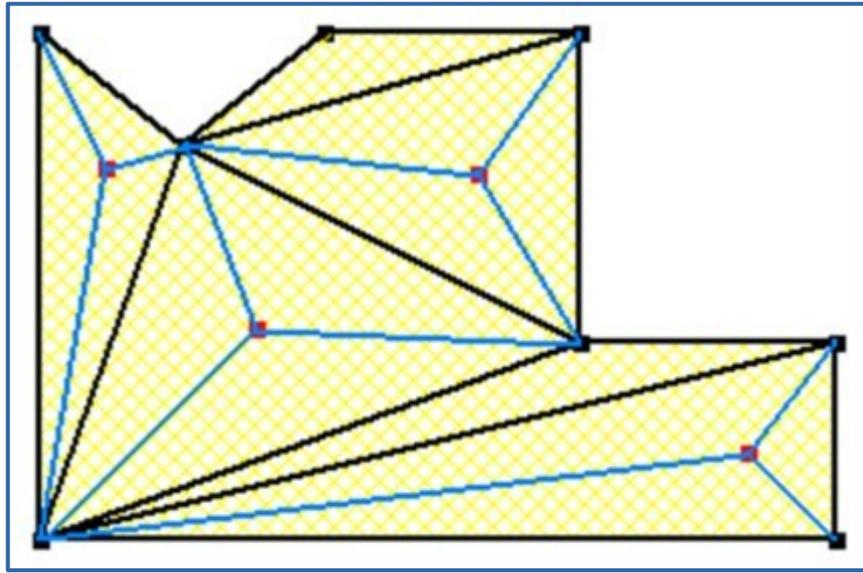


2) Enveloppe convexe

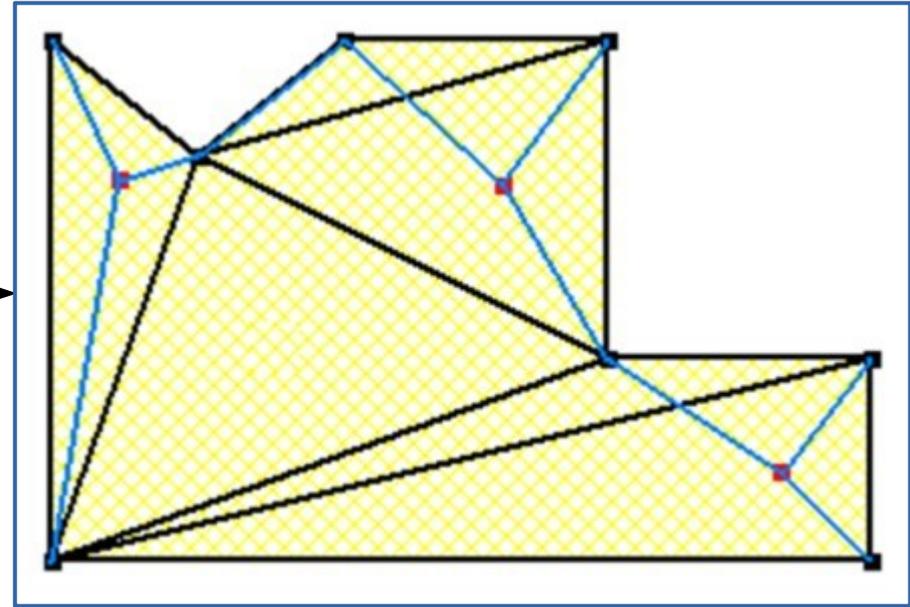
... on détermine son *enveloppe convexe* ...

... à laquelle on applique un *algorithme de triangulation* ...

... par la méthode de Torricelli, on obtient le *point de Steiner* (de Torricelli) associé à chacun des triangles, ...



3) Points de Steiner obtenus dans chacun des triangles

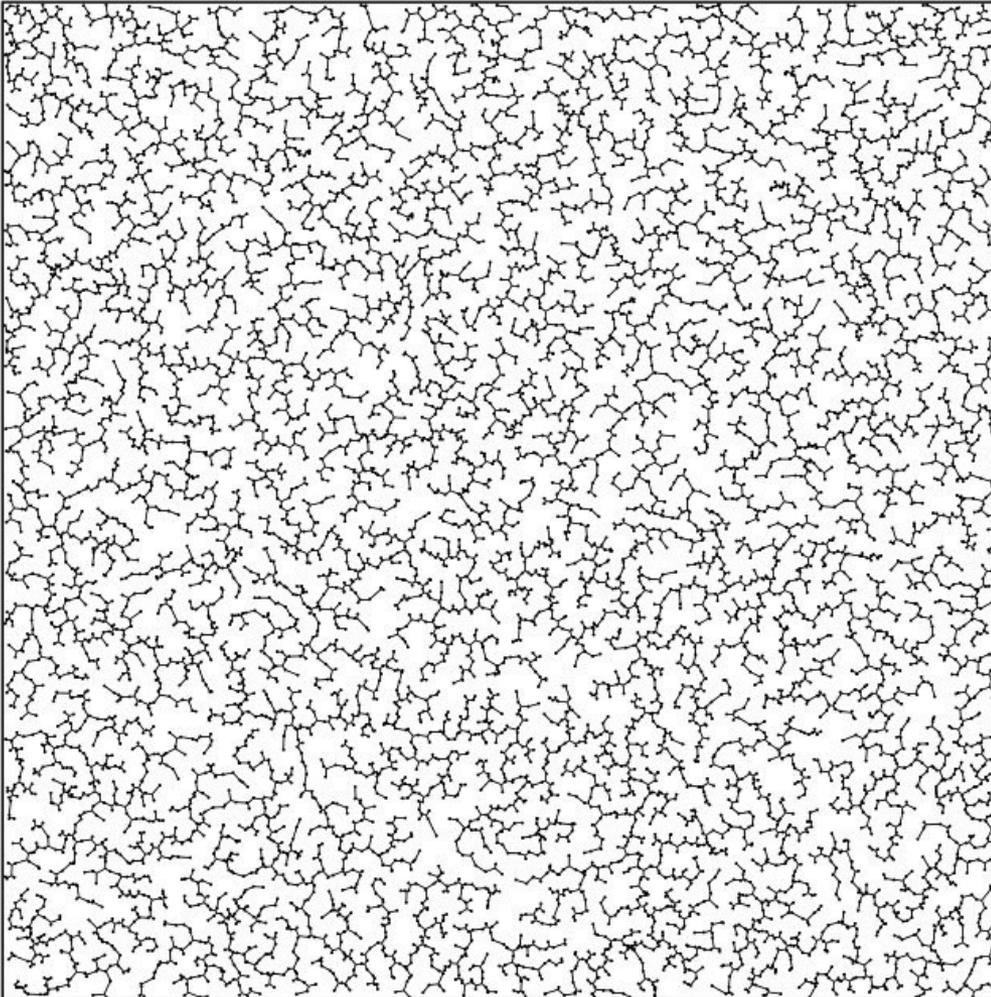


4) Arbre de Steiner Minimum

... par un dernier algorithme on détermine l'**Arbre de Steiner Minimum**.

4-1-4) L'algorithme et le Logiciel GEOSTEINER

De nombreux algorithmes, exacts ou non, ont été élaborés depuis 1960. Aujourd'hui, l'un des plus efficaces reste l'algorithme exact **GeoSteiner**, mis au point, de 1997 à 2001, par Warme, Winter et Zachariasen.



Le logiciel **GeoSteiner** peut être librement chargé et expérimenté sur un ordinateur personnel.

Arbre de Steiner Minimum (euclidien) obtenu avec
GEOSTEINER en 325 secondes :
n=10 000 points, longueur=62.92478602883902

4-2) Le problème de l'Arbre Couvrant Minimum

Encore un petit peu de vocabulaire sur les graphes avant de revenir à la recherche théorique :

On appelle **arbre couvrant** d'un graphe *complet* G , un sous-graphe de G qui est un *arbre* connectant *tous* les sommets de G .

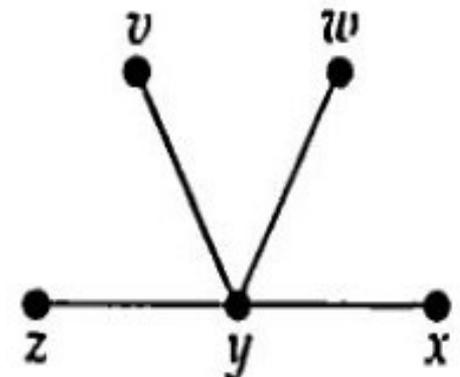
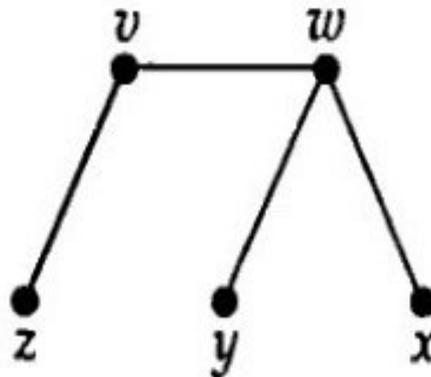
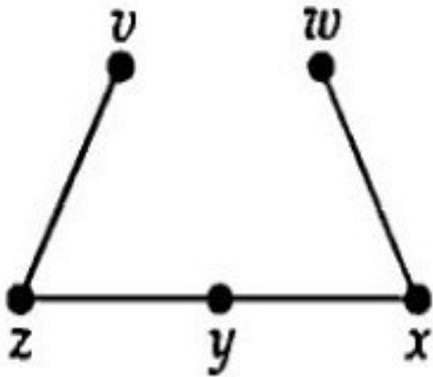
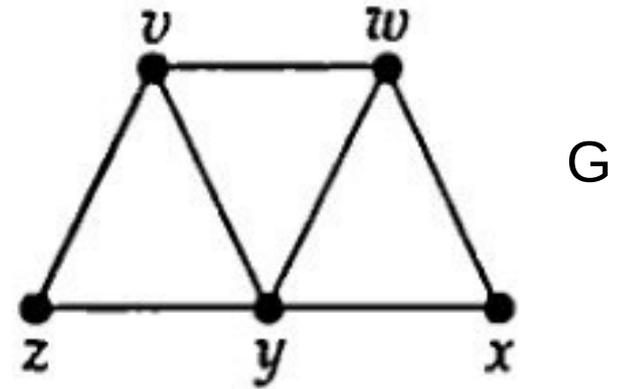
Le « plus petit » des arbres couvrants d'un graphe « valué » G s'appelle l'**arbre couvrant minimum (ACM)** de G ; c'est l'arbre dont le « poids » total est minimum.

Un Arbre Couvrant Minimum, c'est un arbre de Steiner ... sans point de Steiner, avec seulement des points terminaux ...

... Le problème de l'ACM va jouer un rôle important dans la recherche d'une solution *approchée* du problème de Steiner ...

Exemple d'arbres couvrants d'un graphe complet

A partir du graphe complet G à $n=5$ sommets, on obtient, entre autres, les 3 arbres couvrants $A1$, $A2$ et $A3$ ci-dessous :



Le nombre **N** d'arbres couvrants d'un graphe G de **n** sommets est égal au nombre d'arbres *étiquetés* de **n** sommets qu'on peut construire, soit : n^{n-2} (théorème de **Cayley**).

Le nombre **N** augmente donc très rapidement :

... suivant la
formule de
Cayley :

$$N=n^{n-2}$$

n=nombre de sommets	Nombre d'arbres non étiquetés	N=Nombre d'arbres étiquetés
1	1	1
2	1	1
3	1	3
4	2	16
5	3	125
6	6	1296
7	11	16807
8	23	262144
9	47	4782969

Le calcul de l'arbre couvrant minimum d'un graphe G est réalisable, grâce à deux algorithmes assez anciens, mais encore en usage aujourd'hui :

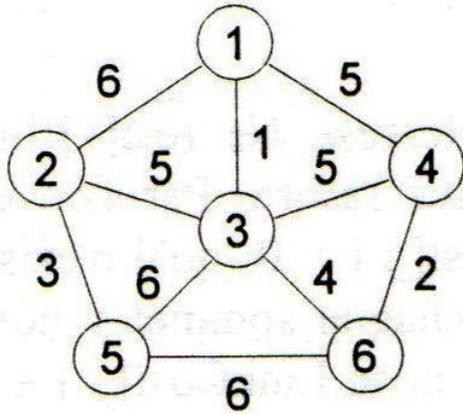


Joseph KRUSKAL (1928-2010) met au point, en **1956**, un algorithme de recherche de l'arbre couvrant de poids minimal dans un graphe : c'est **l'algorithme de KRUSKAL**.



En **1957**, le collègue de J. Kruskal, Robert PRIM (né en septembre 1921) met au point un *autre* algorithme ayant le même objectif : c'est **l'algorithme de PRIM**.

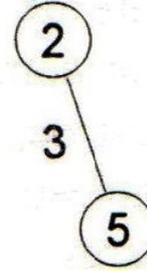
Exemple d'application de l'algorithme de PRIM



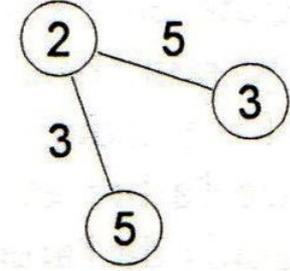
Graphe de départ



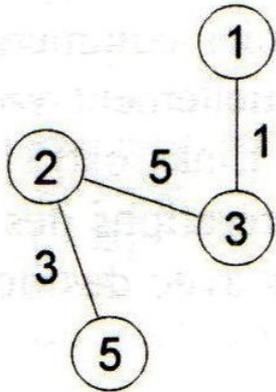
Arbre initial



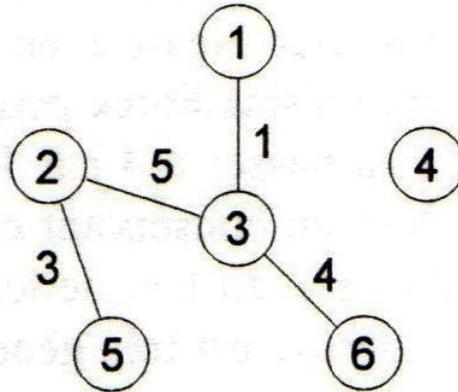
Première arête



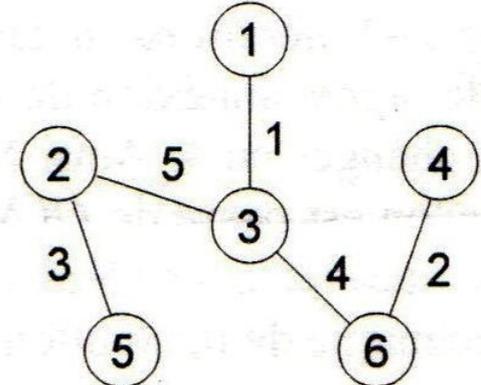
Deuxième arête



Troisième arête

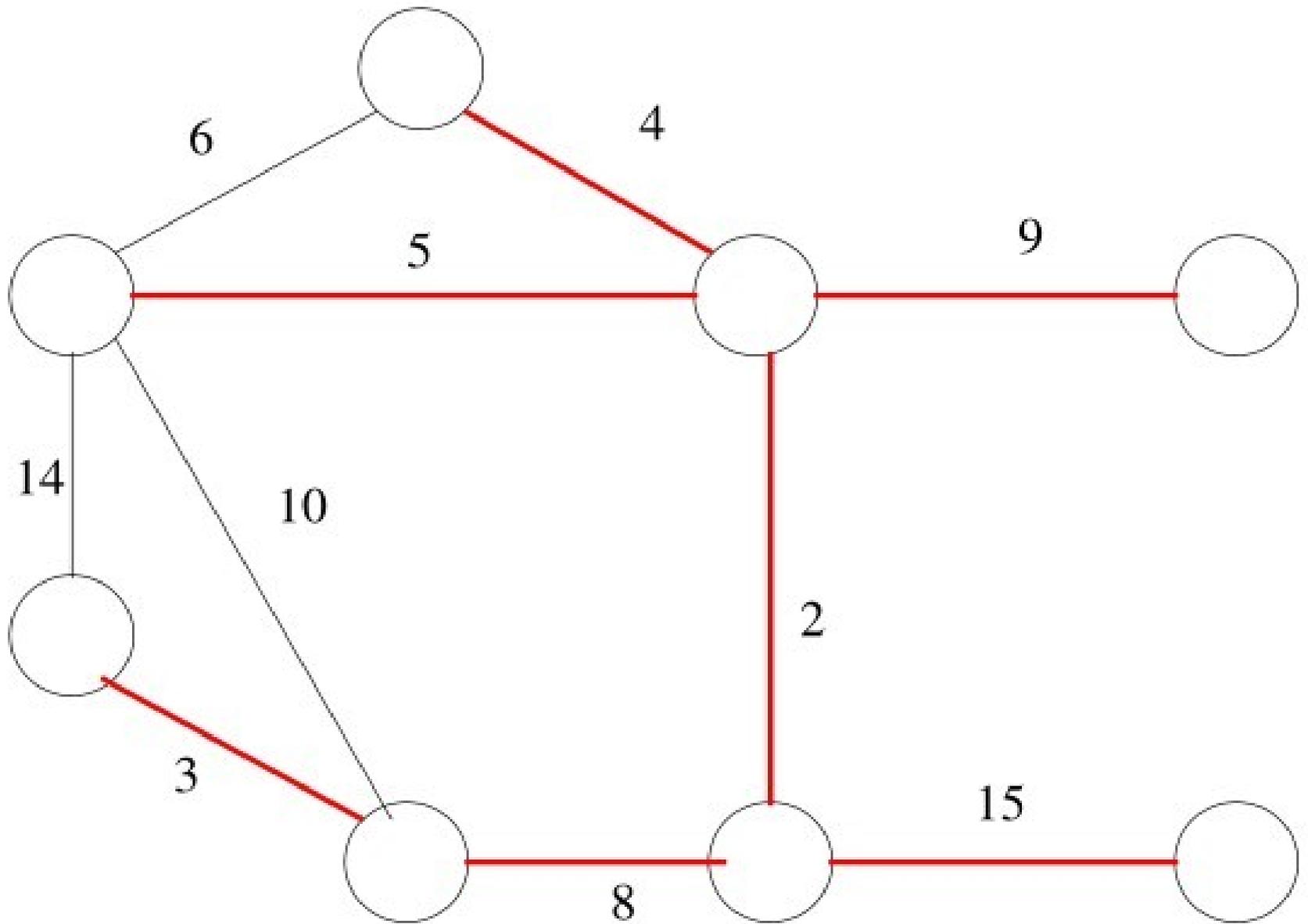


Quatrième arête



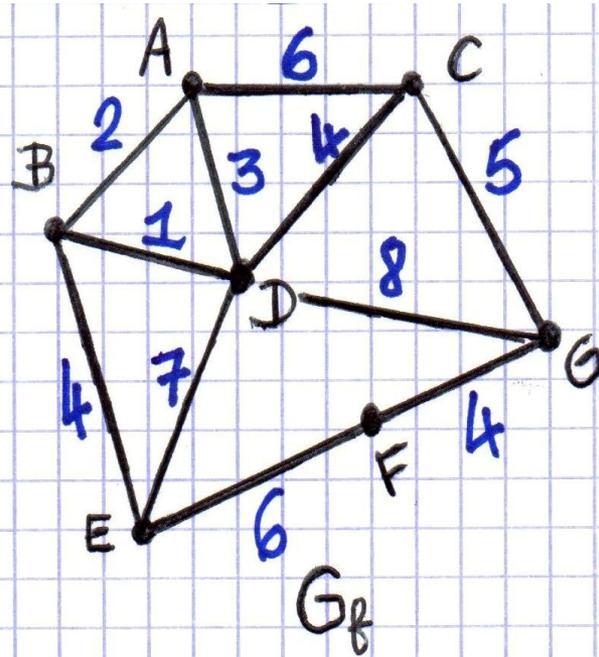
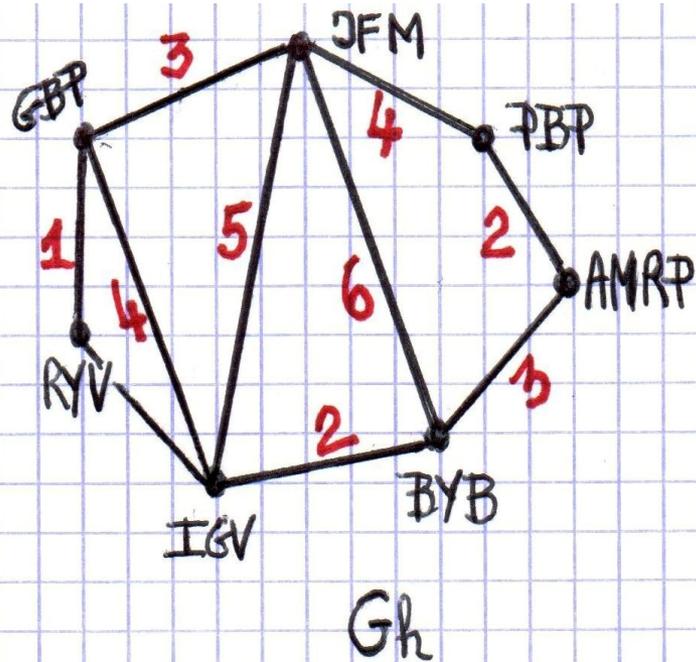
Cinquième arête

Un autre exemple d'arbre couvrant minimum



Un exemple « concret » d'application de l'algorithme de PRIM : l'arbre des « connaissances »

Quelle relation entre l'Arbre Couvrant Minimum (ACM) et l'Arbre de Steiner Minimum (ASM) ?
Un graphe valué complet (G_h ou G_f) représente les « connaissances » d'un homme ou d'une femme qui veut optimiser ses rendez-vous hebdomadaires en ville.



Pour obtenir l'ACM des graphes G_h ou G_f , il faut :

- choisir un *terminal* de départ ;
- appliquer à G_h ou à G_f un algorithme de *Prim*.

Le problème se complique dans la réalité si une « nouvelle connaissance » vient à s'ajouter !

Toute nouvelle connaissance s'interprète comme un **point de Steiner** pour lequel il faut trouver une topologie optimale !

4-3) L'Arbre Couvrant Minimum (ACM/MST) comme approximation de l'Arbre de Steiner Minimum (ASM/SMT)

Or on a démontré que :

Le problème de l'Arbre de Steiner Minimum est NP-Difficile.

On peut même montrer que :

Il est NP-Difficile de décider si un ensemble donné de points du plan a un Arbre de Steiner de longueur inférieure à une longueur donnée.

On est donc conduit à rechercher une *approximation* de l'Arbre de Steiner Minimum. Pour un graphe G donné de n sommets, l'Arbre Couvrant Minimum apparaît comme une assez bonne solution.

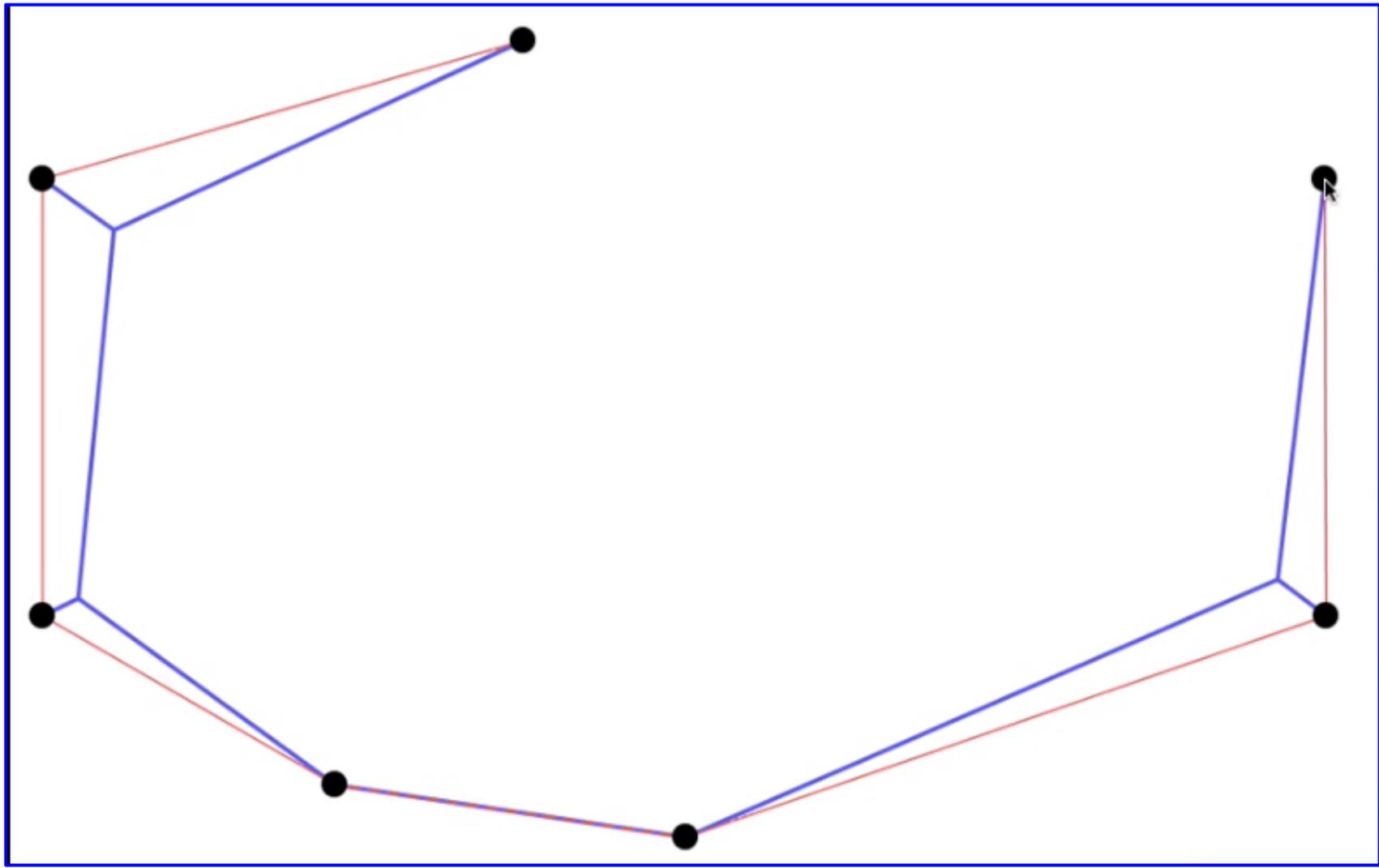
On a d'abord montré que l'approximation de l'Arbre de Steiner Minimum est bornée inférieurement :

Dans tout espace métrique, l'Arbre Couvrant Minimum est au plus 2 fois plus long que l'Arbre de Steiner Minimum.

Puis on a montré, à l'aide d'une programmation informatique, comment l'Arbre Couvrant Minimum se rapproche de l'Arbre de Steiner Minimum ...

ACM

ASM

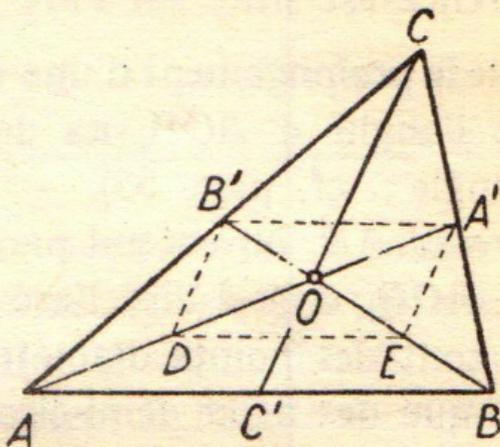


4-4) Ratio de Steiner - La Conjecture de Gilbert-Pollack

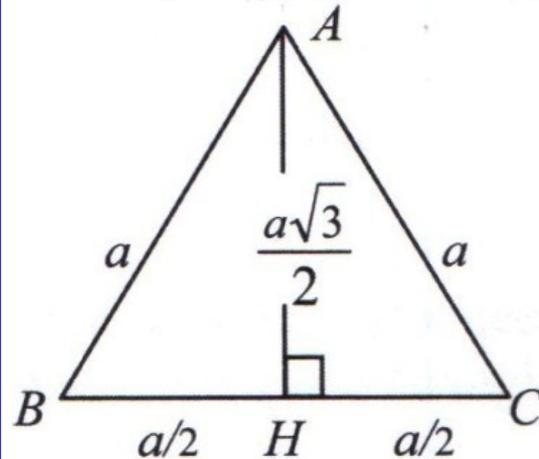
4-4-1) Le Ratio de Steiner

Une question demeure : que vaudrait une *approximation* de l'Arbre de Steiner Minimum (**ASM**) à l'aide de l'Arbre Couvrant Minimum (**ACM**) ? Existe-t-il une *borne* calculable ?

On appelle **Ratio de Steiner** le rapport : $\rho = \text{longueur(ASM)} / \text{longueur(ACM)}$



Les médianes de ABC se coupent en O et :
 $OA = 2/3$ de AA'
 $OB = 2/3$ de BB'
 $OC = 2/3$ de CC'



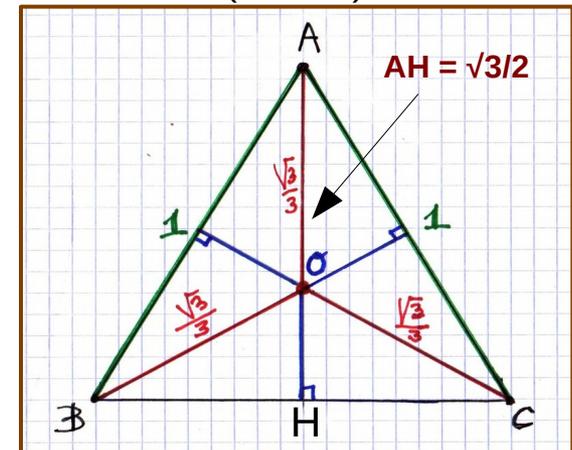
$$AH^2 = AB^2 - BH^2 \quad \text{et} \quad BH = \frac{a}{2}$$

$$\text{d'où} \quad AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\text{et} \quad AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Si $a=1$ (le triangle équilatéral ABC est unitaire) alors : $AH = \sqrt{3}/2$

Chacune des arêtes OA, OB et OC vaut $2/3$ de AH, donc $\sqrt{3}/3$ et le réseau **AOBC** (en rouge) mesure $\sqrt{3}$, alors que le réseau **ABC** (en vert) mesure 2 :



4-4-2) La Conjecture de Gilbert-Pollack dans l'espace euclidien

En **1968**, Gilbert et Pollak formulent une *conjecture* concernant la longueur d'un arbre de Steiner dans tout ensemble de **n** points du *plan euclidien* :

Conjecture de Gilbert et Pollak :

Le **Ratio de Steiner** est au plus égal à :

$$\rho = \text{longueur(ASM)} / \text{longueur(ACM)} = \sqrt{3/2}$$

Comme $\sqrt{3/2} \approx 0,866$, cette conjecture signifie que :

La *plus petite longueur* d'un arbre de Steiner ne représentera jamais moins de **86,6%** de la longueur de l'arbre couvrant minimum correspondant !

Autrement dit :

Avec un arbre de Steiner, le *gain maximum sur la longueur d'un réseau* ne dépassera pas **13,4%** !

Exemple : la preuve de la conjecture pour $n=3$, ... c'est le résultat de Torricelli.

Soit S le Point de Torricelli du triangle ABC .

Supposons que : $|AS| = \min \{|AS|, |BS|, |CS|\}$.

$$L_s(A,B,C) = AS + BS + CS$$

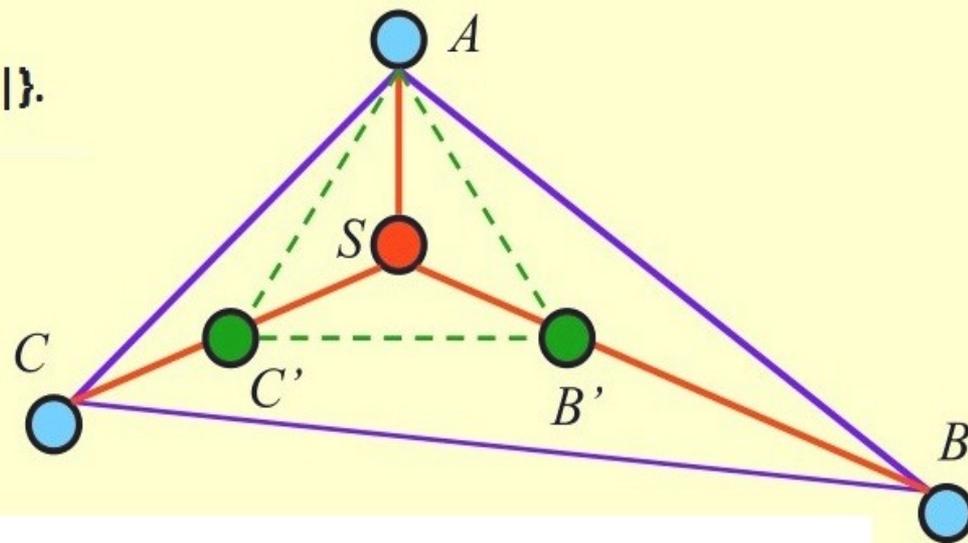
$$= AS + B'S + C'S + BB' + CC'$$

$$= L_s(A,B',C') + BB' + CC'$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} (AB' + AC') + BB' + CC'$$

$$\geq \frac{\sqrt{3}}{2} (AB' + BB' + AC' + CC')$$

$$\geq \frac{\sqrt{3}}{2} (AB + AC) = \frac{\sqrt{3}}{2} L_m(A,B,C)$$



GILBERT et POLLACK - $n = 3$ (1968)

(Du Ding-Zhu, « A Proof of the Gilbert-Pollak Conjecture on the Steiner Ratio »)

La conjecture est démontrée :

- en 1978, pour $n = 4$ (Pollak)
- en 1985, pour $n = 5$ (Du, Hwang et Yao)
- en 1991, pour $n = 6$ (Rubinstein et Thomas)

En **1992**, on annonce que :

La Conjecture de Gilbert-Pollack (GB) est démontrée
... *pour tout n* !

Malheureusement, ...

Assez récemment, une faille aurait été trouvée
dans la démonstration !

De plus, on a montré que la conjecture GB
n'est pas vérifiée en dimension $d \geq 3$

Quoi qu'il en soit, la recherche continue ... Plusieurs voies sont possibles pour traiter le problème de Steiner :

- On change de **dimension** dans l'espace métrique choisi ;
- On change d'**espace métrique** : la **distance** entre terminaux est définie autrement ;
- On change de **méthode**.

5

2000 ...

Extension du domaine de la recherche.

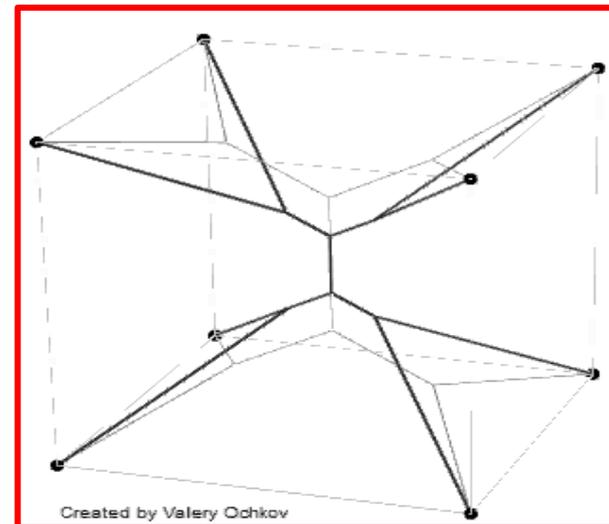
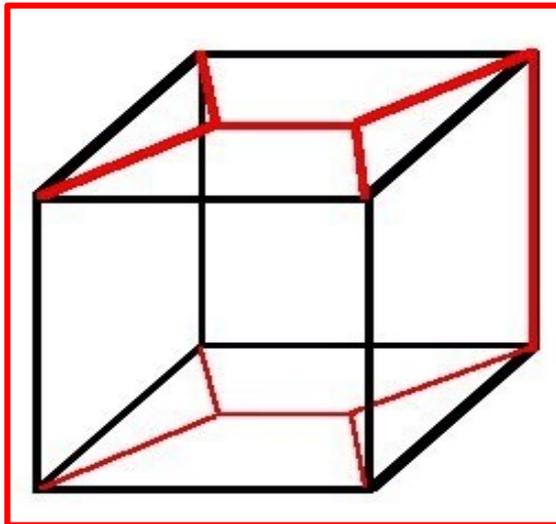
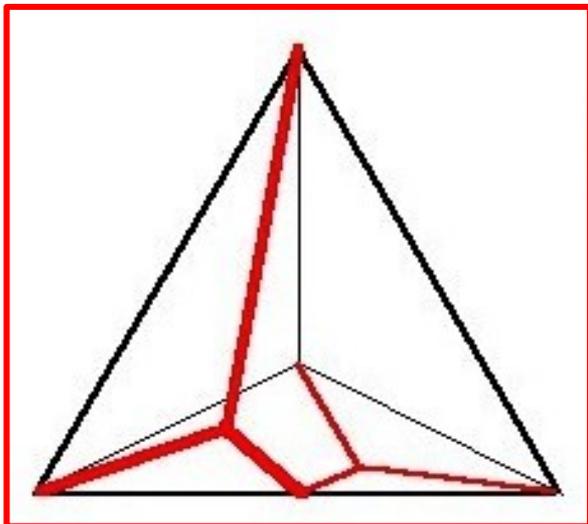
5-1) Changement de Dimension dans l'espace euclidien

Le plus connu des espaces métriques est l'**espace euclidien**, celui où la distance $d(x,y)$ entre deux terminaux x et y est calculée par application du **théorème de Pythagore**. Dans le plan cartésien, on calcule la distance entre deux points :

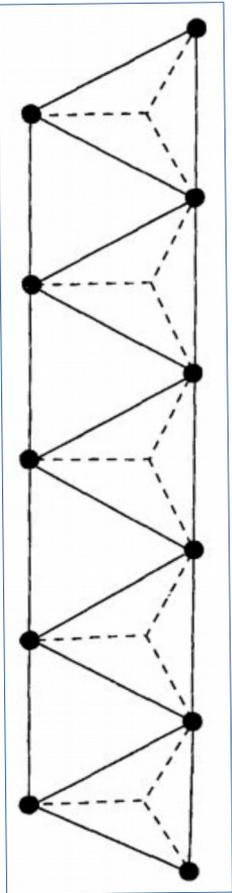
$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Cette « distance » est celle du problème initial de Fermat-Torricelli.

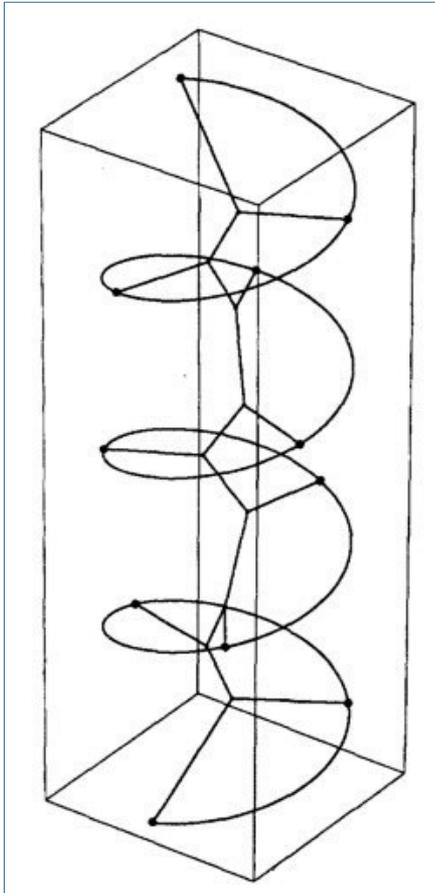
On peut imaginer des exemples d'arbres de Steiner dans l'espace euclidien (d=3) :



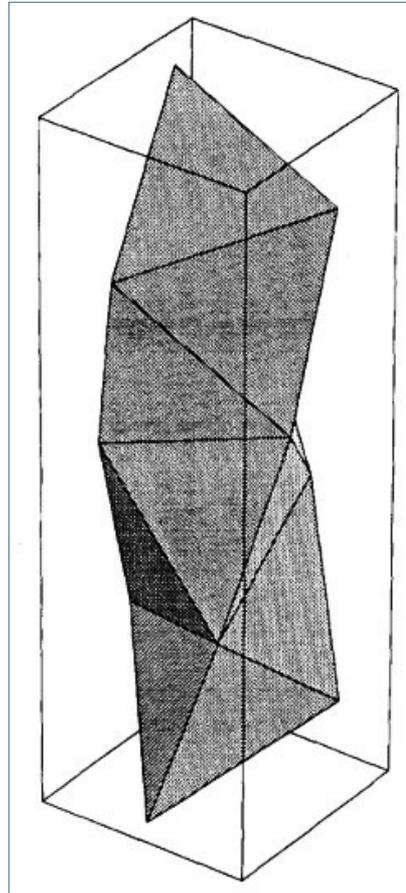
« Serpentins » de Steiner dans l'espace euclidien ($d=3$)



(1)



(2)

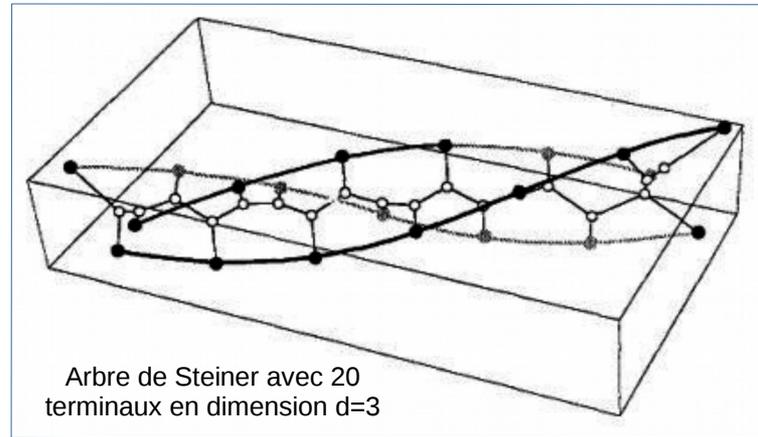


(3)

(Smith Warren, Smith MacGregor, On the Steiner Ratio in 3-Space)

Ensemble de points terminaux prenant la forme de serpentins en dimension $d=2$ ou $d=3$:

- (1) 12 points en dimension $d=2$
- (2) 11 points en dimension $d=3$
- (3) 11 points en dimension $d=3$, sous la forme de 8 tétraèdres réguliers



Arbre de Steiner avec 20 terminaux en dimension $d=3$

Ces représentations en 2D ou 3D sont appelées « **d-ensemble** de points » (ang : **d-sausage**). Elles font l'objet de diverses conjectures ...

On les trouve notamment dans les applications de la chimie ou de la biologie ...

5-2) Distance Rectilinéaire ou de Manhattan et Problème de Steiner

Problème : construire dans le plan euclidien un réseau de longueur minimale reliant n terminaux par des « segments » *horizontaux* ou *verticaux*.
Le problème de Steiner prend alors le nom de **problème de Steiner rectilinéaire**.

L'**espace métrique rectilinéaire** est caractérisé par la **distance rectilinéaire**. On l'appelle aussi **distance de Manhattan** ou **distance du chauffeur de taxi** ou encore **L1-distance**.

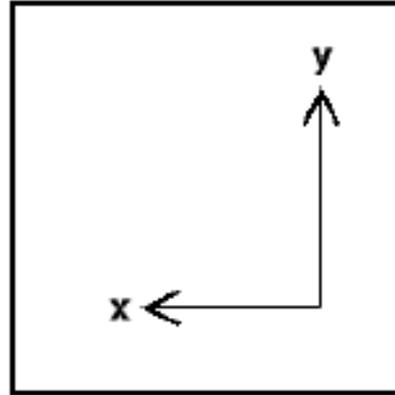
N.B. : c'est un cas particulier de la distance de Minkowski d'ordre p entre deux points x_i et y_i :

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

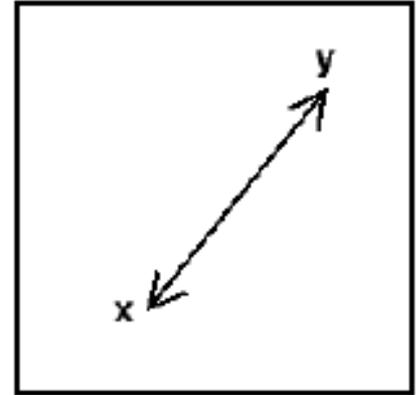
La **distance rectilinéaire** entre deux points du plan, $P(p_x, p_y)$ et $Q(q_x, q_y)$ vaut :

$$|pq| = |p_x - q_x| + |p_y - q_y|$$

i.e. la *somme des distances* dans chacune des deux dimensions.



Distance de Manhattan



Distance Euclidienne

$$d = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

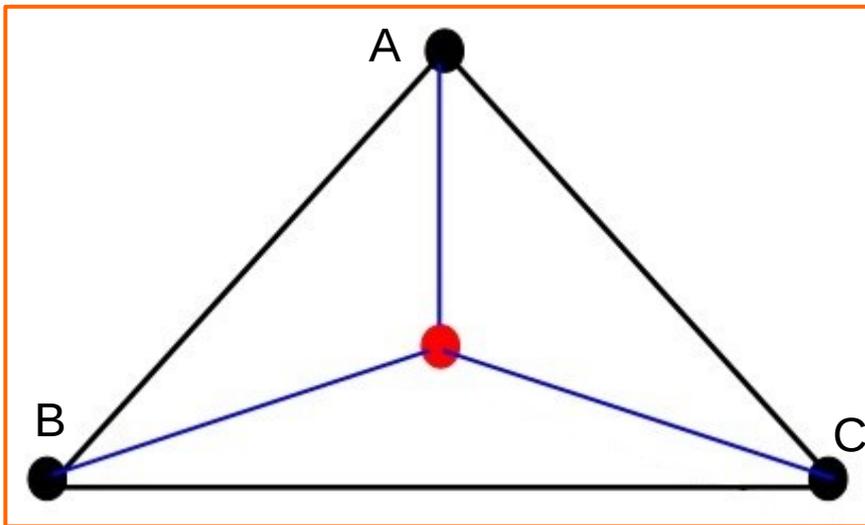
Exemple : La distance de Manhattan entre les points $P(1,4,2,3)$ et $Q(1,3,4,1)$ vaut :

$$|1-1| + |4-3| + |2-4| + |3-1| = 0 + 1 + 2 + 2 = 5$$

Dans la métrie rectilinéaire, on retrouve les notions :

- d'arbre couvrant minimum ;
- d'arbre de Steiner minimum.

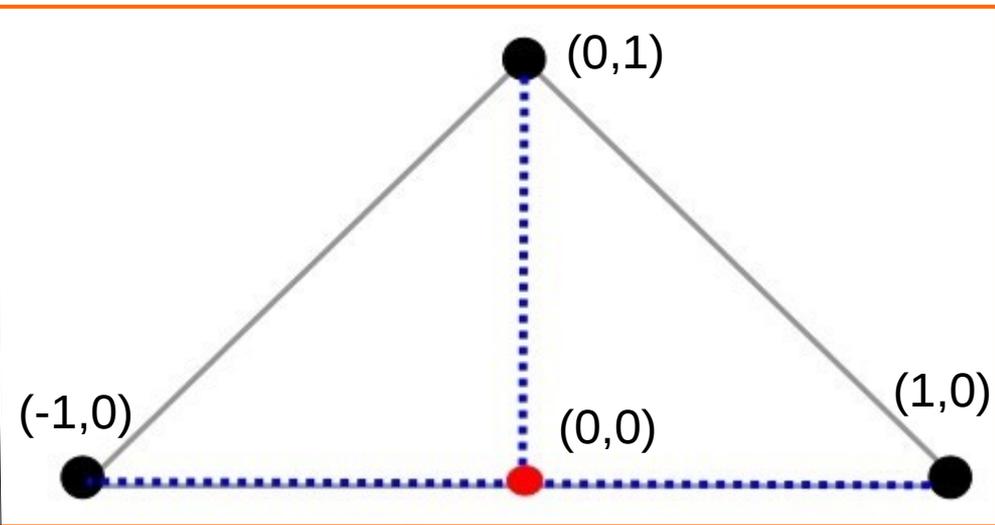
Arbre de Steiner **euclidien**



L'arbre de Steiner *euclidien* minimum (en bleu)
mesure $\sqrt{3}$

L'arbre couvrant *euclidien* minimum ($[AB]+[AC]$)
mesure **2**

Arbre de Steiner **rectiligne**



L'arbre de Steiner *rectiligne* minimum (en bleu) mesure **3** :

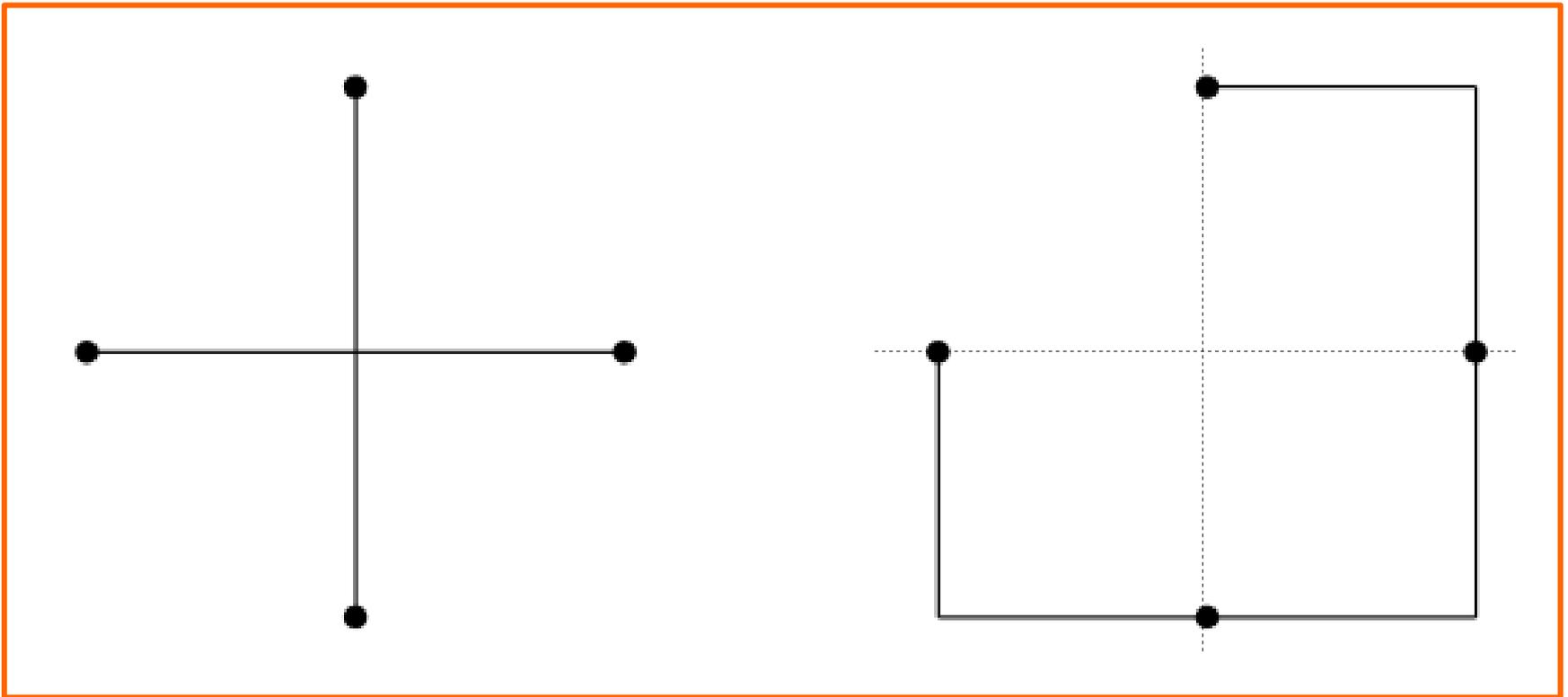
$$\begin{aligned} &|-1-0| + |0-0| = 1 \\ + &|0-1| + |0-0| = 1 \\ + &|0-0| + |1-0| = 1 \end{aligned}$$

L'arbre couvrant *rectiligne* minimum (en noir) mesure :
 $|-1-0| + |0-1| + |0-1| + |1-0| = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

Avec la distance de Manhattan, on a établi que :

Le Ratio de Steiner dans le plan rectilinéaire vaut $2/3$

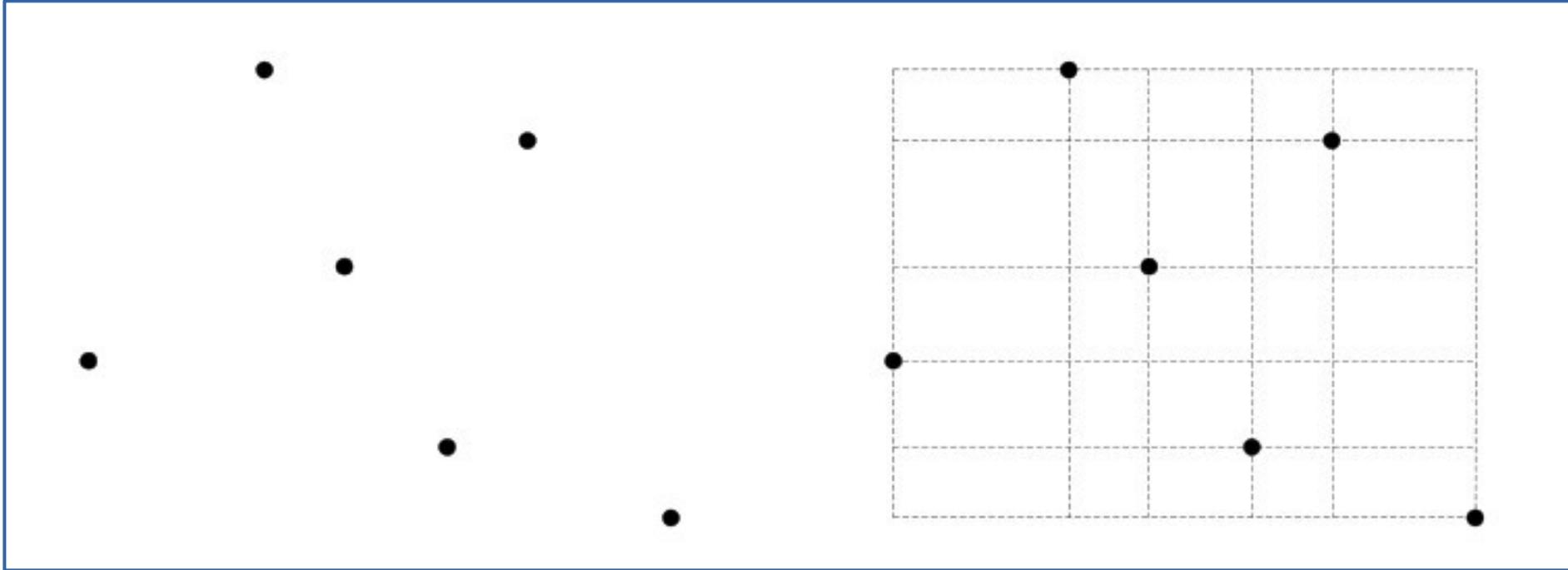
Exemple simple avec $n=4$ terminaux :



La longueur de l'**arbre de Steiner minimum** est 4.

La longueur de l'**arbre couvrant minimum** est 6.

Dans un **espace rectilinéaire**, la topologie de **n** terminaux peut se représenter à l'aide d'une **grille de Hanan**, obtenue en traçant des lignes *horizontales* et *verticales* passant par tous les terminaux.



↑
Le réseau de **terminaux**

↑
La **grille de Hanan** correspondante

Grille de Hanan :
Chaque *terminal* se trouve à l'intersection
d'une ligne verticale et d'une ligne horizontale

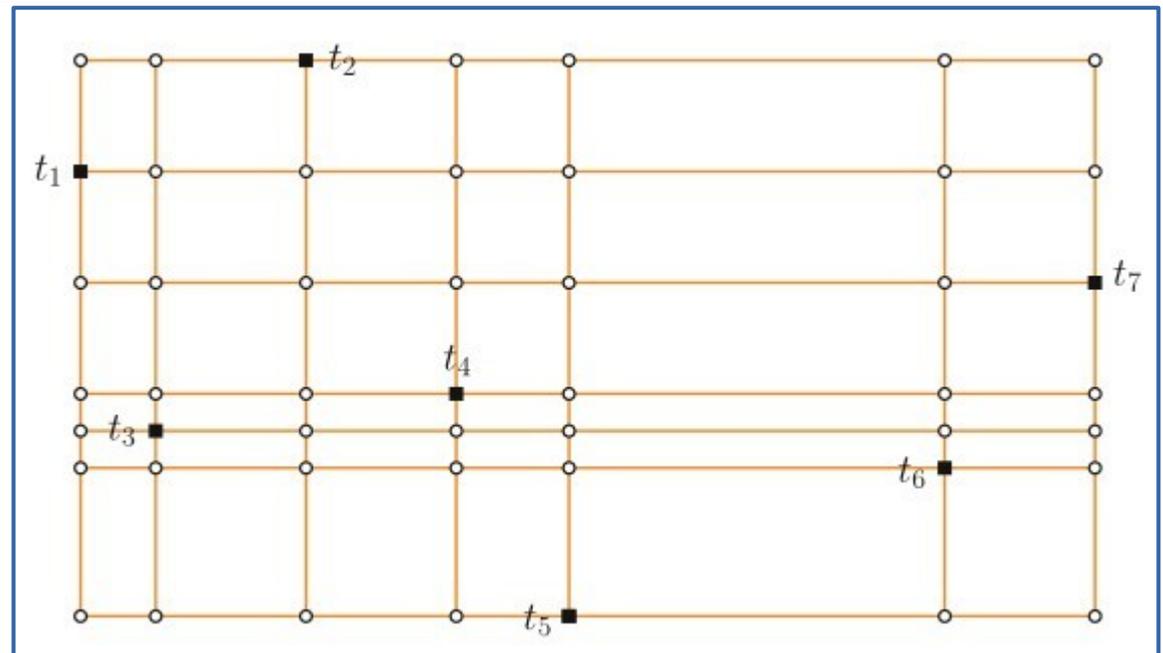
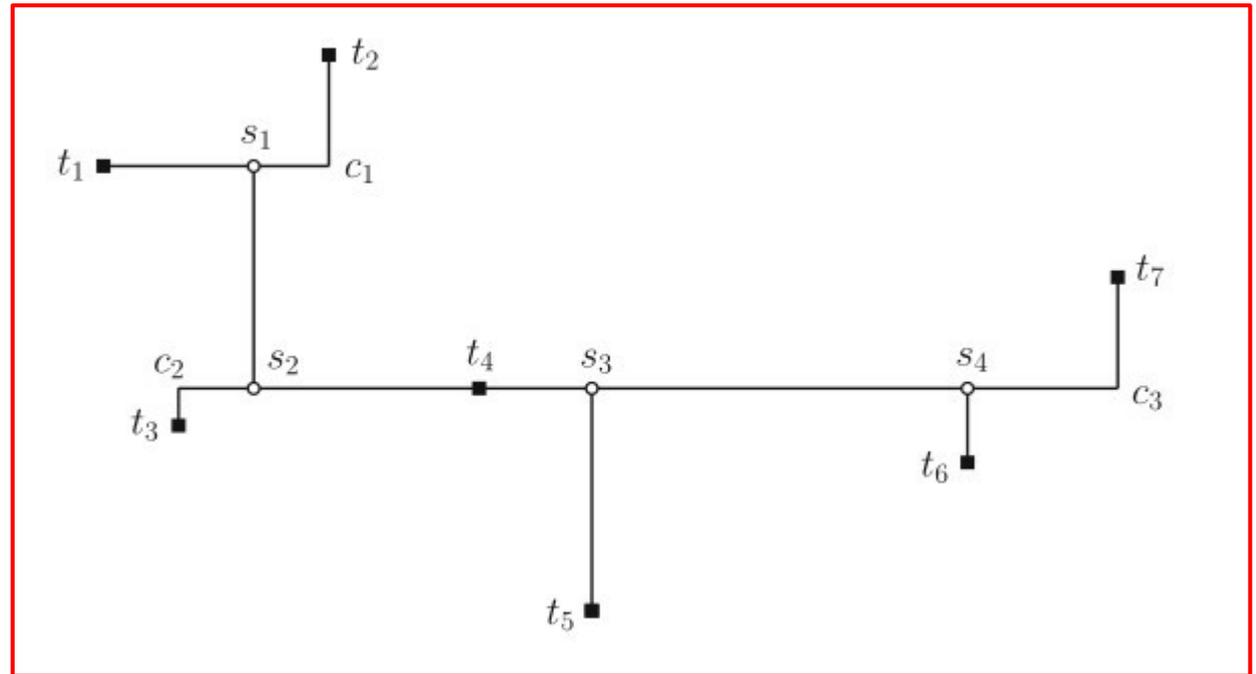
Exemple d'Arbre de Steiner Minimum rectilinéaire et de grille de Hanan correspondante :

Dans une grille de Hanan, on trouve :

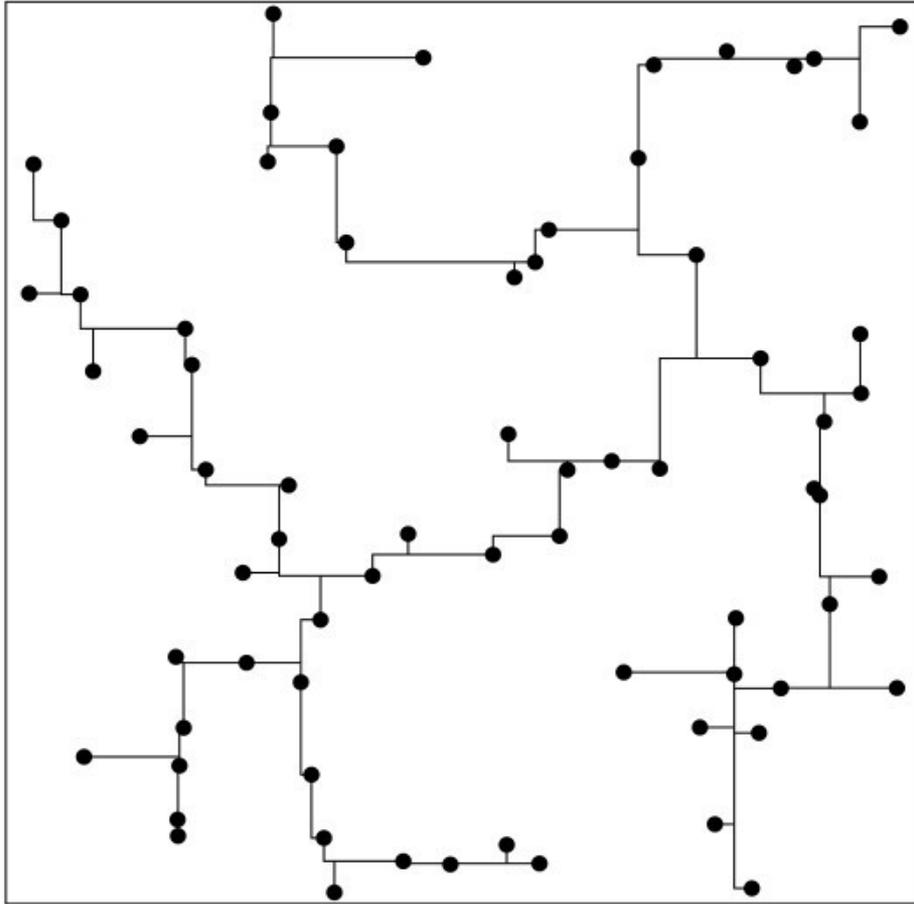
- des points **terminaux**
(exemple : t_1, t_2),

- des **points de Steiner**
(exemple : s_1, s_2),

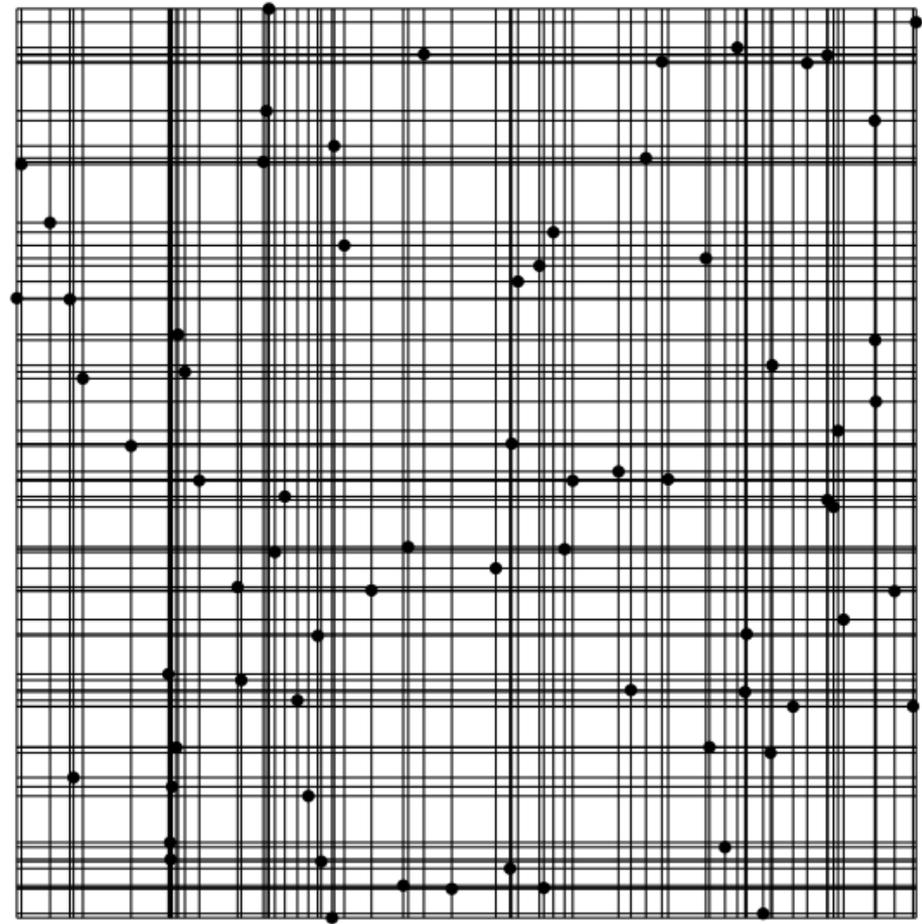
- des **coins**
(exemple : c_1, c_2).



La **distance rectilinéaire** correspond mieux à la réalité des réseaux physiques (électronique) ou virtuels (communication).



Arbre de Steiner minimum **rectiligne** de $n=70$ terminaux



La grille de Hanan correspondante

5-4) Extension de la Notion d'Arbre de Steiner ... et changement de méthode

L'une des façons de poursuivre la recherche est de « modifier » les notions de Point de Steiner et d'Arbre de Steiner Minimum ...

Par exemple :

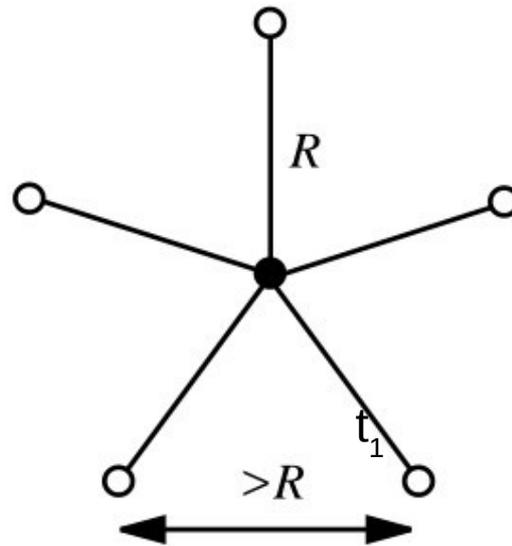
On définit un **Arbre de Steiner Optimal** comme l'arbre de Steiner dont **chaque arête a une longueur au plus égale à une valeur donnée R** .

Exemple : dans un réseau *sans fil*, où la portée de transmission est limitée à R , on augmentera le nombre de points de Steiner afin que la longueur entre chaque point du réseau soit inférieure à R .

Une méthode consiste à "**steineriser**" l'Arbre Couvrant Minimum en lui ajoutant des points de Steiner de degré $d=2$.

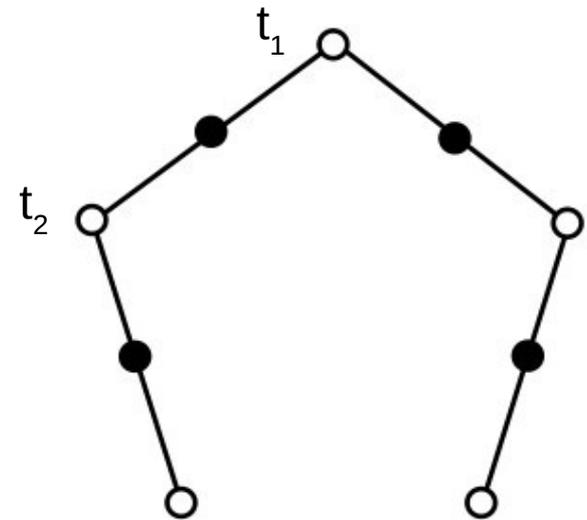
Le nombre de points ajoutés entre t_1 et t_2 sera égal à la partie entière par excès de :

$$\lceil \|t_1 - t_2\| / R + 1 \rceil$$



(a)

(a) Arbre de Steiner Optimal



(b)

(b) Arbre Couvrant Minimum « steinerisé »

On montre par exemple que :

Dans le plan rectilinéaire, il existe un Plus Petit Arbre de Steiner Optimal, tel que chacun de ses sommets soit de degré $d \leq 4$.

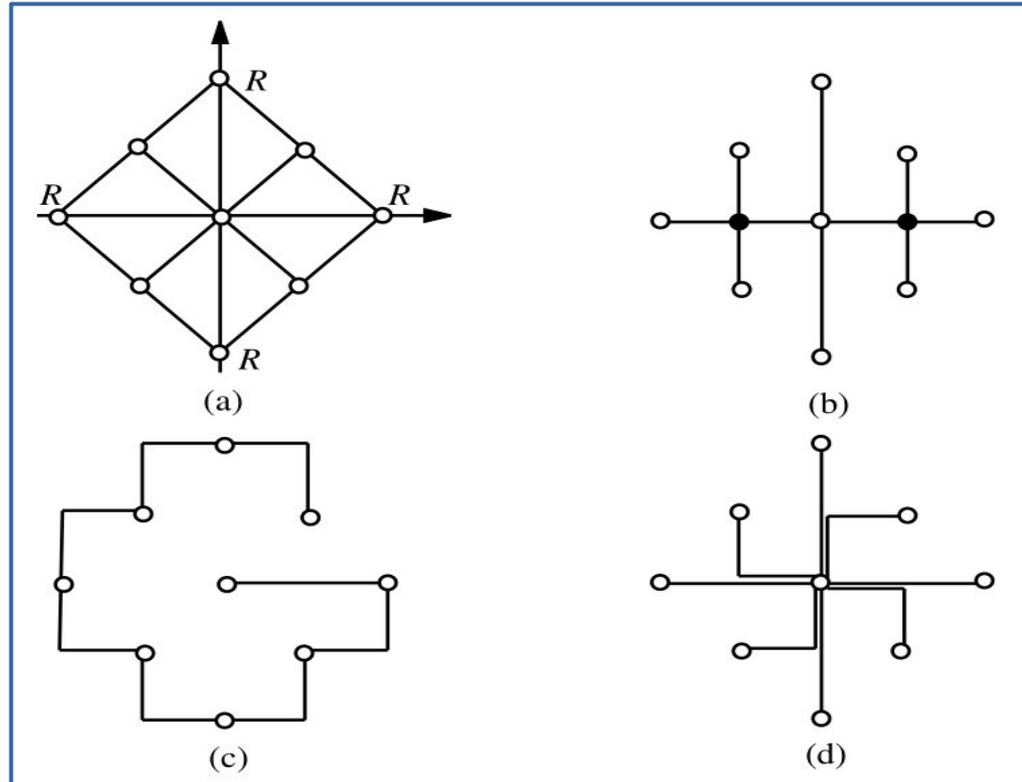
Exemple :

(a) 9 terminaux dans le plan rectilinéaire

(b) ASM rectilinéaire

(c) Un 1^{er} arbre de Steiner Optimal

(d) Un 2^{ème} arbre de Steiner Optimal



On peut définir encore une autre « extension » de la notion d'Arbre de Steiner ...

On appelle **Arbre de Steiner ϵ -approximatif** celui dans lequel l'angle au sommet de chaque point de Steiner a pour mesure un réel compris dans l'intervalle :

$$[2\pi/3 - \epsilon, 2\pi/3 + \epsilon]$$

Cette définition donne lieu à diverses conjectures ... pour lesquelles la recherche est en cours

6

Aujourd'hui ...

Domaines d'application du problème de Steiner

Si le **problème de l'arbre de Steiner minimum** a repris vie de nos jours, c'est qu'il se retrouve dans divers domaines d'application, où il joue un rôle important. Par exemple :

6-1) Le problème de Steiner et le problème du réseau optimal

6-2) Le problème de Steiner et l'Intégration à très grande échelle
(VLSI=Very Large Scale Integration)

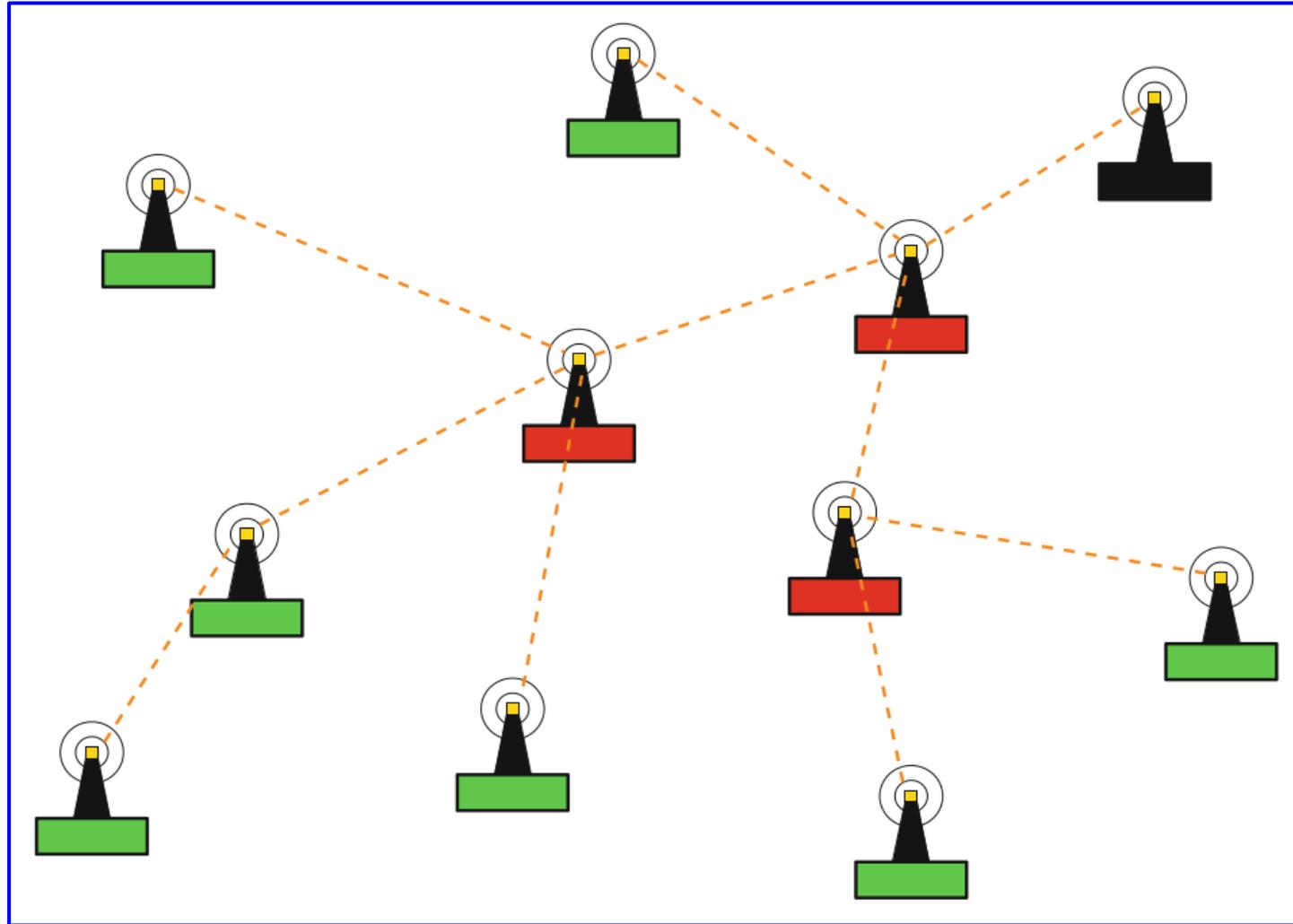
6-3) Le problème de Steiner et le repliement des protéines

6-1) L'Arbre de Steiner et le Problème du Réseau Optimal

Une application *naturelle* de la notion d'Arbre de Steiner concerne la recherche d'un réseau optimal ...

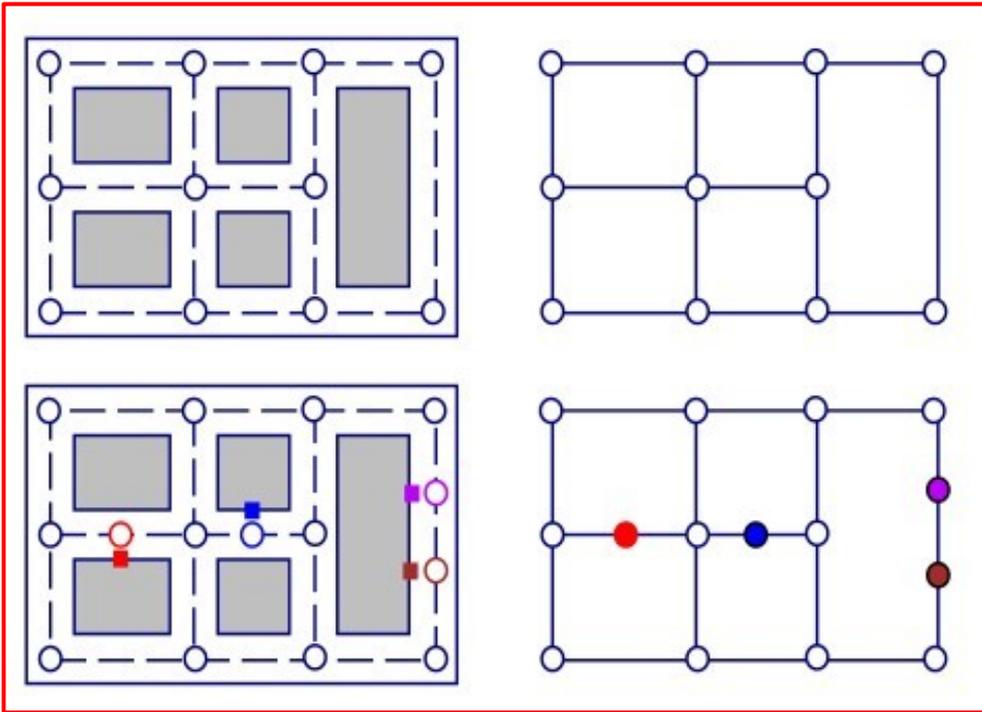
L'optimisation d'un réseau est un problème crucial ...

notamment dans la communication « sans fil » ...



Réseau de capteurs sans fil (Brazil Marcus, Optimal interconnection trees in the plane)

En particulier, dans le **roulage** (matériel) de l'information, la notion d'Arbre de Steiner intervient : on parle alors d'**arbre de roulage**.



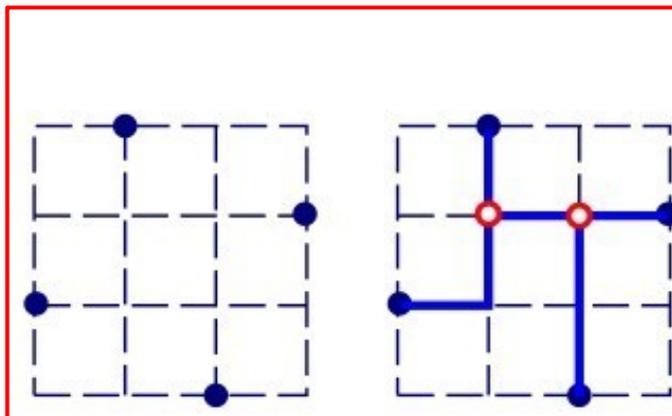
Grille de roulage (*graphe*) :

- les circuits sont les arêtes
- les intersections du réseau

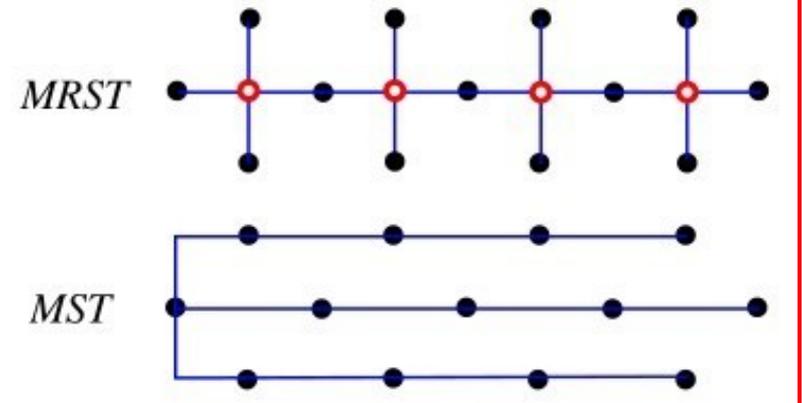
et

Grille de roulage (graphe étendu) :

On a ajouté les terminaux (points bleus/rouges)



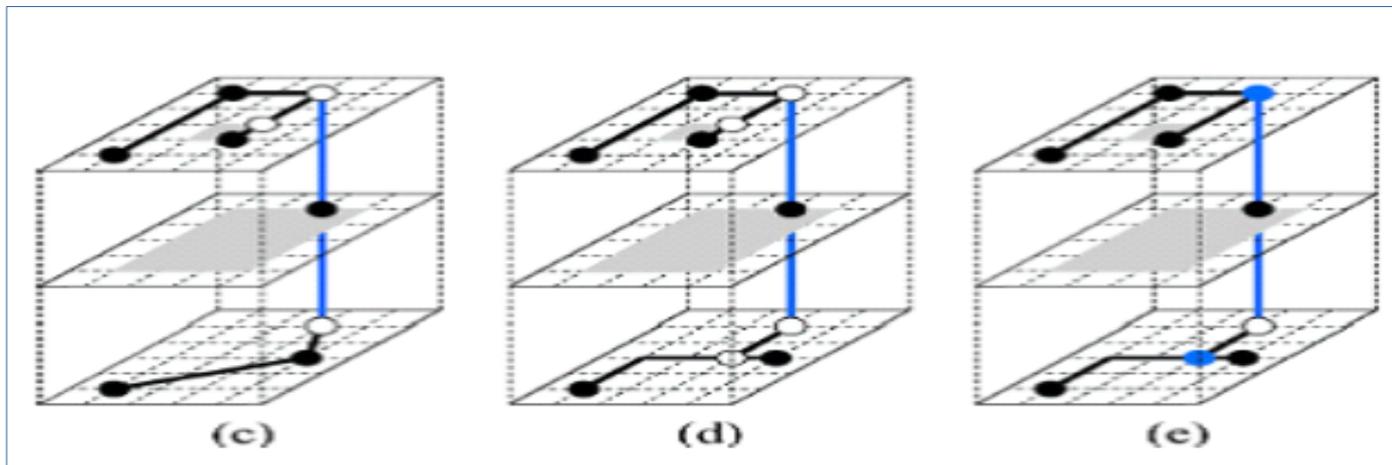
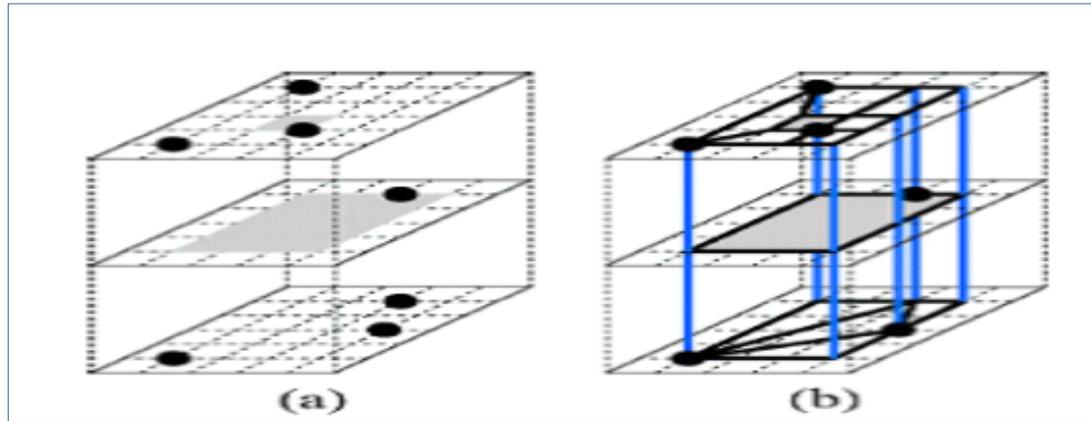
Grille de Hanan



Le Ratio de Steiner Rectilinéaire $MRST/MST \leq 2/3$

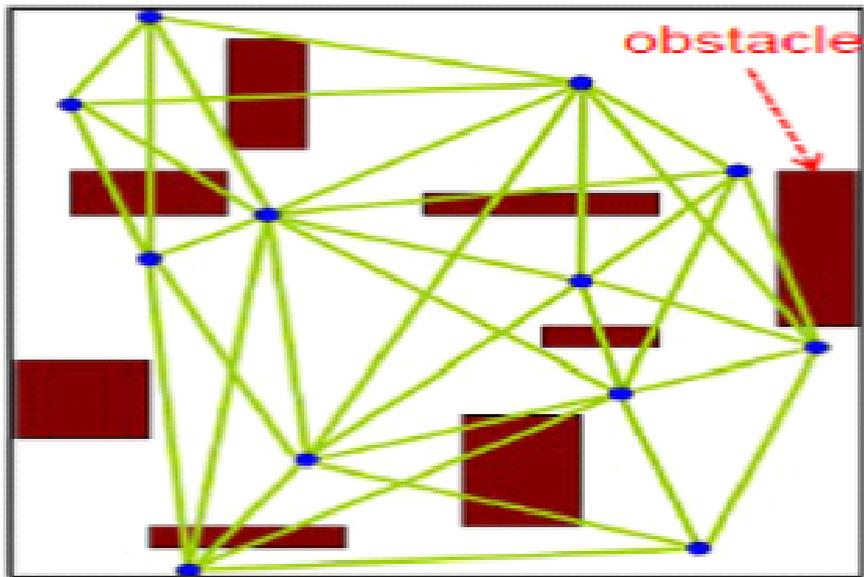
Ainsi, dans les circuits **multi-couches**, c'est la *métrique rectilinéaire* qui est utilisée ; le *coût* d'une liaison (arête) entre deux points du circuit $p_i(x_i, y_i, z_i)$ et $p_j(x_j, y_j, z_j)$ est égal à : $|x_i - x_j| + |y_i - y_j| + |z_i - z_j|$

Exemple : Les 4 étapes de la construction d'un Arbre de Steiner Minimum avec évitement d'obstacles dans un circuit à 3 couches (Prasad GR, 2014)



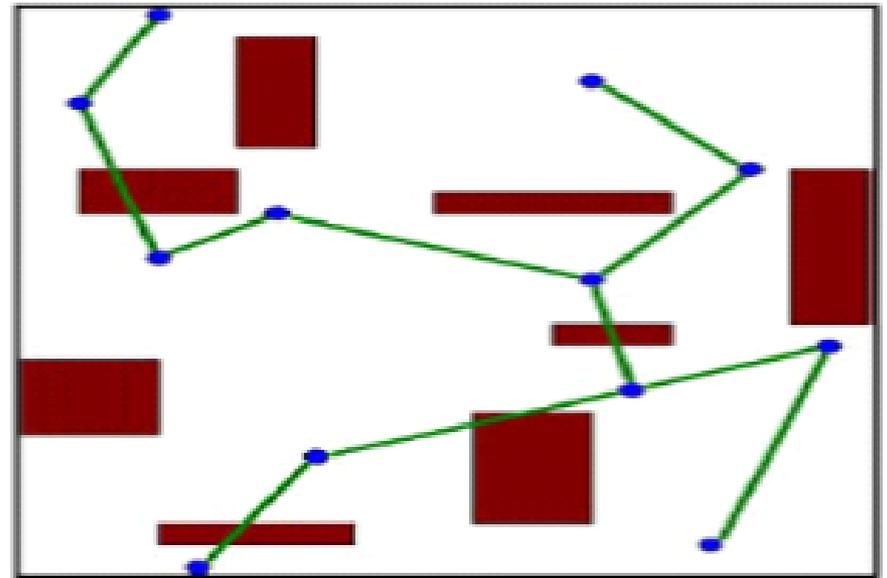
Après *projection* sur un plan des *points de connexion*, on effectue entre ces derniers une **Triangulation de Delaunay**.

On applique ensuite un algorithme de Kruskal ou de Prim pour construire l'**Arbre Couvrant Minimum** en tenant compte des obstacles.



(a)

Triangulation de Delaunay de la projection sur un plan

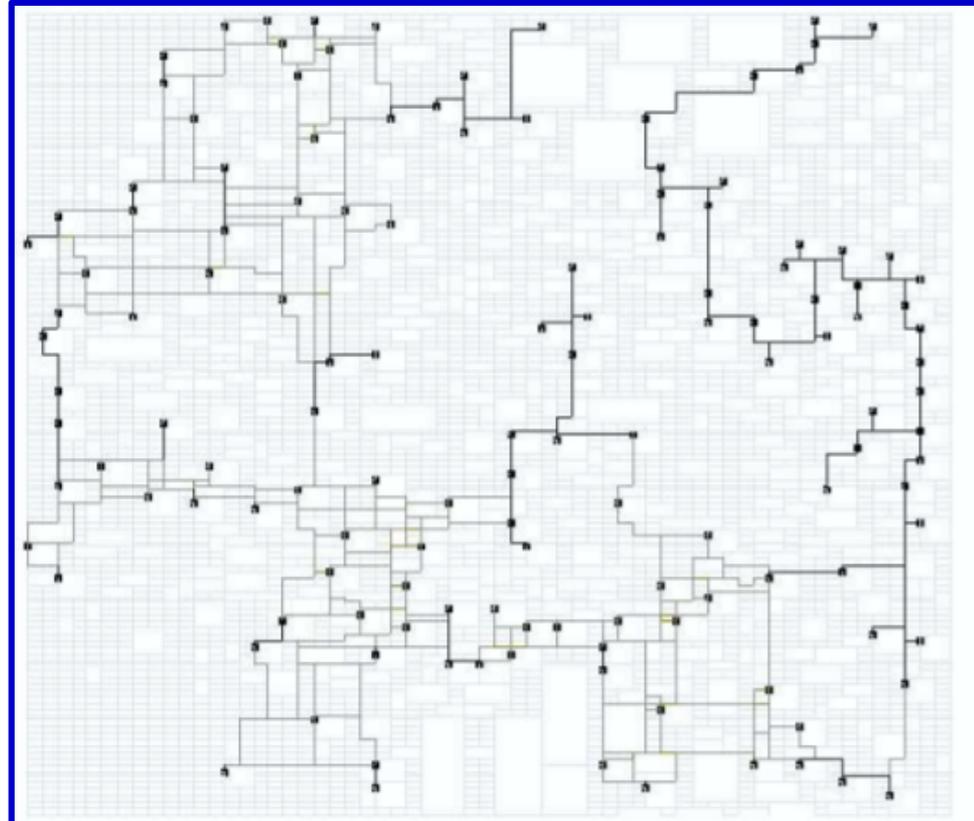
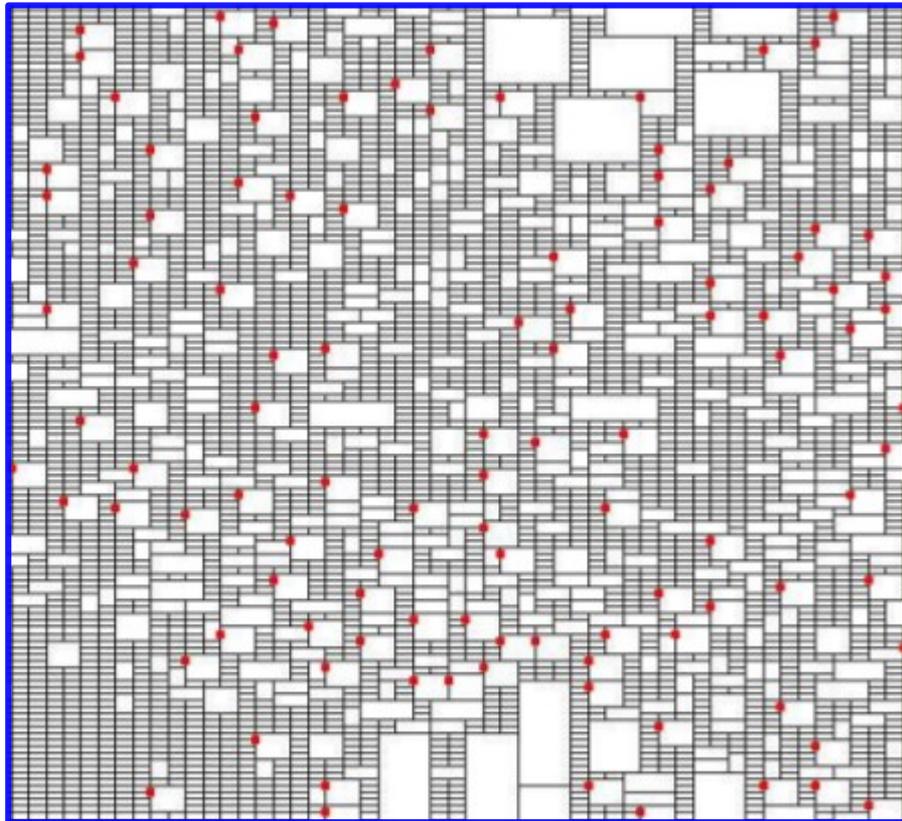


(b)

Arbre Couvrant Minimum en tenant compte des obstacles

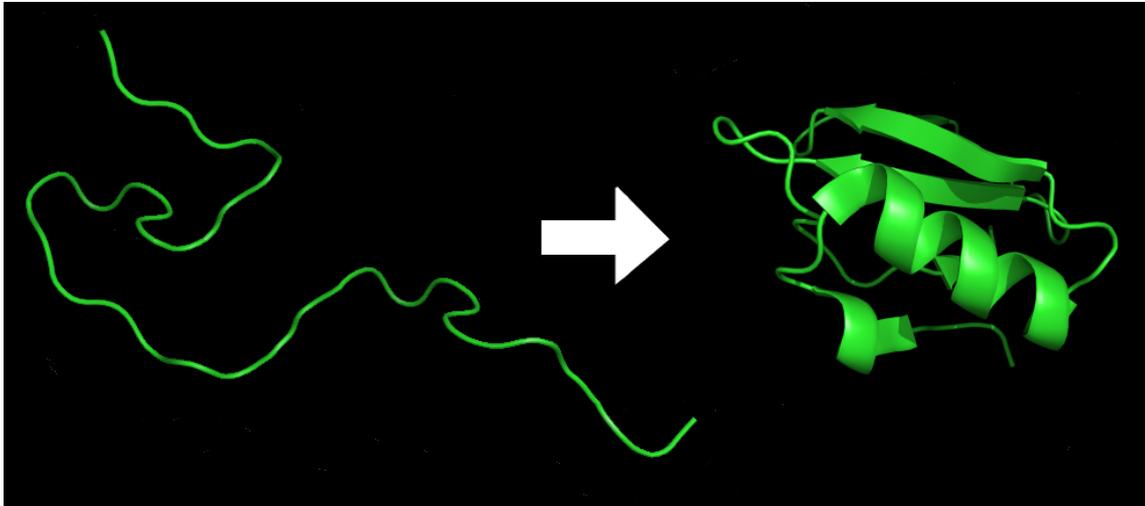
Le calcul des circuits VLSI avec obstacles aboutit à des arbres complexes ...

Un exemple de grille représentant un VLSI ... et l'arbre correspondant (Polzin Tobias,2003)

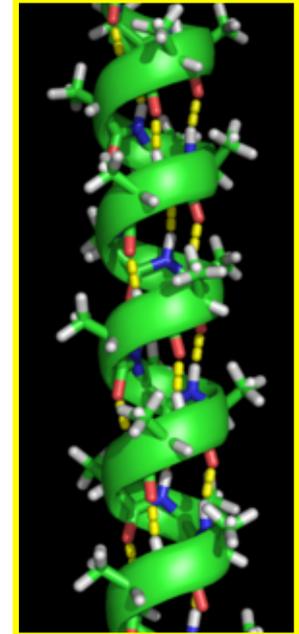


6-3) L'arbre de Steiner et la Biologie des Protéines

Le **repliement des protéines** « est le processus physique par lequel un polypeptide (= chaîne d'acides aminés) se replie dans sa *structure tridimensionnelle caractéristique* dans laquelle il est fonctionnel » (Wikipedia).



Protéine sous forme linéaire, puis en dimension 3 après repliement (Wikipedia)



Alpha-hélice (Wikipedia)

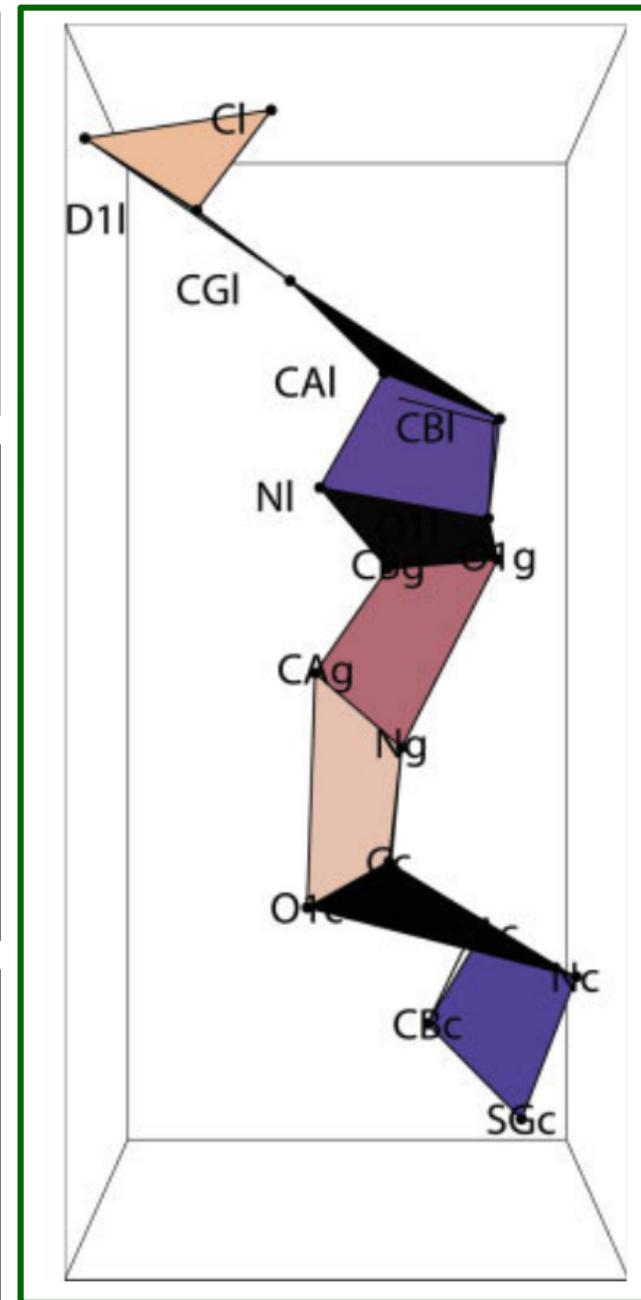
Un problème non résolu de la *biologie moléculaire* est celui du **repliement des protéines** (ang. : **protein folding**) : comment prédire la structure tridimensionnelle de la protéine à partir de la connaissance de la séquence d'acides aminés à l'origine de la protéine.

Dans la structure d'une protéine, les acides aminés s'agencent suivant des *plans* qui s'articulent en fonction d'une certaine *énergie de torsion*.

Les arbres de Steiner et les protéines :

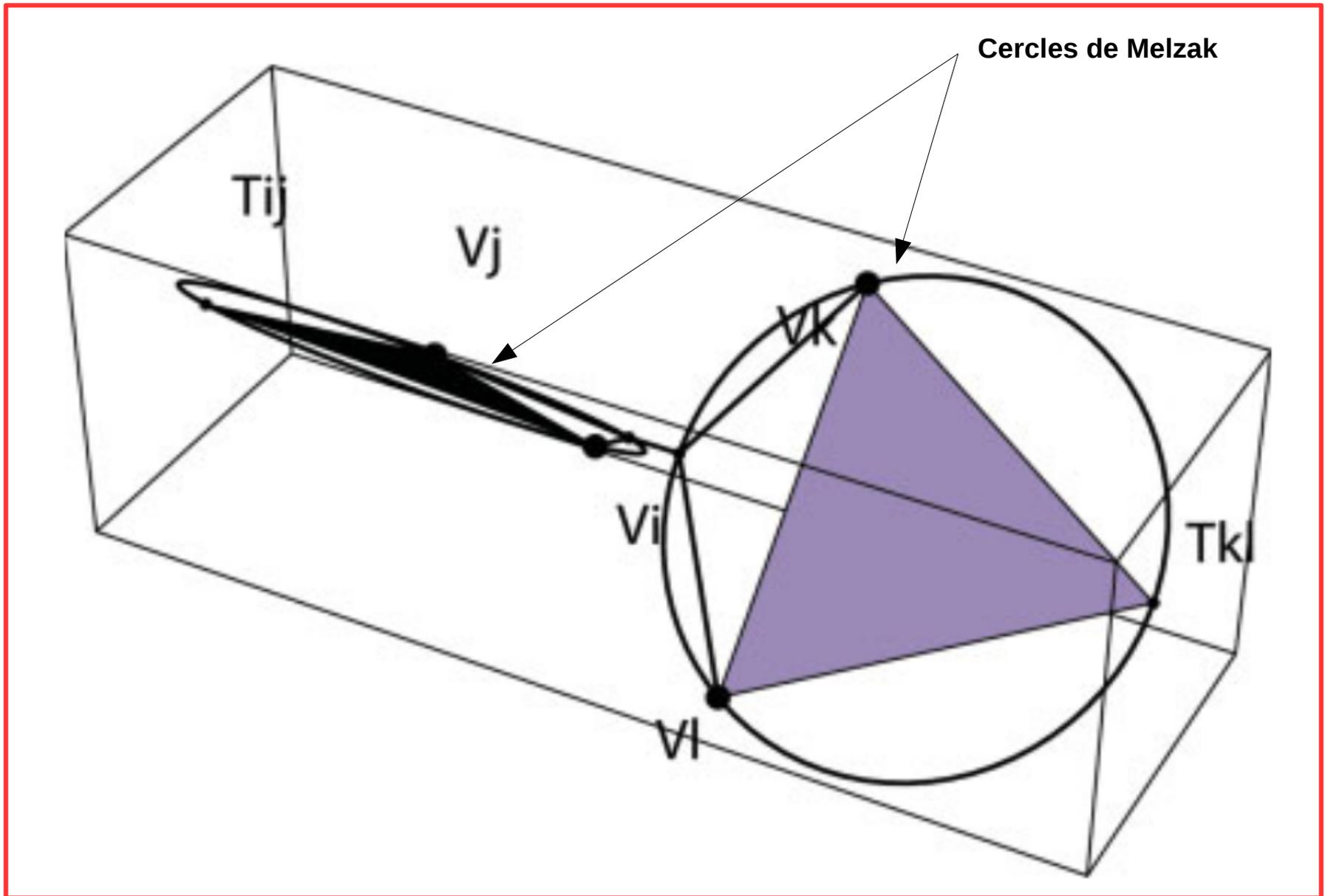
Il y a une relation de proportionnalité entre l'*énergie de torsion* d'une protéine et le *Ratio de Steiner*.

Une bonne approximation du ratio de Steiner permet de mieux connaître l'*énergie de torsion* d'une protéine et, par suite, sa structure.



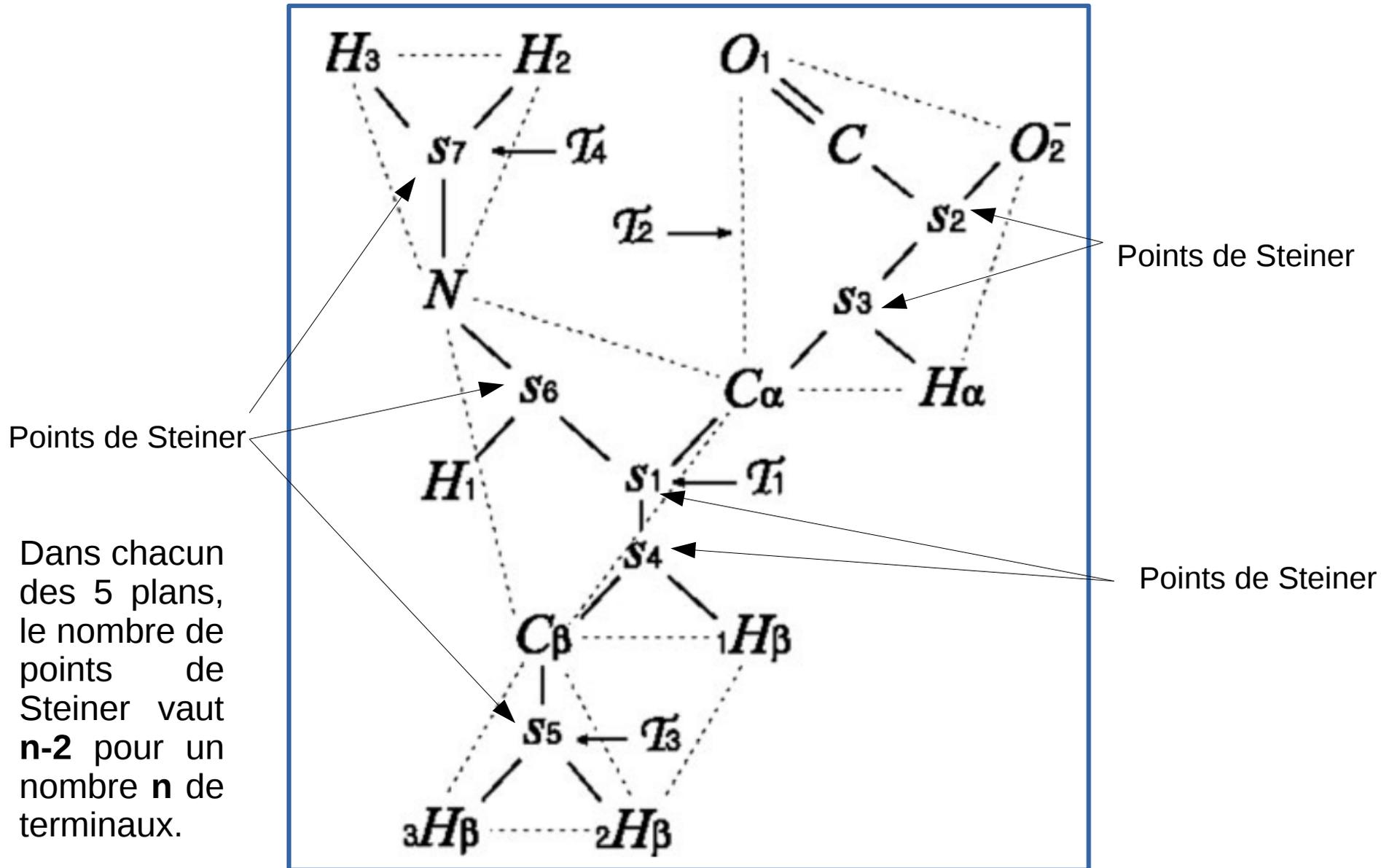
Plans de Steiner d'un tripeptide
Cystéine-Glycine-Leucine

Exemple d'ASM : deux **cercles de Melzak** relient des paires de terminaux. Les points de Steiner sont T_{ij} et T_{kl} . L'**angle de torsion** entre les plans définis par les deux cercles est égal à $\pi/2$.

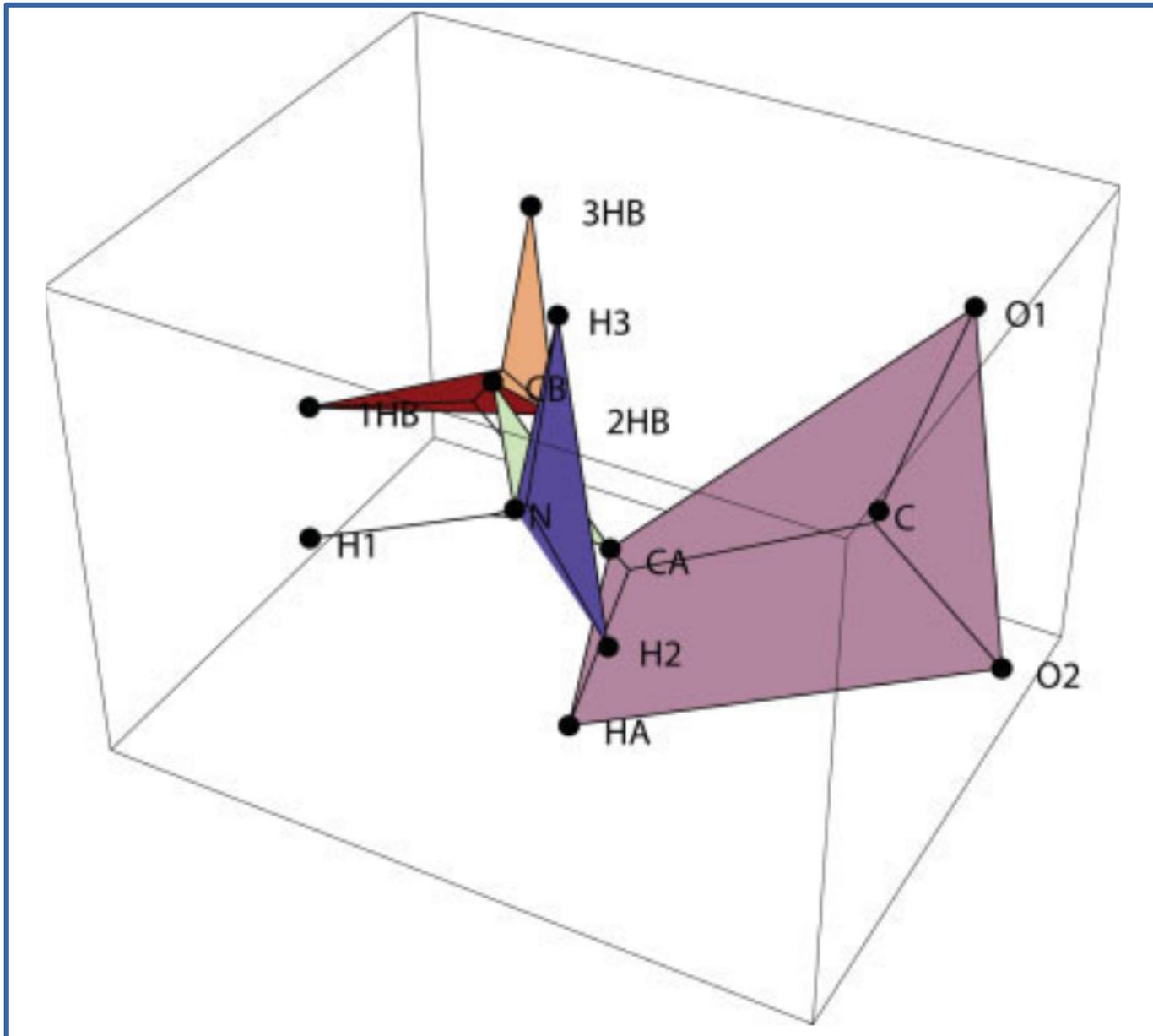


Exemple de représentation en 2D des 5 Plans de Steiner de la structure de l'Alanine

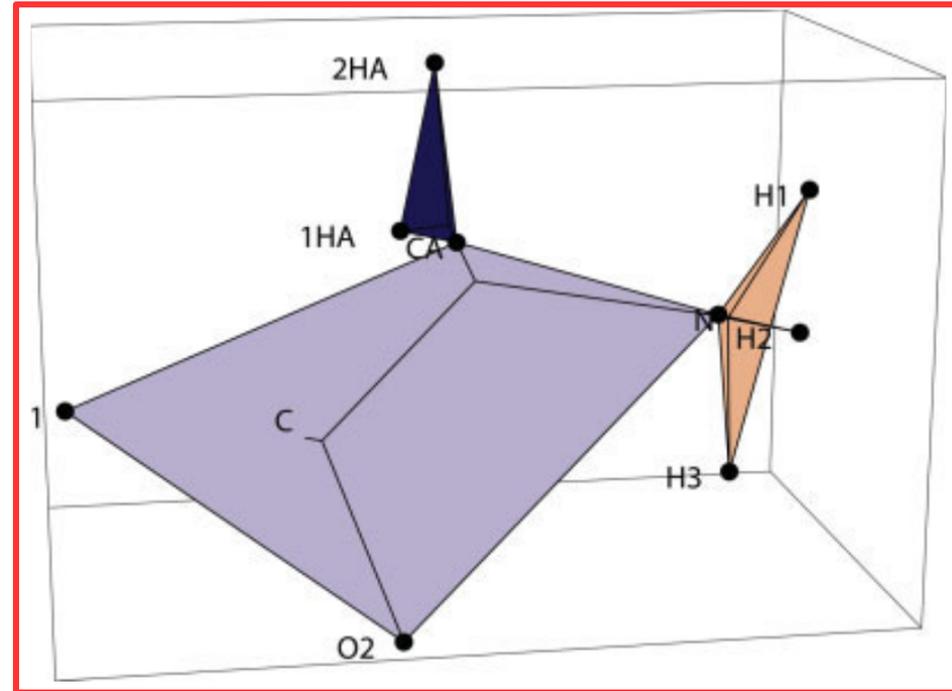
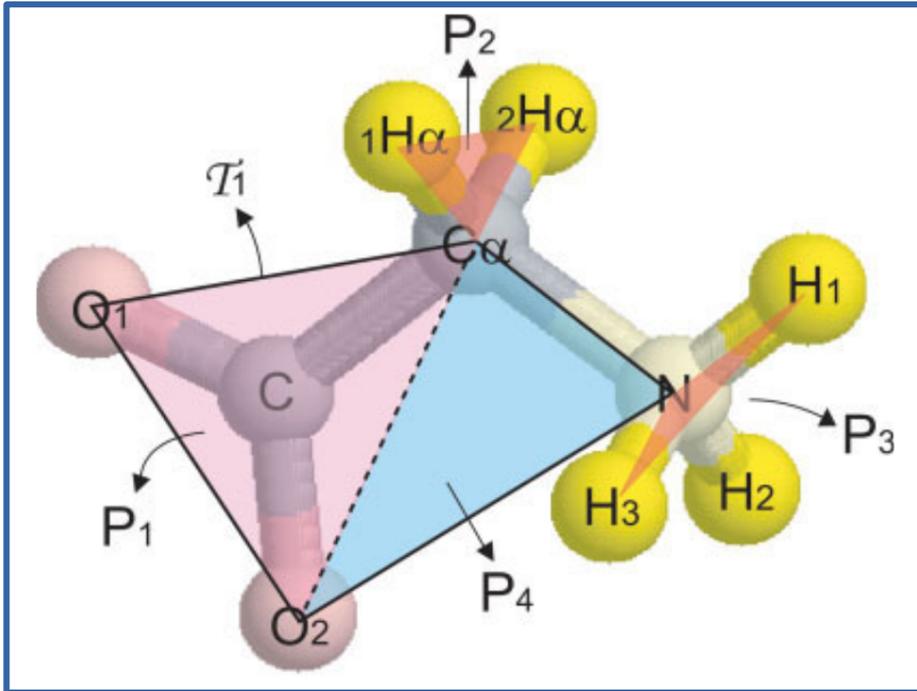
(Smith MacGregor J, Steiner Minimal Trees, Twist Angles and the Protein Folding Problem)



Exemple de représentation en **3D** des **Plans de Steiner** de l'**Alanine**
(Smith MacGregor J, Steiner Minimal Trees, Twist Angles and the Protein Folding Problem)

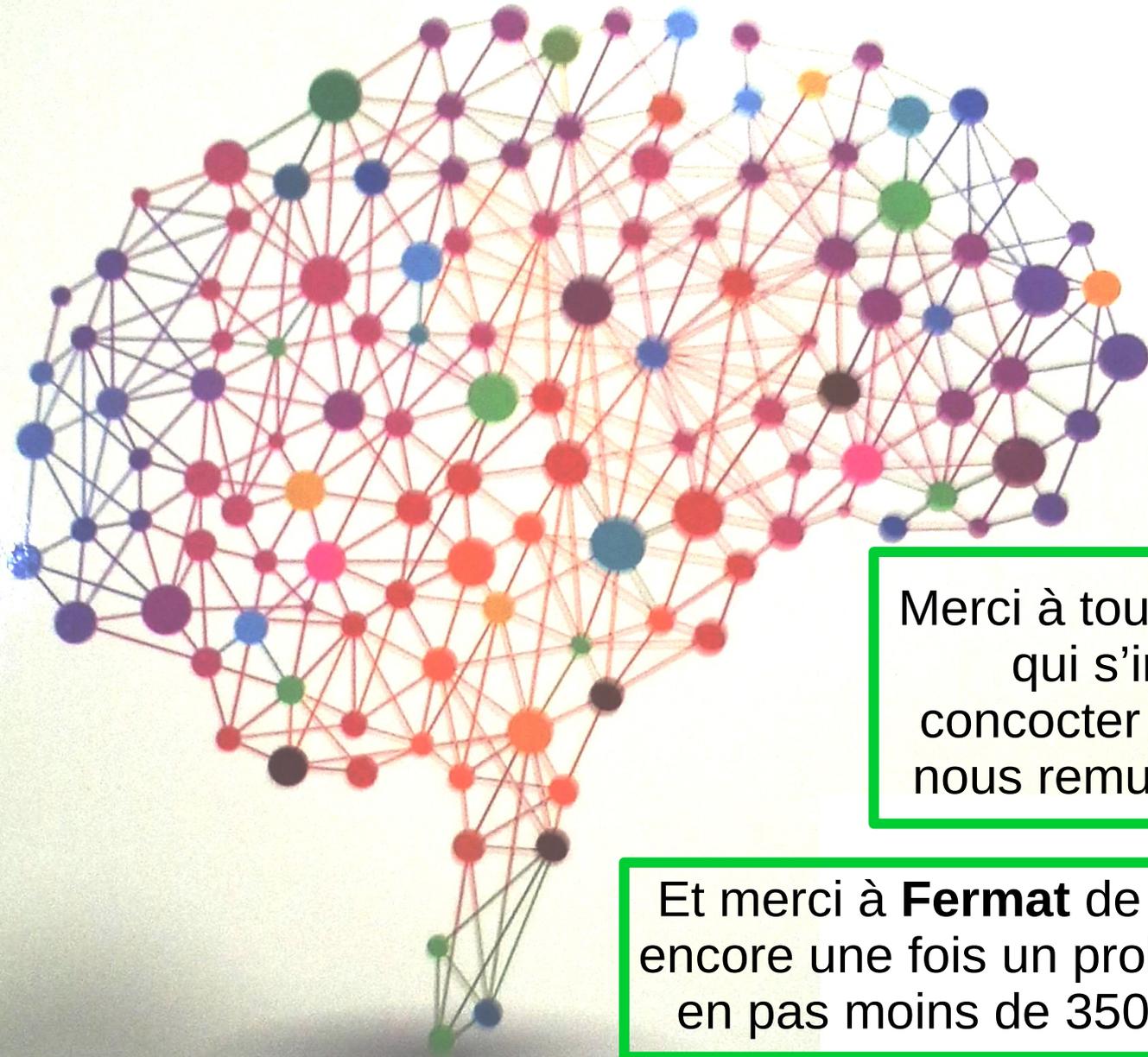


Autre exemple : Plans de Steiner de la Glycine



(Smith MacGregor J, Steiner Minimal Trees, Twist Angles and the Protein Folding Problem)

CONCLUSION sur le PROBLEME de l'ARBRE de STEINER



Merci à tous les **mathématiciens** qui, de Descartes à nos jours, ont alimenté notre plaisir de la recherche ...

Merci à tous les **informaticiens** qui s'ingénient à nous concocter des algorithmes qui nous remuent les méninges ...

Et merci à **Fermat** de nous avoir proposé encore une fois un problème à résoudre ... en pas moins de 350 ans, espérons-le !

Quelques références sur le Problème de l'Arbre Minimal de Steiner

Sur les graphes en général :

- **Aldous Joan** – Graphs and applications (Springer, 2004)
- **Prins Christian** – Algorithmes de graphes (Eyrolles, 1994)

Pour commencer sur le problème de Steiner ... :

- **Soothill Germander**, Euclidean Steiner Problem (the) (2010)
- **Bogomolny Alexander**, Fermat Points and Generalizations (2010)
- **Stewart Ian**, Steiner Ratio Conjecture (the) (2008)

Pour les enfants :

- **Bell Tim** - Computer Science Unplugged--L'informatique sans ordinateur (2009)
(en français : <http://interstices.info> ; version anglaise : Computer Science Unplugged--Activity-15-Steiner Trees)

Sur la toile :

- **Fonseca Rasmus** - Steiner tree and minimum spanning tree (voir : <https://www.youtube.com/watch?v=bQPAqNIFVII>)
- **Geogebra** – Solving the Fermat-Weber problem with Geogebra (voir : <https://mgje.github.io/presentations/Budapest2014/index.html#/4>)
- **Geosteiner** (logiciel libre) – voir : <http://www.geosteiner.com/>

Articles sur l'histoire du problème et les propriétés des arbres de Steiner :

- **Brazil Marcus** - On the History of the Euclidean Steiner tree problem (2015)
- **Zachariasen Martin**, Algorithms for plane Steiner tree problems (1998)

Sur les constructions de Torricelli et de Simpson :

- **Krarpur Jakob**, On Torricelli's geometrical solution to a problem of Fermat (1997)
- **Krarpur Jakob**, On a Complementary Problem of Courant and Robbins (1998)

Ouvrage de référence récent :

- **Brazil Marcus** - Optimal Interconnection Trees in the Plane-Theory, Algorithms and Applications (2015)

Le problème de Steiner et les réseaux :

- **Cieslik Dietmar** - Shortest Connectivity-An Introduction with Applications in Phylogeny (2005)
- **Du Dingzu**, Steiner tree problems in communication networks (2008)
- **Gerez Sabih**, Algorithms for VLSI Design Automation (1998)
- **Ivanov Alexander** - Minimal networks-The Steiner tree problem and its generalizations (1994)
- **Korte Bernhard** - Shortest Paths and Steiner Trees in VLSI Routing (2007)
- **Polzin Tobias**, Algorithms for the Steiner problem in networks (2003)

Pour les amateurs de la géométrie du triangle, sur les droites de Simson et sur le Point de Fermat-Torricelli :

- **Sortais Y. et R.** - La géométrie du triangle-Exercices résolus (Hermann, 1987)