Tableau-Papiers

MOTS INFINIS :

Les COMMENTAIRES ITÉRÉS d'un ENTIER

Procédure :

(i) On part d'un nombre entier n à 1 chiffre (par exemple 2) et on écrit :

ligne 1 :	2	("deux")

(ii) On "commente" ce qui est écrit en ligne 1 en répondant à la question "qu'est-ce que c'est ?" ; on répond : c'est "<u>un</u> <u>deux</u>" ; ce qui s'écrit avec des chiffres :

ligne 2 :	1 . 2	("un deux")

(iii) On réitère l'opération de commentaire à partir de la ligne 2 :

ligne 3 :	1 1 . 1 2	("un un un deux")

et ainsi de suite...

→ Les premiers "commentaires de 2" :

lgn. 1	2
lgn. 2	1 2
lgn. 3	11 1 2
lgn. 4	31 1 2
lgn. 5	132 1 1 2
lgn. 6	11131 2 2 1 1 2
lgn. 7	311311 2 2 2 1 1 2
lgn. 8	1321132 1 3 2 2 1 1 2

→ les premiers "commentaires de 5"

Ligne 1 — 5

Ligne 2 — 1 5

Ligne 3 — 11 15

Ligne 4 — 31 15

Ligne 5 — 132 115

Ligne 6 — 11131 22115

Ligne 7 — 311311 222115

Ligne 8 — 1321132 132211 5

Ligne 9 — 11131221131 2111322 2115

⋮ ⋮

→ Les "Commentaires de 1" ... A TROUVER ...

1 s'écrit 11

11 s'écrit 21

111 s'écrit 31

etc

1) Quel est le nombre qui reste son propre commentaire dans la suite des commentaires de 1

2) Construisez la suite des commentaires de 1 jusqu'à trouver le nombre de la question 1).
Quel est le commentaire de 1 qui contient ce nombre ?

02 – Mots, miroirs et Palindromes

Les MOTS et leur MIROIR : ... les PALINDROMES

1

- On se donne un alphabet $A = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$.
- Les éléments c_i de A sont des caractères (lettres ou chiffres)
- Un mot fini sur A est une chaîne d'éléments de A :

Alphabet A	Mot fini sur A
$A = \{a, b, c\}$	$u = aaccbb$, $v = abc$ $w = bbccaa$, $y = baba$
$A = \{a, b, 2,), (, =\}$	$u = 2(ab)2=(2ab)(abb)$
$A = \{0, 1\}$	$u = 0110100110010110$ $v = 1001011001101001$

- Si u est un mot : $u = acbaa$
alors le (mot-)miroir de u $\boxed{\tilde{u}} = aabca$ s'obtient en lisant les caractères de u dans le sens inverse.
- Un $\boxed{\text{PALINDROME}}$ est un mot qui est égal à son miroir : $\boxed{u = \tilde{u}}$

$u_1 = \text{Laval} = \tilde{u}_1$, $u_2 = \text{radar} = \tilde{u}_2$

$u_3 = \text{Karine alla en Irak} = \tilde{u}_3$

$u_4 = 28476767482 = \tilde{u}_4$

PALINDROME par RETOURNEMENT-ADDITION
NOMBRE de LYCHREL

Procédure de Retournement-Addition (PRA) :

① Choisir un entier n à $k \geq 2$ chiffres
② Prendre le miroir $\tilde{n}$ de n
③ Faire la somme : $S = n + \tilde{n}$
④ Vérifier si S est un palindrome

- non → On fait : $n = S$. On repart au point ①
- OUI → Fin de la Procédure

Exemples : (i) $n = 47$, $\tilde{n} = 74$, $S = \boxed{121}$

(ii) $n = 64$, $\tilde{n} = 46$, $S = 110$

$n = S = 110$, $\tilde{n} = 011$, $S = \boxed{121}$

La CONJECTURE 196

- Les nombres pour lesquels la procédure PRA n'aboutit jamais (?) à un palindrome sont appelés

nombre de LYCHREL

- On conjecture que :

196 est le plus petit nombre de LYCHREL

03 – 1809… Encore et toujours

1089 … ENCORE et TOUJOURS …

Un classique de la MAGIE des NOMBRES et des MOTS

① On choisit un entier n à trois chiffres tel que le premier et le dernier chiffre soient des entiers dont la différence est supérieure ou égale à 2.

Par exemple : $\boxed{n = 641}$

② Prenez le miroir de n : $\boxed{\hat{n} = 146}$

③ Calculez la différence $d = n - \tilde{n}$: $\boxed{d = 641 - 146 = 495}$

④ Prenez le miroir de d : $\boxed{\hat{d} = 594}$

⑤ Calculez la somme de d et de $\hat{d}$:

$$\boxed{S = d + \hat{d} = 495 + 594 = \boxed{1089}}$$

Quel que soit l'entier n répondant à la condition ①, on aboutit toujours, en exécutant les étapes ② à ⑤, au même nombre : $\boxed{1089}$

POURQUOI ?

Pour répondre, il faut EXPRIMER le déroulement de ① à ⑤ avec d'AUTRES MOTS

- - -

• Ecrivons $n = 641$, à partir de l'alphabet A :

$$n = (6\times100)+(4\times10)+(1\times1) = \boxed{abc}$$

$$A = \{a, b, c\}$$

• Le miroir de n est : $\tilde{n} = \boxed{cba}$

• La différence $d = n - \tilde{n}$ est $abc - cba$:

$$d = (100a + 10b + 1c) - (100c + 10b + 1a) = \cdots$$

$$d = (100a - 1a) + (10b - 10b) + (1c - 100c) = \cdots$$

$$d = 99a + 0b - 99c = \boxed{99(a-c)}$$

• Quel que soit le choix de n vérifiant (1), on a

$$a - c \in \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$$

et $d = 99(a-c) \in \{198, 297, 396, 495, 594, 693, \ldots, 792, 891\}$, dans lequel le 2ème chiffre et la somme (1er + 2ème chiffre) valent 9

• On note $d = 99(a-c) = tuv$. Alors : $\tilde{d} = vut$

et $S = d + \tilde{d} = 99(a-c) + \widetilde{99(a-c)} = tuv + vut$ s'écrit :

$$S = 100t + 10u + 1v + 100v + 10u + 1t = 100(t+v) + 20u + (v+t),$$

soit, en remplaçant $(t+v) = (v+t)$ par 9 :

$$S = (100\times\boxed{9}) + (20\times\boxed{9}) + \boxed{9} = 900 + 180 + 9 = \boxed{1089}$$

RÉÉCRITURE…

Les CORRECTIONS ONT-ELLES UNE FIN ?

(d'après R. Monsuy, "Réécriture", La Recherche)

- Un système de réécriture transforme un ensemble de mots automatiquement d'après certaines règles.
- Pour être efficace, une procédure de réécriture doit être rapide et se terminer après un nombre fini d'étapes

Exemple : Le mot "rééécriture" doit être corrigé.

- La règle de correction est : r_1 : éé ⟼ é
- Les étapes de la procédure :

K	mot à corriger	mot corrigé
1	rééécriture	réécriture
2	réécriture	récriture

La procédure se termine mais n'est pas efficace

- On applique une deuxième règle r_2 : é ⟼ éé

1	mot à corriger	mot corrigé
2	récriture	réécriture
3	réécriture	rééécriture
4	rééécriture	réééécriture
⋮	⋮	⋮

La règle r_2 est efficace à l'étape K = 2, mais la procédure ne se termine pas

Aucune des règles r_1 et r_2 ne convient !

05 – Fibonacci : des Nombres et des Mots

Des NOMBRES et des MOTS

... SUITE et MOT de FIBONACCI

• Les nombres de Fibonacci sont les termes de la Suite de Fibonacci :

$$F_n : \begin{cases} F_1 = 1 \ , \ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \ (n \geq 2) \end{cases}$$

Les premiers termes de la suite :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	....
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
F_n	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6785	

• Une propriété des nombres de Fibonacci :

L'entier 1 ajouté à la somme des n premiers termes de la suite de Fibonacci donne le (n+2)ième nombre de Fibonacci :

$$1 + \sum_{i=1}^{n} = F_{n+2}$$

• Mot de Fibonacci

Etant donné un alphabet $A = \{0,1\}$, on appelle **mot (infini) de Fibonacci** la suite définie par :

$$\boxed{\boxed{f_n} : \; f_1 = 1, \; f_2 = 0, \; \underset{(n \geq 2)}{f_n} = f_{n-1} f_{n-2}}$$

• Les premiers mots de Fibonacci sont :

$f_1 = 1$, $f_6 = 01001010$,

$f_2 = 0$, $f_7 = 0100101001001$,

$f_3 = 01$, $f_8 = 010010100100101001010$

$f_4 = 010$, $f_9 = 010010100100101001010\ldots$
0100101001001,

$f_5 = 01001$,

etc.

• On obtient un mot de Fibonacci à partir de l'application

$$\boxed{f_n : \; 0 \mapsto 01, \; 1 \mapsto 0, \text{ avec } f_1 = 1}$$

appelée **morphisme de Fibonacci**.

• La suite des longueurs des MOTS de Fibonacci est exactement la suite des NOMBRES de Fibonacci :

$$\boxed{F_n = |f_n|}$$

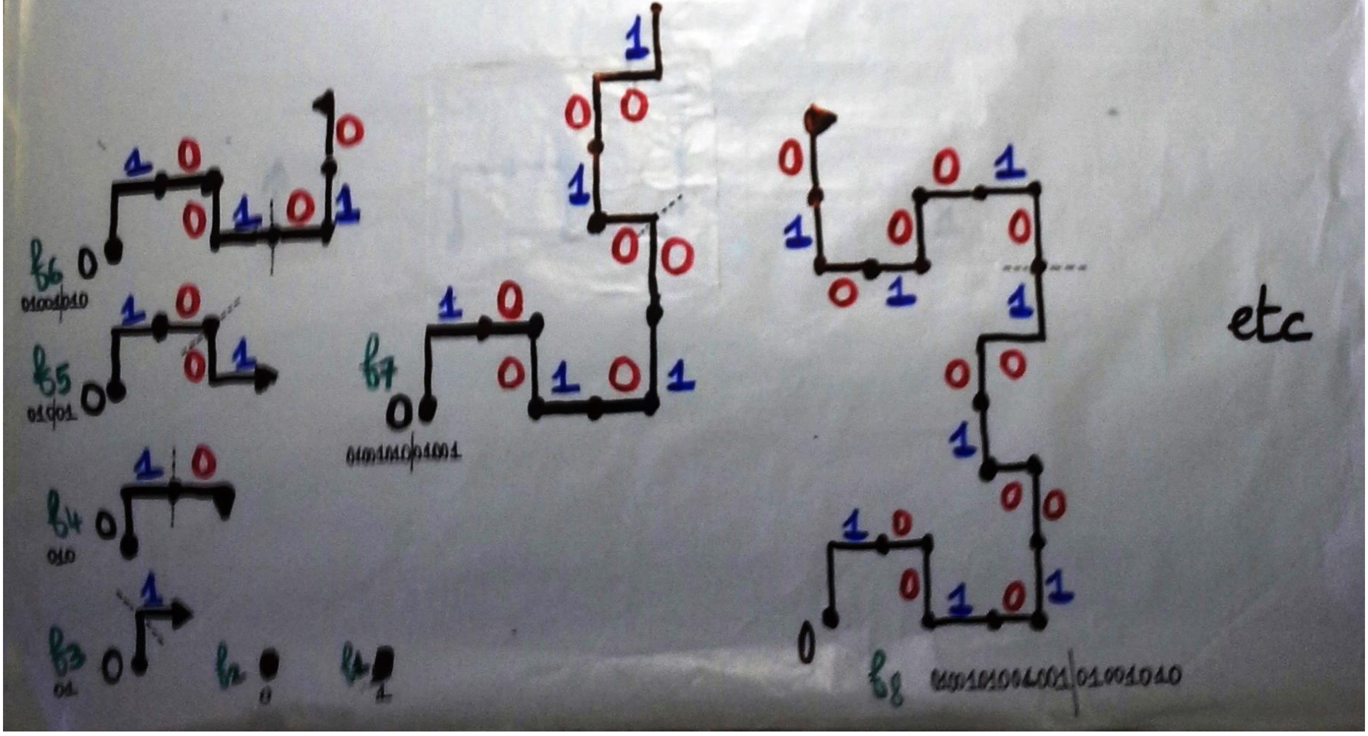
Mot de Fibonacci et FRACTALE

• A partir d'un mot de Fibonacci $\boxed{f_n}$, on obtient la fractale du mot de Fibonacci, $\boxed{\tilde{\mathcal{F}}_n}$, par la procédure suivante :

1) Placer un point dans le plan : c'est le point de départ
2) Si le nième symbole de f_n est un **1**, alors tracer un segment de droite
3) Si le nième symbole de f_n est un **0**, alors tracer un segment de droite et :
   - si n est **PAIR**, alors tourner **A GAUCHE**
   - si n est **IMPAIR**, alors tourner **A DROITE**

...

On réitère les étapes 2) et 3) ....



06– Le Mot de Thue qui contient Thue

MOTS INFINIS :

...THUE, le mot qui contient THUE

- **Construction de la suite de THUE-MORSE**

On appelle suite de [PROUHET-] THUE-MORSE une suite binaire (= sur l'alphabet $A = \{0,1\}$ ou $A = \{a,b\}, \ldots$) dont le nième terme t_n s'obtient par itération du morphisme de Thue-Morse :

$$\boxed{\mu : \begin{cases} 0 \longmapsto 01 \\ 1 \longmapsto 10 \end{cases}}$$

- Les premiers termes de la suite sont, à partir de $\boxed{0}$

$\mu_0(0) = 0$, $\boxed{\mu_1(0) = 01}$, $\mu_2(0) = 01\,10$

$\mu_3(0) = 0110\,1001$

$\mu_4(0) = 01101001\,10010110$

$\mu_5(0) = 0110100110010110\,1001011001101001$

...

- On obtient la suite opposée en partant de $\boxed{1}$:

$\mu_0(1) = 1$, $\boxed{\mu_1(1) = 10}$, $\mu_2(1) = 1001$,

$\mu_3(1) = 1001\,0110$

$\mu_4(1) = 10010110\,01101001$

$\mu_5(1) = 1001011001101001\,0110$
$\quad 100110010110$

On a :

$$\boxed{\begin{array}{l} \boxed{u_{n+1}(0) = u_n(0)\,u_n(1)} \\ \boxed{u_{n+1}(1) = u_n(1)\,u_n(0)} \end{array}}$$

Le mot de THUE de rang n+1 est la concaténation du mot de rang n et de son opposé de rang n

07 – Carrés à Répétition

(1

Les NOMBRES sont des MOTS : Les CARRÉS à RÉPÉTITION

(d'après TANGENTE, n°175, [illegible] 2017, p. 47, [illegible])

- Dans la suite S_1, chaque terme est égal au carré du tiers d'une puissance de 10 arrondi à l'entier

$$S_1 = \boxed{4^2, 34^2, 334^2, 3334^2, 33334^2, \ldots}$$

supérieur. Après calcul des carrés, on obtient la suite S'_1 :

$$S'_1 = \boxed{16, 1156, 111556, 11115556, 1111155556, \ldots}$$

- Expression de S_1 en langage ALGÉBRIQUE

La suite s'exprime par son terme général :

$$\boxed{C_n^2 = \left(\frac{10^n}{3} + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10^{2n}}{9} + \frac{4 \times 10^n}{9} + \frac{4}{9}}$$

EXEMPLES :

- Pour $n=1$, $C_1^2 = \left(\frac{10^1}{3}+\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10^2}{9} + \frac{4\times 10^1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{100}{9} + \frac{40}{9} + \frac{4}{9} = \frac{144}{9} = \boxed{16 = 4^2}$
- Pour $n=2$, $C_2^2 = \left(\frac{10^2}{3}+\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10^4}{9} + \frac{4\times 10^2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{10000}{9} + \frac{400}{9} + \frac{4}{9} = \frac{10404}{9} = \boxed{1156 = 34^2}$
- Pour $n=3$, $C_3^2 = \left(\frac{10^3}{3}+\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10^6}{9} + \frac{4\times 10^3}{9} + \frac{4}{9} = \frac{1000000}{9} + \frac{4000}{9} + \frac{4}{9} = \frac{1004004}{9} = \boxed{111556 = 334^2}$

etc.

• Expression de S_1 par un AUTOMATE

Les termes de la suite S_1 sont des $\boxed{\text{MOTS}}$ obtenus par CONCATÉNATION (notée $\oplus$) :

Etape k	Opération k	Expression obtenue de n_k
1	Ecrire la chaîne "4"	4
2	Ecrire la chaîne de la forme : $\boxed{\text{"3"} \oplus n_{k-1}}$	34
3	idem	334
4	idem	3334
5	idem	33334
6	idem	333334
⋮	⋮	⋮

Cette procédure n'est pas la seule possible...

• Autre <u>AUTOMATE</u> pour exprimer la suite S'_1

Les termes de la suite S'_1, équivalente à la suite S_1, sont des NOMBRES entiers :

Etape k	Opération k	Entier obtenu n_k
1	Ecrire l'entier 4^2	16
2	• Calculer $n_{k-1}-1$ • Insérer la chaîne "$n_{k-1}-1$" entre le premier et le dernier chiffre de la chaîne "n_{k-1}"	15 1156
3	• idem • idem	1155 111556
4	• idem • idem	111555 11115556
5	• idem • idem	11115555 1111155556
⋮	⋮	⋮

• Autre suite de CARRÉS à RÉPÉTITION

La suite S_2, dont chaque terme est égal au carré des deux tiers des puissances de 10 arrondi à l'entier

$$S_2 = \boxed{7^2, 67^2, 667^2, 6667^2, \ldots}$$

supérieur. Le calcul des carrés donne la suite S'_2 :

$$S'_2 = \boxed{49, 4489, 444889, 44448889, \ldots}$$

• La suite S_2 s'exprime algébriquement par :

$$\boxed{d_2^2 = \left(\frac{2\times 10^n}{3} + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4\times 10^{2n}}{9} + \frac{4\times 10^n}{9} + \frac{1}{9}}$$

• Les suites S_2 et S'_2 s'obtiennent par les mêmes procédures AUTOMATIQUES ayant produit les suites S_1 et S'_1.

08 – Les Arbres et la Suite de Prüfer

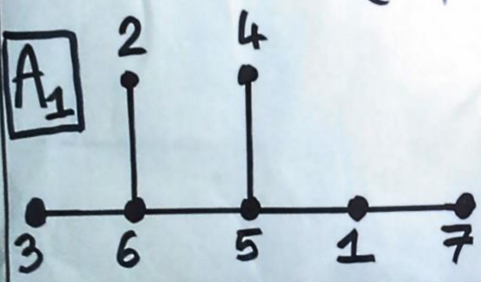
Les ARBRES ont de la SUITE dans les SOMMETS

la SUITE de PRÜFER

• **Construire la suite de Prüfer d'un Arbre étiqueté**

A partir d'un arbre $A_1 = \{1, 2, \dots, 6, 7\}$ de $n = 7$ sommets, par exemple, on construit une suite de Prüfer P de $n-2 = 5$ termes

① Chercher dans l'arbre A_1 les sommets de degré 1 (auxquels n'aboutit qu'1 arête) : ce sont les sommets : 3, 2, 4 et 7

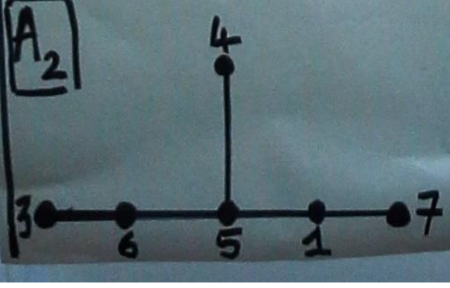


• Retenir le sommet qui a la plus petite étiquette ; c'est : 2

② Chercher le sommet adjacent à 2. C'est le sommet 6, qui devient le 1er terme de la suite de Prüfer :

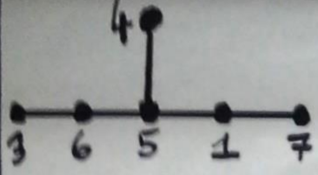
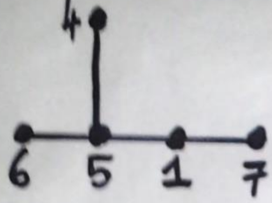
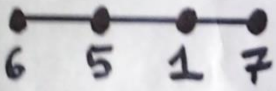
$$\boxed{P = (6, ?, ?, ?, ?)}$$

③ Supprimer dans $\boxed{A_1}$ le sommet 2 et l'arête (2, 6) ; on obtient l'arbre $\boxed{A_2} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$



④ On réitère les opérations ① à ③ jusqu'à obtenir un arbre $\boxed{A_{n-2}}$ qui n'ait plus que 2 sommets.

• Les étapes suivantes sont donc :

K	Arbre A_K	Sommets de degré 1	Plus Petite Etiquette et sommet adjacent	Branche à supprimer	Suite de PRÜFER
2		3,4,7	3 et 6	(3,6)	(6,6,?,?,?)
3		4,6,7	4 et 5	(4,5)	(6,6,5,?,?)
4		6,7	6 et 5	(6,5)	(6,6,5,5,?)
5		5,7	5 et 1	(5,1)	(6,6,5,5,1)

Ici, la construction de la suite de Prüfer est terminée, à l'étape $K = n-2 = 7-2 = 5$, car l'arbre obtenu n'a plus que 2 sommets.
La suite de Prüfer de l'arbre A_1 contient $n-2 = 5$ termes et vaut :

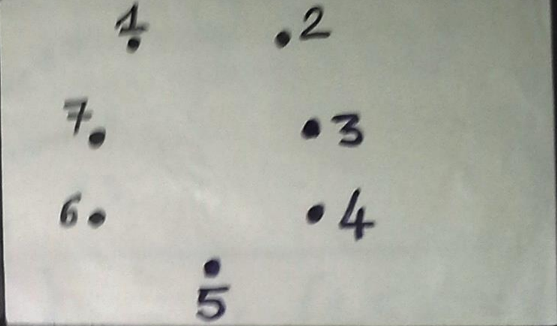
$$\boxed{P = (6,6,5,5,1)}$$

• A partir de la suite de Prüfer $P = (6,6,5,5,1)$, on peut construire l'arbre $\boxed{A_1}$ correspondant.

• <u>Construire un ARBRE à partir d'une SUITE de PRÜFER</u>

On part de la suite de Prüfer $\boxed{P_1=(6,6,5,5,1)}$ de $n-2=5$ termes.

① On place dans le plan les $n=7$ sommets de l'arbre à construire. La liste des sommets est $\boxed{L_1=(1,2,3,4,5,6,7)}$:



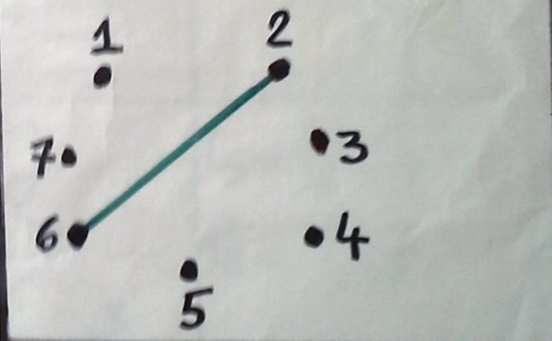
② On choisit :

- dans la liste L_1, <u>le plus petit nombre qui ne soit pas aussi dans la suite P_1</u> : 2
- dans la suite P_1, <u>le premier nombre</u> : 6

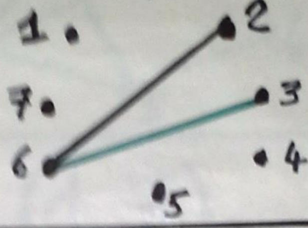
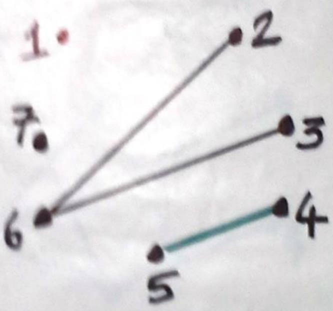
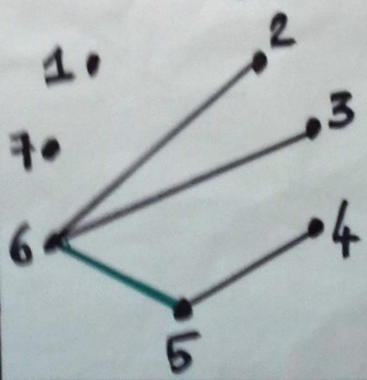
③ On trace l'<u>arête joignant les sommets</u> 2 et 6 :

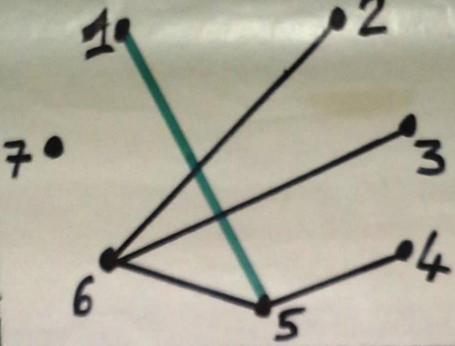
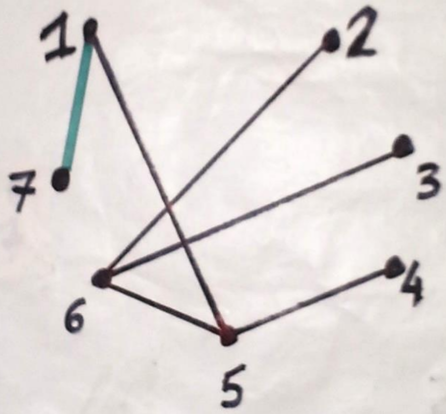
④ On supprime de la liste L_1 le terme 2 et de la suite P_1 le terme 6, ce qui donne :

- nouvelle liste $\boxed{L_2=(1,3,4,5,6,7)}$
- nouvelle suite $\boxed{P_2=(6,5,5,1)}$



⑤ On réitère les opérations ② à ④ à partir de la liste L_2 et de la suite P_2 jusqu'à obtenir une suite P_k <u>vide</u>.

K	Plus petit nombre de la liste L_K qui n'est pas dans la suite P_K	Arête de l'Arbre A_K	Nouvelle Liste L_{K+1} Nouvelle Suite P_{K+1}
2	$L_2=(1,3,4,5,6,7)$ $P_2=(6,5,5,1)$	$(3,6)$ 	$L_3=(1,4,5,6,7)$ $P_3=(5,5,1)$
3	$L_3=(1,4,5,6,7)$ $P_3=(5,5,1)$	$(4,5)$ 	$L_4=(1,5,6,7)$ $P_4=(5,1)$
4	$L_4=(1,5,6,7)$ $P_4=(5,1)$	$(6,5)$ 	$L_5=(1,5,7)$ $P_5=(1)$
⋮	⋮	⋮	⋮

5	$L_5=(1,5,7)$ $P_5=(1)$	$(5,1)$ 	$L_6=(1,7)$ $P_6=\emptyset$
6	$L_6=(1,7)$ $P_6=\emptyset$	$(1,7)$ 	La procédure est terminée : – la liste L_6 ne contient plus que 2 termes – la suite P_6 est vide