1 Réécriture – la correction a-t-elle une fin ?

• Mot : $m_1 = 101101$

	k	
$r_1 : 01 \mapsto 10$		$r_2 : 11 \mapsto 1$
$1\boxed{01}101$	1	$10\boxed{11}01$
$11\boxed{01}01$	2	$\boxed{10101}$
$1110\boxed{01}$	3	
$111\boxed{01}0$	4	
$\boxed{111100}$	5	
La procédure s'arrête à l'étape $k=5$		La procédure s'arrête à l'étape $K=2$

- mot $m_2 = 11101110$

$r_1 : 01 \longmapsto 10$	K	$r_2 : 11 \longmapsto 1$
$111\boxed{01}110$	1	$\boxed{11}101110$
$1111\boxed{01}10$	2	$\boxed{11}01110$
$11111\boxed{01}0$	3	$10\boxed{11}10$
11111100	4	$10\boxed{11}0$
La procédure (se) termine à l'étape K = 4	5	1010
		La procédure termine à K=5

(2) Palindrome par retournement-addition

$$
\begin{array}{r}
 1925 \\
+\ 5295 \\
\hline
 7220 \\
+\ 0227 \\
\hline
\boxed{7447}
\end{array}
$$

(3) Trouver les Palindromes

n	$\tilde{n}$
1724	4271
8713	3178
29	92
101	101
3647	7463
94	49

(4) Palindrome par retournement - addition

$$\begin{array}{r} 1000 \\ +\ 0001 \\ \hline \boxed{1001} \end{array}$$

(5) Réécriture – Procédure qui "termine" ou non.

$m_5 = 10101110101110$

$r_5 : 10 \mapsto 0$

K	
1	$\boxed{10}\ 10\ 1110\ 10\ 1110$
2	$0\ \boxed{10}\ 1110101110$
3	$0\ 0\ 11\boxed{10}\ 101110$
4	$0\ 0\ 1\boxed{10}\ 101110$
5	$0\ 0\ \boxed{10}\ 101110$
6	$0\ 0\ 0\ \boxed{10}\ 1110$
7	$0\ 0\ 0\ 0\ 11\boxed{10}$
8	$0\ 0\ 0\ 0\ 1\boxed{10}$
9	$0\ 0\ 0\ 0\ \boxed{10}$
10	$0\ 0\ 0\ 0\ 0$

la dernière étape est $K = 10$

(6) Palindrome par retournement-addition

$$
\begin{array}{r}
14500 \\
+\ 00541 \\
\hline
15041 \\
+\ 14051 \\
\hline
\boxed{29092}
\end{array}
$$

(7) Douze, ses diviseurs et ses multiples

- L'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 24, 36, 48, \ldots$
  $\ldots, 60, 72, 84, 96\}$ contient les entiers diviseurs 1, 2, 3, 4, 6, 12, diviseurs de 12, et les entiers 12, 24, 36, 48, 72, 84, 96, multiples de 12.

La somme des chiffres des éléments de E est :

$n \in E$	$\sum c_i$	$n \in E$	$\sum c_i$
1	1	24	6
2	2	36	9
3	3	48	$\boxed{12}$
4	4	60	6
6	6	72	9
12	3	84	$\boxed{12}$
		96	15

On voit que 48 et 84 sont les multiples de 12 dont la somme des chiffres est : $4+8=8+4=\underline{12}$.
Le plus petit est 48 et le plus grand 84

- <u>Codage du mot DOUZE</u>. Codages possibles :

D	4	44	D	24	24	D	3	45	D	4	44
O	6	38	O	12	12	O	1	44	O	24	20
U	32	6	U	6	6	U	2	42	U	12	8
Z	4	2	Z	4	2	Z	6	36	Z	2	6
E	2	0	E	2	0	E	36	0	E	6	0

8 Palindrome par retournement-addition

$$
\begin{array}{r}
9494 \\
+\ 4949 \\
\hline
14443 \\
+\ 34441 \\
\hline
\boxed{48884}
\end{array}
$$

9 Palindrome par retournement-addition

$$
\begin{array}{r}
5248 \\
+\ 8425 \\
\hline
13673 \\
+\ 37631 \\
\hline
51304 \\
+\ 40315 \\
\hline
\boxed{91619}
\end{array}
$$

(10) Commentaires de 1

- la règle appliquée est la suivante :

(i) On part du nombre 1 qu'on écrit :

ligne 1	1

(ii) On "commente" ce qu'on vient d'écrire, i.e. on répond à la question "qu'est-ce que c'est ?" en disant "c'est un un", ce qu'on écrit : 11 ; on a donc :

ligne 1	1
ligne 2	1 1

(iii) On continue de "commenter" ce qui vient d'être écrit en ligne 2 et on écrit : 21 ("deux un") :

ligne 1	1
ligne 2	1 1
ligne 3	2 1

En répétant la procédure ci-dessus, à partir de la ligne 3, on obtient les "commentaires de 1" suivants :

1	1	
2	1	1
3	2	1
4	1 2	1 1
5	1 1 1	2 2 1
6	3 1 2	2 1 1
7	1 3 1 1	2 2 2 1
8	1 1 1 3 2	1 3 2 1 1
9	3 1 1 3 1 2 1	1 1 3 1 2 2 1

etc.

•• le nombre qui reste inchangé quand on le commente, suivant la procédure décrite en (i)-(iii), est : $\boxed{22}$

22 s'écrit avec deux chiffres 2 ;
son commentaire est donc : 22 ("deux deux").

<u>L'entier 22 est identique à son commentaire</u>

C'est le seul nombre à deux chiffres dans ce cas avec 11, qui se lit "un un".

11 Récriture – la Correction a-t-elle une fin ?

$m_3 = 11101110$

$r_3 : \; 10 \mapsto 01$

k	
1	1 1 $\boxed{1\ 0}$ 1 1 1 0
2	1 $\boxed{1\ 0}$ 1 1 1 1 0
3	$\boxed{1\ 0}$ 1 1 1 1 1 0
4	0 1 1 1 1 1 $\boxed{1\ 0}$
5	0 1 1 1 1 $\boxed{1\ 0}$ 1
6	0 1 1 1 $\boxed{1\ 0}$ 1 1
7	0 1 1 $\boxed{1\ 0}$ 1 1 1
8	0 1 $\boxed{1\ 0}$ 1 1 1 1
9	0 $\boxed{1\ 0}$ 1 1 1 1 1
10	0 0 1 1 1 1 1 1

La procédure "termine" à la $k=10$ème étape

12) Palindrome par retournement - addition

$$
\begin{array}{r}
349 \\
+\ 943 \\
\hline
1292 \\
+\ 2921 \\
\hline
4213 \\
+\ 3124 \\
\hline
\boxed{7337}
\end{array}
$$

13) Palindrome par retournement - addition

$$
\begin{array}{r}
110 \\
+\ 011 \\
\hline
\boxed{121}
\end{array}
$$

14) Le carré d'un palindrome est-il un palindrome ?

Le mot $m = 101$ est un palindrome et son carré $m^2 = mm = 101101$ en est un aussi. De même, par exemple, pour $n = 7337$, dont le carré est $n^2 = 73377337$.

(15) Palindrome par retournement - addition

$$\begin{array}{r} 160110 \\ +\ 011061 \\ \hline \boxed{171171} \end{array}$$

(16) Les mots sont des nombres

Dans cette comptine apparaissent en toutes lettres des nombres qui sont des puissances de 7 :

$7^0 = 1$: "...un homme..."

$7^1 = 7$: "... ses sept. femmes"

$7^2 = 49$: "chaque femme avait sept sacs"

$7^3 = 343$: "chaque sac avait sept chats"

$7^4 = 2401$: "chaque chat avait. sept chatons"

La réponse à la question "Combien viennent de ST. Yves?" est donc :

$7^0+7^1+7^2+7^3+7^4 = 1+7+49+343+2401 = \boxed{2801}$

(17) Palindrome par retournement-addition

$$\begin{array}{r} 94 \\ +\ 49 \\ \hline 143 \\ +\ 341 \\ \hline \boxed{484} \end{array}$$

(18) 1089... Encore et Toujours

- Le miroir de $n = 753$ est $\tilde{n} = 357$; la différence $d = |n - \tilde{n}| = 753 - 357 = 396$ a pour miroir $\tilde{d} = 693$. La somme $S = d + \tilde{d}$ vaut donc :

$$\boxed{S = d + \tilde{d} = 396 + 693 = 1089}$$

- Si l'on choisit un nombre, par exemple $n = 641$, on vérifie que c'est un nombre à 3 chiffres pour lequel la différence entre le 1^{er} et le $3^{ème}$ chiffre est égale ou supérieure à 2 : $6 - 1 = 5$

Le renversé (miroir, symétrique) de $n = 641$ est

$$\tilde{n} = \boxed{146}$$

La différence $|n - \tilde{n}|$ vaut

$$d = |n - \tilde{n}| = 641 - 146 = \boxed{495}$$

Le miroir de d est :

$$\tilde{d} = \boxed{594}$$

La somme de d et de $\tilde{d}$ vaut :

$$S = d + \tilde{d} = 495 + 594 = \boxed{1089}$$

(28) Palindrome par retournement-addition

$$\begin{array}{r} 6752 \\ +\ 2572 \\ \hline 9324 \\ +\ 4239 \\ \hline 13563 \\ +\ 36531 \\ \hline 50094 \\ +\ 49005 \\ \hline \boxed{99099} \end{array}$$

(29) Palindrome par retournement-addition

28476767482

Ce mot est un palindrome. L'opération retournement-addition n'a pas lieu d'être exécutée.

30 Phrases palindromes à trouver

Phrases palindromes

Tu l'as trop écrasé César ce port salut

Et la marine va venir à Malte

Zeus a été à Suez

Esope reste ici et se repose

A l'autel elle alla, elle le tua là

Karine alla en Irak

Engage le jeu que je le gagne.

31 Palindrome par retournement-addition

$$
\begin{array}{r}
193 \\
+\ 391 \\
\hline
584 \\
+\ 485 \\
\hline
1069 \\
+\ 9601 \\
\hline
10670 \\
+\ 07601 \\
\hline
18271 \\
+\ 17281 \\
\hline
35552 \\
+\ 25553 \\
\hline
61105 \\
+\ 50116 \\
\hline
111221 \\
+\ 122111 \\
\hline
\boxed{233332}
\end{array}
$$

32 Palindrome par retournement - additions

$$
\begin{array}{r}
6789 \\
+\ 9876 \\
\hline
16665 \\
+\ 56661 \\
\hline
73326 \\
+\ 62337 \\
\hline
135663 \\
+\ 366531 \\
\hline
502194 \\
+\ 491205 \\
\hline
\boxed{993399}
\end{array}
$$

(33) PALINDROME par retournement-addition

$$\begin{array}{r} 166 \\ +\ 661 \\ \hline 827 \\ +\ 728 \\ \hline 1555 \\ +\ 5551 \\ \hline 7106 \\ +\ 6017 \\ \hline 13123 \\ +\ 32131 \\ \hline \boxed{45254} \end{array}$$

(34) Palindrome par retournement-addition

$$\begin{array}{r} 188 \\ +\ 881 \\ \hline 1069 \\ +\ 9601 \\ \hline 10670 \\ +\ 07601 \\ \hline 18271 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18271 \\ +\ 17281 \\ \hline 35552 \\ +\ 25553 \\ \hline 61105 \\ +\ 50116 \\ \hline 111221 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111221 \\ +\ 122111 \\ \hline \boxed{233332} \end{array}$$

(35) Palindrome par retournement - addition

$$
\begin{array}{r}
63281 \\
+\ 18236 \\
\hline
81517 \\
+\ 71518 \\
\hline
153035 \\
+\ 530351 \\
\hline
\boxed{683386}
\end{array}
$$

(36) Palindrome par retournement - addition

$$
\begin{array}{r}
5259 \\
9525 \\
\hline
14784 \\
48741 \\
\hline
63525 \\
52536 \\
\hline
116061 \\
160611 \\
\hline
\boxed{276672}
\end{array}
$$

(37) Suite de Fibonacci

Les éléments de la suite de Fibonacci, pour $n=1$ à $n=30$.

n	F_n	n	F_n
1	1	16	987
2	1	17	1597
3	2	18	2584
4	3	19	4181
5	5	20	6765
6	8	21	10946
7	13	22	17711
8	21	23	28657
9	34	24	46368
10	55	25	75025
11	89	26	121393
12	144	27	196418
13	233	28	317811
14	377	29	514229
15	610	30	832040

On a aussi : $F_0 = 0$, par convention.

(38) Les entiers de la suite de Fibonacci

On applique la définition de la suite

$n=1$, $\boxed{F_1 = 1}$,

$n=2$, $\boxed{F_2 = 1}$

A partir du rang $n=3$, chaque terme est la somme des deux termes précédents, ce qui se traduit par la formule de récurrence : $\boxed{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}}$

On a donc :

n	F_n	F_{n-1}	F_{n-2}	$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
3	F_3	F_2	F_1	$F_3 = F_2 + F_1 = 1+1 = 2$
4	F_4	F_3	F_2	$F_4 = F_3 + F_2 = 2+1 = 3$
5	F_5	F_4	F_3	$F_5 = F_4 + F_3 = 3+2 = 5$
6	F_6	F_5	F_4	$F_6 = F_5 + F_4 = 5+3 = 8$
7	F_7	F_6	F_5	$F_7 = F_6 + F_5 = 8+5 = 13$
8	F_8	F_7	F_6	$F_8 = F_7 + F_6 = 13+8 = 21$
9	F_9	F_8	F_7	$F_9 = F_8 + F_7 = 21+13 = 34$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

| KFM | ST SULPICE - 2017 | EXOS-S | 38 | 2 |

k	F_n	F_{n-1}	F_{n-2}	$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
10	F_{10}	F_9	F_8	$F_{10} = F_9 + F_8 = 34 + 21 = 55$
11	F_{11}	F_{10}	F_9	$F_{11} = F_{10} + F_9 = 55 + 34 = 89$
12	F_{12}	F_{11}	F_{10}	$F_{12} = F_{11} + F_{10} = 89 + 55 = 144$
13	F_{13}	F_{12}	F_{11}	$F_{13} = F_{12} + F_{11} = 144 + 89 = 233$
14	F_{14}	F_{13}	F_{12}	$F_{14} = F_{13} + F_{12} = 233 + 144 = 377$
15	F_{15}	F_{14}	F_{13}	$F_{15} = F_{14} + F_{13} = 377 + 233 = 610$
16	F_{16}	F_{15}	F_{14}	$F_{16} = F_{15} + F_{14} = 610 + 377 = 987$
17	F_{17}	F_{16}	F_{15}	$F_{17} = F_{16} + F_{15} = 987 + 610 = 1597$
18	F_{18}	F_{17}	F_{16}	$F_{18} = F_{17} + F_{16} = 1597 + 987 = 2584$

(39) Une propriété de la suite de Fibonacci

Pour répondre à la question posée, il faut connaître les premiers termes ; de $n=1$ à $n=10$, de la suite de Fibonacci (voir exo 37). On vérifie la propriété

n	F_n	$\sum_1^n =$	$1+\sum_1^n = F_{n+2}$
1	1	1	
2	1	2	
3	2	4	$1+\sum_1^3 F_n = 1+4 = 5 = F_5$
4	3	7	$1+\sum_1^4 F_n = 1+7 = 8 = F_6$
5	5	12	$1+\sum_1^5 F_n = 1+12 = 13 = F_7$
6	$\boxed{8}$	20	$1+\sum_1^6 F_n = 1+20 = 21 = F_8$
7	13	33	$1+\sum_1^7 F_n = 1+33 = 34 = F_9$
8	$\boxed{21}$	54	$1+\sum_1^8 F_n = 1+54 = 55 = F_{10}$
9	34	88	$1+\sum_1^9 F_n = 1+88 = 89 = F_{11}$
10	$\boxed{55}$	143	$1+\sum_1^{10} F_n = 1+143 = 144 = F_{12}$
11	89	232	$1+\sum_1^{11} F_n = 1+232 = 233 = F_{13}$
12	$\boxed{144}$	376	$1+\sum_1^{12} F_n = 1+376 = 377 = F_{14}$

sur le tableau ci-dessus.

(40) Fibonacci et Zeckendorf

On a, d'après la suite des nombres de Fibonacci * :

n	$\sum F_n$	n	$\sum F_n$
2	F_3	11	F_4+F_6
3	F_4	12	$F_2+F_4+F_6$
4	F_1+F_3	13	F_7
5	F_5	14	F_2+F_7
6	F_2+F_5	15	F_3+F_7
7	F_3+F_5	16	F_4+F_7
8	F_6	17	$F_2+F_4+F_7$
9	F_2+F_6		
10	F_3+F_6		

(*) Voir exo 37

41 T'es anagramme, donc tu permutes

Les mots de l'ensemble M se répartissent comme suit*:

rue	ure
barre	arbre
sapeur	pauser
argent	gérant
migraine	imaginer
poule	loupe
cacher	crécha
machine	chemina
aube	beau
maison	aimons

---

* On peut consulter le site "anagrammeur.com" pour vérifier ces anagrammes et en trouver de moins courantes.

(42) Anagrammes célèbres ... et politiques

Ces anagrammes sont tirées du site dcode.fr, qui en propose bien d'autres.

Laurent Fabius	Naturel abusif
Lionel Jospin	Le joli pinson
François Hollande	Hollandais en froc
François Bayrou	Farcir son boyau

(43) Des CARRES et des CUBES dans les MOTS

- Avec deux lettres de l'alphabet $A = \{a, b, c\}$, les seuls mots sans carré sont :
  - les mots d'1 lettre : a, b, c
  - les mots de 2 lettres : ab, ba, ac, ca, bc, cb, i.e. les $3! = 6$ permutations de 2 lettres de A

- Mots contenant au moins un carré, un cube

- $m_1 =$ abcacbabcbaca ; ce mot ne contient aucun carré, ni aucun cube.
- $m_2 =$ caabccbb ; ce mot ne contient aucun cube ; il contient les carrés aa, cc, bb
- $m_3 =$ ccaabbabc ; ce mot ne contient aucun cube ; il contient les carrés cc, aa, bb
- $m_4 =$ abcabccbbb ; ce mot contient deux carrés : cc et bb et un cube : bbb

- m_5 = accaaabb ; ce mot contient 3 carrés : cc, aa et bb ; il contient 1 cube : aaa

- m_6 = bcaabba ; ce mot contient 2 carrés : aa et bb ; il ne contient aucun cube.

(44) Palindrome... le miroir du miroir d'un mot

• Donnons deux exemples de l'égalité $\boxed{\widetilde{\widetilde{m}} = m}$, qui peut se lire : "le miroir du miroir d'un mot m est ce mot m"

(i) le mot $m_1 = caabcc$ a pour miroir :

$$\widetilde{m_1} = ccbaac$$; si on prend le miroir de $\widetilde{m_1}$, on obtient :

$$\widetilde{\widetilde{m_1}} = \widetilde{ccbaac} = caabcc = m_1$$

(ii) le palindrome numérique

$$m_2 = 7337$$

a pour miroir :

$$\widetilde{m_2} = 7337$$

et le miroir du miroir de m_2 est :

$$\widetilde{\widetilde{m_2}} = \widetilde{7337} = 7337$$

On voit que :

Si m est un palindrome, on a :

$$\boxed{m = \widetilde{m} = \widetilde{\widetilde{m}}} \qquad [1]$$

- Si m et n sont des mots, l'égalité

$$\boxed{\widetilde{mn} = \widetilde{n}\,\widetilde{m}} \qquad [2]$$

est vérifiée.

Par exemple : m = machin, n = truc

On a : $\widetilde{m}$ = nihcam et $\widetilde{n}$ = curt,

$$\widetilde{mn} = \widetilde{\text{machintruc}} = \underbrace{\text{curt}}_{\widetilde{n}}\ \underbrace{\text{nihcam}}_{\widetilde{m}}$$

$$= \widetilde{n} \quad \widetilde{m}$$

En général, l'égalité

$$\boxed{\widetilde{mn} = \widetilde{m}\,\widetilde{n}} \qquad Z \qquad [3]$$

n'est pas vérifiée !

$\widetilde{mn} = \widetilde{\text{machintruc}}$ = curtnihcam

et $\widetilde{m}\,\widetilde{n}$ = nihcamcurt

• Si m est un mot quelconque (non vide), le mot $m\tilde{m}$ est-il un palindrome ?

Si $m\tilde{m}$ est un palindrome, on doit avoir :

$$\boxed{m\tilde{m} = \widetilde{m\tilde{m}}}$$

Exemple : $m = \text{truc}$, $\tilde{m} = \text{curt}$ et

$$m\tilde{m} = \text{truc}\vdots\text{curt} = \widetilde{m\tilde{m}} = \widetilde{\text{truc}\vdots\text{curt}}$$

$$= \text{truc}\vdots\text{curt}$$

Et de fait, on a, d'après [2] :

$$\widetilde{m\tilde{m}} = \tilde{\tilde{m}}\,\tilde{m}$$, d'où, d'après [1] :

$$\boxed{\widetilde{m\tilde{m}} = m\tilde{m}}$$, ce qui est bien la définition d'un palindrome.

(45) Un écrivain perdu chez les nombres premiers

Pour vérifier si la formule de Marcel Pagnol

$$\boxed{x \text{ impair} \geq 3 : \left(x+(x+2)\right) + x(x+2) = p}$$

produit ou non tous les nombres p premiers, on va voir qu'il suffit de l'appliquer aux premières valeurs de $x \in \mathbb{N}$.

x	$x+2$	$x+(x+2)$	$x(x+2)$	$(x+(x+2))+x(x+2)$
1	3	4	3	$\boxed{7}$
2	4	6	8	14
3	5	8	15	$\boxed{23}$
4	6	10	24	34
5	7	12	35	$\boxed{47}$
6	8	14	48	62
7	9	16	63	$\boxed{79}$
8	10	18	80	98
9	11	20	99	119
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Les lignes du tableau où x est pair montrent que la condition "x impair" est nécessaire ; mais la formule est mise en défaut dès la valeur $x = 9$, puisque $119 = 7 \times 17$ n'est pas premier.

46 Mot INFINI et Suite Caractéristique des Nombres Premiers

Le mot infini appelé "suite caractéristique des nombres

$$p = (p_n)_{n \geq 1} = 0110101000101000101\ldots$$

premiers" est en effet par construction une suite qui "caractérise" les entiers premiers : le $n$ième terme de (p_n) est :
- un "1", si l'entier n est premier
- un "0", si l'entier n n'est pas premier :

n	p_n	Entier PREMIER
1	0	-
2	0 1	2
3	0 1 1	3
4	0 1 1 0	-
5	0 1 1 0 1	5
6	0 1 1 0 1 0	-
7	0 1 1 0 1 0 1	7
8	0 1 1 0 1 0 1 0	-
9	0 1 1 0 1 0 1 0 0	-
10	0 1 1 0 1 0 1 0 0 0	-
11	0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 1	11
⋮	⋮	⋮

(45) Un écrivain perdu chez les nombres premiers

Pour vérifier si la formule de Marcel Pagnol

$$\boxed{x \text{ impair } \geqslant 3 : \quad (x+(x+2)) + x(x+2) = p}$$

produit ou non tous les nombres p premiers, on va voir qu'il suffit de l'appliquer aux premières valeurs de $x \in \mathbb{N}$.

x	$x+2$	$x+(x+2)$	$x(x+2)$	$(x+(x+2))+x(x+2)$
1	3	4	3	$\boxed{7}$
2	4	6	8	14
3	5	8	15	$\boxed{23}$
4	6	10	24	34
5	7	12	35	$\boxed{47}$
6	8	14	48	62
7	9	16	63	$\boxed{79}$
8	10	18	80	98
9	11	20	99	119
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Les lignes du tableau où x est pair montrent que la condition "x impair" est nécessaire ; mais la formule est mise en défaut dès la valeur $x = 9$, puisque $119 = 7 \times 17$ n'est pas premier.

46 Mot INFINI et Suite Caractéristique des Nombres Premiers

Le mot infini appelé "suite caractéristique des nombres

$$p = (p_n)_{n \geq 1} = 0110101000101000101\ldots$$

premiers" est en effet par construction une suite qui "caractérise" les entiers premiers : le nième terme de (p_n) est :

- un "1", si l'entier n est premier
- un "0", si l'entier n n'est pas premier :

n	p_n	Entier PREMIER
1	0	-
2	01	2
3	011	3
4	0110	-
5	01101	5
6	011010	-
7	0110101	7
8	01101010	-
9	011010100	-
10	0110101000	-
11	01101010001	11
⋮	⋮	⋮

(47) Les PALINDROMES sont dans les ARBRES

On peut représenter un mot w sous la forme d'un arbre de palindromes(+). Cet arbre se définit comme suit(*) :

[1]

> Soit w un mot. Alors l'arbre des palindromes de w est l'arborescence dont les sommets sont donnés par les éléments de l'ensemble $P(w)$ des palindromes du mot w, ainsi qu'un sommet distingué supplémentaire appelé racine. De plus, il existe un arc de la racine vers ε (mot vide) et chacune des lettres de w. Finalement nous avons un arc du sommet p vers le sommet q si, pour une certaine lettre α, on a l'égalité : $\boxed{q = \alpha p \alpha}$

Rappelons que l'on peut définir une relation d'ordre entre deux mots u et v, qu'on peut appeler "u est facteur de v" et qui peut se "restreindre" à l'ensemble P des palindromes de la manière suivante :

(+) Voir : BLONDIN-MASSÉ A., "Sur le défaut palindromique des mots infinis", p. 7-9 (*) Op. cit., p. 8, Définition 2 (Δ) cf. MOT-1-1- ,

[2] Soient p et q deux palindromes. Nous écrivons $\boxed{p \precsim q}$ s'il existe un mot x tel que :

$$\boxed{q = x p \tilde{x}}$$

Le mot p est appelé facteur palindromique central du mot q

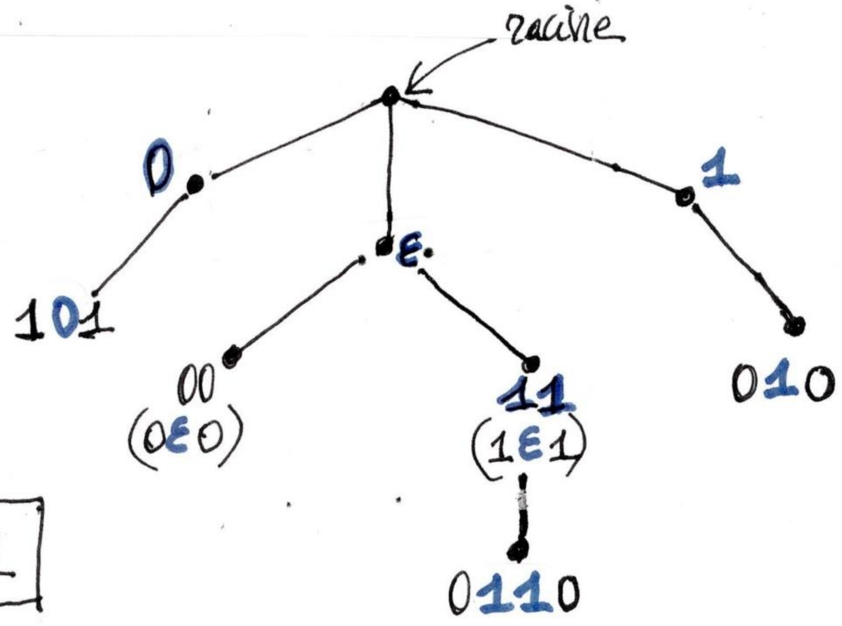
Au sujet de la relation $\precsim$, on a le résultat suivant :

[3] La relation $p \precsim q$, où p et q sont des palindromes, est un ordre partiel (mais ce n'est pas un ordre total)

$\boxed{\text{Exemple 1}}$: • le mot $\boxed{u = 00101100}$, sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$ peut se représenter par un arbre des palindromes. Les palindromes qu'on peut former avec les éléments (sous-mots) de u sont, en plus de ε (mot vide), les suivants :

$$\{0, 1, 00, 11, 010, 101, 0110, \varepsilon\} = \mathbb{P}(u)$$

• Pour tracer l'arbre représentant $P(u)$, on place d'abord le point "racine", puis l'on trace les arcs partant de



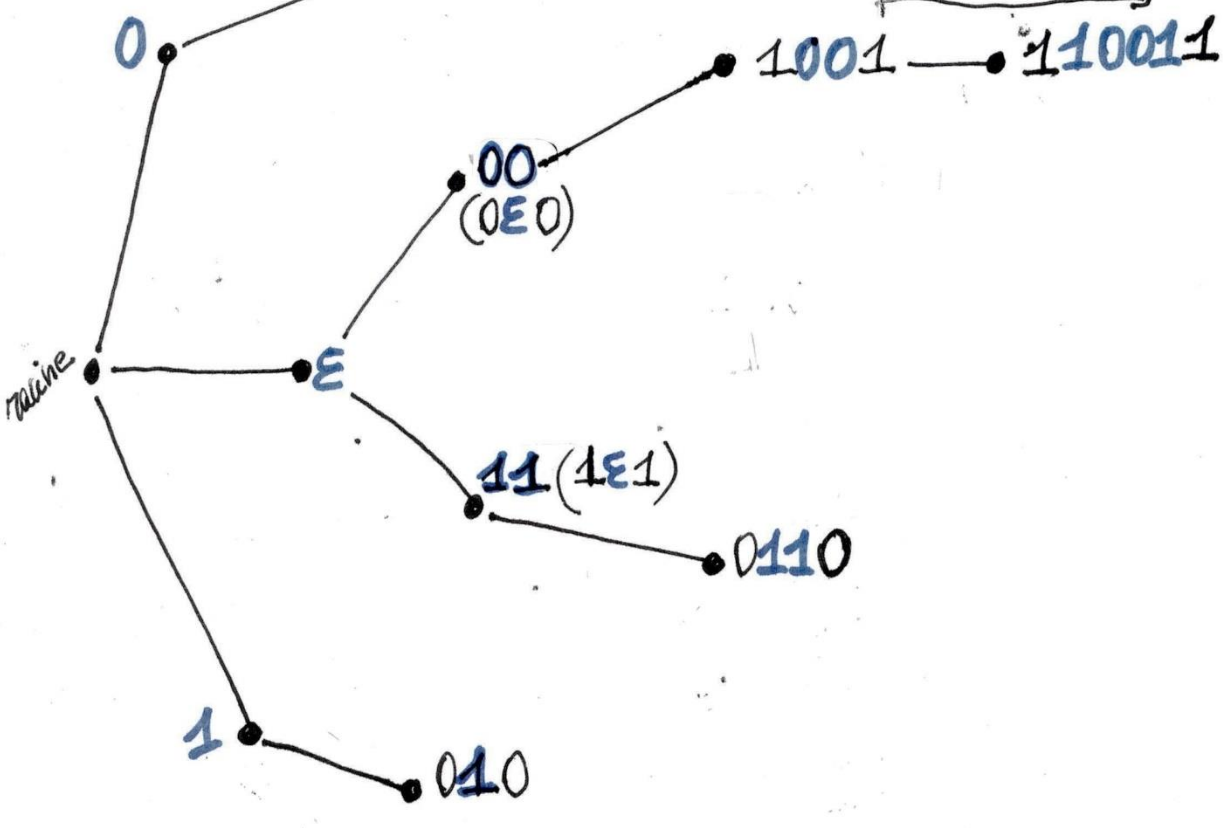
Arbre 1

ce point vers les sommets 0 et 1 et vers le mot vide ε. L'arc de 0 à 101, par exemple, correspond à l'inclusion $0 \subset 101$, où 0 est le facteur palindromique central. De même, l'arc de 11 à 0110 correspond à l'inclusion $11 \subset 0110$, où 11 est le facteur palindromique central... Etc. En revanche, le mot vide, qui est le facteur palindromique central de $00 = 0\varepsilon 0$ et de $11 = 1\varepsilon 1$, ne l'est pas des mots 101 et 010 ; il l'est, par transitivité, du mot $0110 = 01\varepsilon 10$. On voit que l'arbre des palindromes de $u = 0010 1100$ représente bien un <u>ordre partiel</u>.

Exemple 2 Soit le mot $\boxed{u = 01100101}$; l'ensemble des palindromes sur u est :

$$P(u) = \{0, 1, 00, 11, 010, 101, 0110, 1001, 110011, \varepsilon\}$$

Arbre 2



48 PALINDROME et BASE de NUMERATION

- 87_{10} devient un palindrome après $K = 4$ étapes de l'opération "retournement + addition"

$$
\begin{array}{r}
87 \\
+\ 78 \\
\hline
165 \\
+\ 561 \\
\hline
726 \\
+\ 627 \\
\hline
1353 \\
+\ 3531 \\
\hline
\boxed{4884}
\end{array}
$$

- En base $b=8$, 87_{10} devient $\boxed{127_8}$:

base 10		8^2	8^1	8^0
		64	8	1
retenue	1	–	1	–
base 8		1	2	7

$$
\begin{array}{r}
\boxed{1\ 2\ 7} \\
+\ 7\ 2\ 1 \\
\hline
1\ 0\ 5\ 0 \\
+\ 0\ 5\ 0\ 1 \\
\hline
\boxed{1\ 5\ 5\ 1}
\end{array}
$$

127_8 produit un palindrome 1551_8 en $K=2$ étapes

• En base $b = 9$, 87_{10} devient : $\boxed{106_9}$

	9^2	9^1	9^0
base 10	81	9	1
retenue	–	–	–
base 9	1	0	6
+	6	0	1
	7	0	7

106_9 devient un palindrome 707_9 en $K=1$ étape

• En base $b=2$, 87_{10} s'écrit : $\boxed{1010111_2}$

	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
base 10	64	32	16	8	4	2	1
retenue 1	1	1		1	1	1	
base 2	1	0	1	0	1	1	1
+	1	1	1	0	1	0	1

	1	1	0	0	1	1	0	0
+	0	0	1	1	0	0	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1

et devient un palindrome en $K = 2$ étapes.

• 196_{10} serait le plus petit entier qui ne donne jamais de palindrome après application autant de fois que l'on veut de l'opération "retournement + addition" : c'est la conjecture 196.

Or 196_{10} s'écrit en base $b=2$: $\boxed{11000100_2}$

base 10	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	128	64	32	16	8	4	2	1
Base 2	1	1	0	0	0	1	0	0
+	0	0	1	0	0	0	1	1
	1	1	1	0	0	1	1	1

Le nombre $196_{10} = 11000100_2$ devient un palindrome en $K=1$ étape !

La "conjecture 196" n'a donc pas de sens en base $b=2$.

49 Mot de THUE-MORSE

1) Pour "calculer" t_3, on calcule $\mu^3(a)$ et $\mu^3(b)$:

- $\mu^3(a) = \mu(\mu^2(a)) = \mu(abba) = \mu(a)\mu(b)\mu(b)\mu(a)$
$= \boxed{abbabaab}$, puisque $\boxed{\mu(a) = ab}$ et $\boxed{\mu(b) = ba}$

et
- $\mu^3(b) = \mu(\mu^2(b)) = \mu(baab) = \mu(b)\mu(a)\mu(a)\mu(b)$
$= \boxed{baababba}$

et on concatène $\mu^3(a)$ et $\mu^3(b)$:

$$\boxed{t_3 = \underbrace{abbabaab}_{\mu^3(a)}\underbrace{baababba}_{\mu^3(b)}}$$

On aurait pu aussi "calculer" directement :

$t_3 = \mu(t_2) = \mu(abbabaab)$
$= ab\,ba\,ba\,ab\,ba\,ab\,ab\,ba$

2) Calcul de t_4. On calcule t_4 à partir de t_3 :

$t_4 = \mu(t_3) = \mu(abbabaabbaababba) =$

$$\boxed{t_4 = ab|ba|ba|ab|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ab|ba|ba|ab}$$

On remarque que :

- le nombre de termes (lettres) de t_n est le double de celui de t_{n-1} ; ainsi t_4 a 32 termes et t_3 en a 16.
- dans t_3, on retrouve $t_2 = abbabaab$ et son opposé, dans lequel "a" est remplacé par "b" et "b" par "a" :

$$\boxed{t_3 = t_2\overline{t_2}}$$ (où $\boxed{\overline{t_2}}$ est l'opposé de t_2) ;

ainsi t_3 est la concaténation de t_2 et de $\overline{t_2}$ son opposé

- dans t_4, on retrouve $t_3 = abbabaabbaababba$

et son opposé $\overline{t_3} = baababbaabbabaab$, i.e. :

$$\boxed{t_4 = t_3\overline{t_3}}$$: t_4 est la concaténation de t_3 et de son opposé $\overline{t_3}$.

(50) MOTS PLEINS de Palindromes

Comme "le problème de caractériser de façon simple les mots pleins est ouvert", * nous allons dénombrer les palindromes contenu dans un mot w en dressant l'arbre des palindromes de w †.

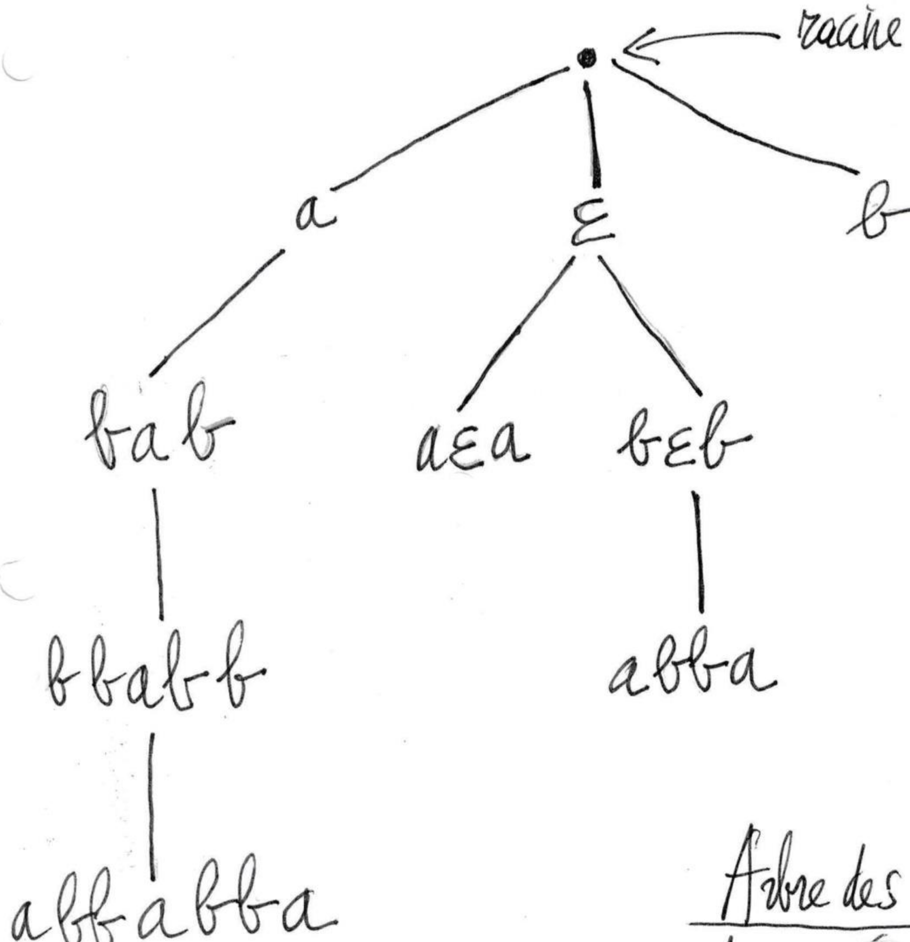
• **Mot w = abbabbaa** . Ce mot a $|w| = 8$ caractères ; le nombre maximum de palindromes qu'il peut contenir est donc : $|w| + 1 = 9$

Dressons l'arbre des palindromes de w à partir de l'ensemble :

$$Pal(w) = \{\varepsilon, a, b, aa, bb, abba, bab, bbabb, abbabba\}$$

Rappelons que l'ensemble des palindromes $Pal(w)$ d'un mot w contient toujours le mot vide, ε, et tous les mot d'1 lettre λ, $\lambda \in A$ (alphabet sur lequel est construit w).

(*) BLONDIN-Massé A., , "Sur le défaut palindromique des mots infinis", p. 17 (†) Voir exo. 47 . On peut bien sûr trouver tous les palindromes d'un mot sans dresser l'arbre des palindromes

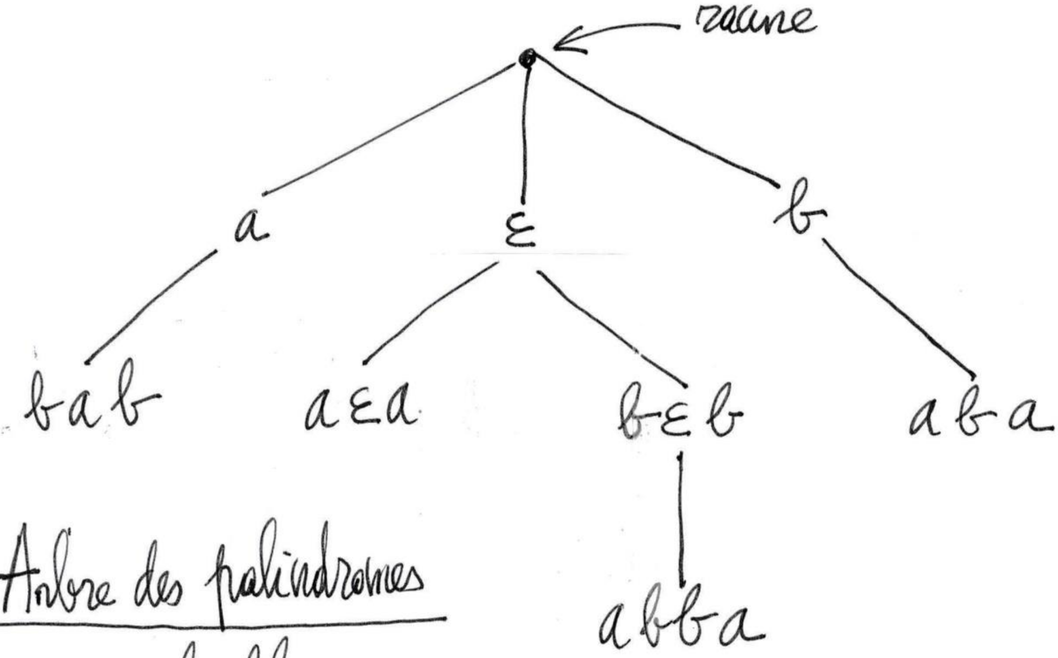


Arbre des palindromes de $w = abbabbaa$

On voit que w compte 9 palindromes comme sous-mots ; c'est donc un mot plein : $|w|+1 = 8+1 = 9$.

• Mot $v = aababbaa$. Ce mot, de longueur $|v| = 8$ lui aussi, a pour ensemble de palindromes

$$Pal(v) = \{\varepsilon, a, b, aa, bb, aba, bab, abba\}$$



Arbre des palindromes de $v = aababbaa$

Cet arbre n'est pas plein : il n'a que $|v| = 8$ palindromes au lieu de $|v|+1 = 8+1 = 9$