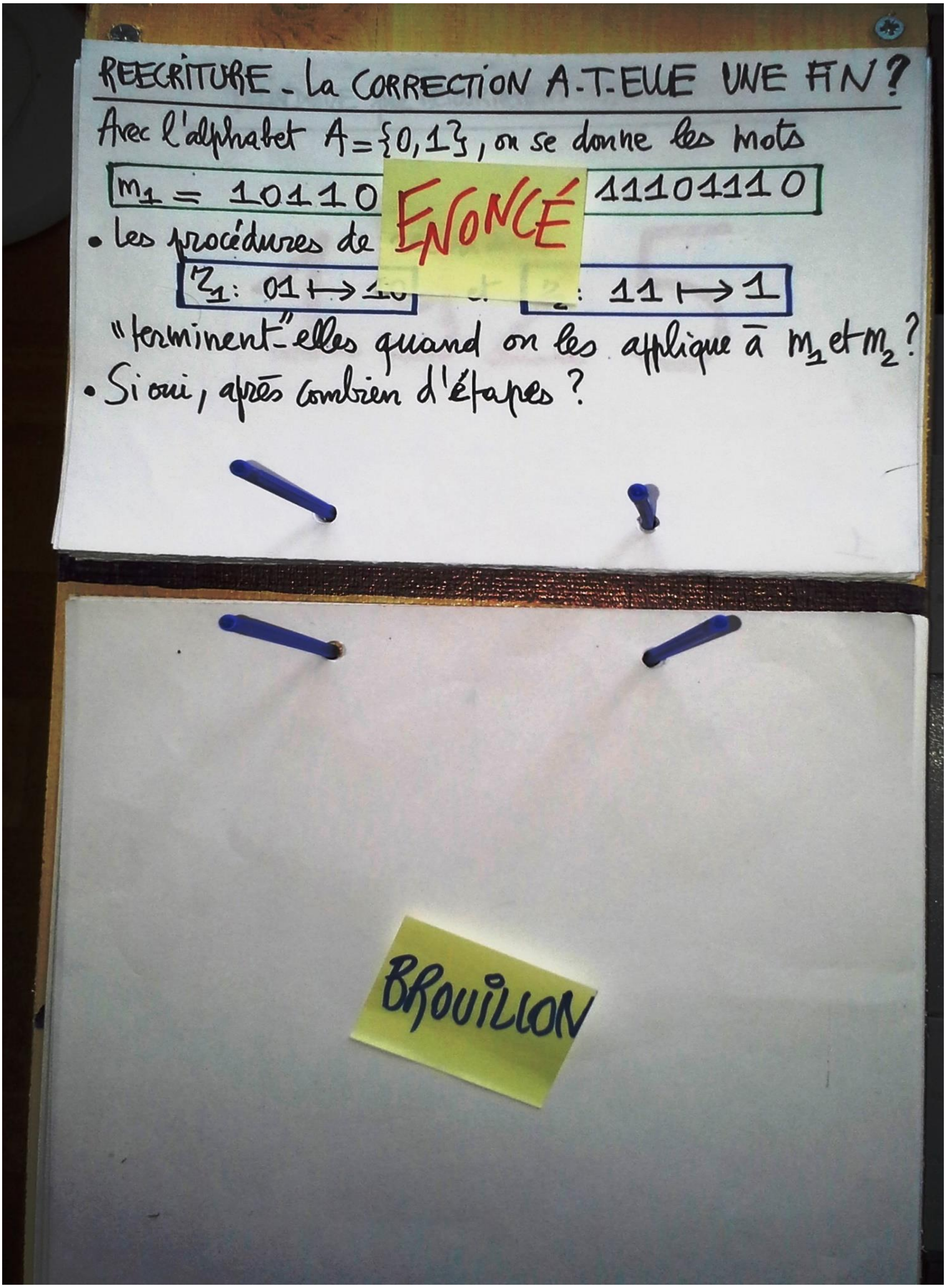
Planche-Exos



Sur la partie haute de la planche se trouvent les énoncés (ici : ils sont reproduits à raison d’un énoncé par page ; le numéro figure en bas à gauche).

Sur la partie basse, une feuille de brouillon est à disposition du visiteur.

REECRITURE - La CORRECTION A-T-ELLE UNE FIN ?

Avec l'alphabet $A = \{0, 1\}$, on se donne les mots

$\boxed{m_1 = 101101}$ et $\boxed{m_2 = 11101110}$

- Les procédures de réécriture

  $\boxed{r_1 : 01 \mapsto 10}$ et $\boxed{r_2 : 11 \mapsto 1}$

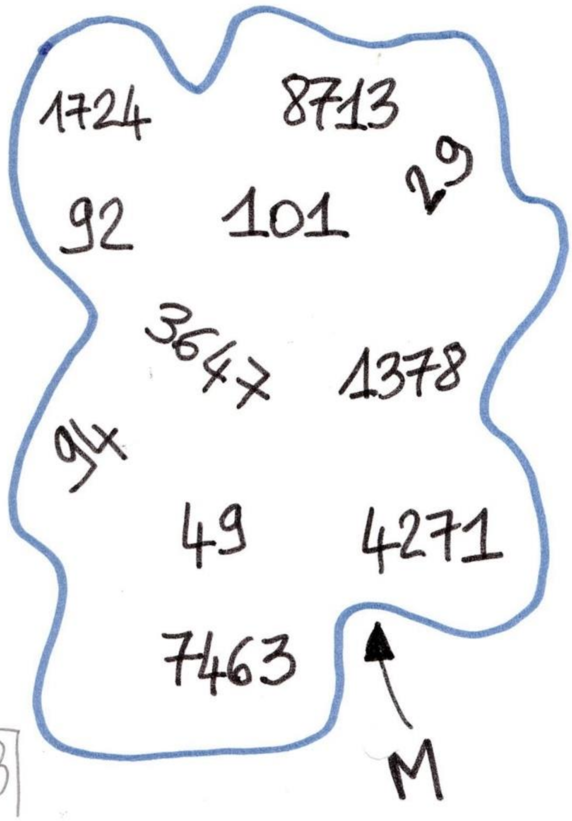
  "terminent"-elles quand on les applique à m_1 et m_2 ?
- Si oui, après combien d'étapes ?

PALINDROME par RETOURNEMENT - ADDITION

1925

2

Trouver les PALINDROMES



Dresser un tableau à deux colonnes :

1 Mot u	2 Miroir $\tilde{u}$
mot de M	miroir du mot de M
⋮	⋮

Dans la colonne 1, on placera un mot $u \in M$.
Dans la colonne 2, on placera le miroir $\tilde{u} \in M$

3

1) PALINDROME par RETOURNEMENT-ADDITION 1

1000

4

REECRITURE – PROCEDURE QUI "TERMINE" OU NON

On veut transformer le mot

$$\boxed{m_5 = 101011101011 10}$$

en lui appliquant la règle de réécriture

$$\boxed{r_5 : 10 \longmapsto 0}$$

La procédure "termine"-t-elle ? Après combien d'étapes ?

5

2/ PALINDROME par RETOURNEMENT-ADDITION \2

14500

6

DOUZE, ses DIVISEURS et ses MULTIPLES

E : 4 1 6 24 96 2 36 3 72 3 12 60 48 84

• Parmi les nombres à 2 chiffres de E, quels sont ceux dont la somme des chiffres vaut 12 ? Quel est le plus petit ? le plus grand ?

• Codage du mot "DOUZE" – Trouvez au moins un codage du mot "DOUZE" :

$$\begin{array}{lcl} D & \longrightarrow & c_1 \\ & & + \\ O & \longrightarrow & c_2 \\ & & + \\ U & \longrightarrow & c_3 \\ & & + \\ Z & \longrightarrow & c_4 \\ & & + \\ E & \longrightarrow & c_5 \\ \hline & & 48 \end{array}$$

c_1, c_2, c_3, c_4, c_5

tel que :

- les c_i sont dans E
- les c_i sont distincts
- la somme des c_i vaut 48

2) PALINDROME par RETOURNEMENT-ADDITION 2

9494

8

PALINDROME par RETOURNEMENT - ADDITION

5248

9

COMMENTAIRES de 1 ---

1 s'écrit 1

11 s'écrit 21

111 s'écrit 31

- Quelle est la règle appliquée ici ? (indice : 11 se lit "un un")
- Quel est le nombre qui reste inchangé lorsqu'on lui applique cette règle ? Pour le trouver, construisez la suite des commentaires de 1 jusqu'à le rencontrer ---

REECRITURE _ LA CORRECTION A-T-ELLE UNE FIN ?

Appliquée au mot

$$\boxed{m_3 = 11101110}$$

la procédure de réécriture

$$\boxed{z_3 : 10 \longmapsto 01}$$

a-t-elle une fin ? Si oui, après combien d'étapes ?

PALINDROME par RETOURNEMENT-ADDITION

349

12

PALINDROME par RETOURNEMENT-ADDITION

110

13

PALINDROME CARRÉ

Le $\boxed{\text{CARRÉ d'un PALINDROME}}$ est-il un PALINDROME ?

Donner un exemple pour justifier la réponse.

PALINDROME par RETOURNEMENT-ADDITION

160110

15

Les MOTS sont des NOMBRES*

D'après cette comptine de Mère l'Oie :

En chemin vers St Yves
J'ai croisé un homme et ses sept femmes
Chaque femme avait sept sacs
Chaque sac avait sept chats
Chaque chat avait sept chatons ...

pouvez-vous dire combien venaient de St Yves ?

16

* BELLOS Alex, Alex au pays des chiffres, p. 237

PALINDROME par RETOURNEMENT-ADDITION

94

1089 ... ENCORE et TOUJOURS

① Choisissez un entier n à trois chiffres tel que le premier et le dernier chiffre aient une différence supérieure ou égale à 2.

Par exemple : $n = 753$

② Prenez le miroir de n : $\tilde{n} = 357$

③ Calculez la différence $d = |n - \tilde{n}|$: $d = 753 - 357 = \boxed{396}$

④ Prenez le miroir de d : $\tilde{d} = \boxed{693}$

→ Que vaut la somme $S = d + \tilde{d}$?

→ Recommencez la suite des étapes ① à ④ avec un autre nombre de votre choix. Que constatez-vous ?

2) PALINDROME par RETOURNEMENT- ADDITION (2

6654

19

PALINDROME par RETOURNEMENT-ADDITION

180120170

20

RÉÉCRITURE - La CORRECTION A-T-ELLE UNE FIN ?

On veut corriger le mot

$$\boxed{m_4 = 110}$$

on lui appliquant la règle de réécriture :

$$\boxed{r_4 : 10 \longmapsto 0011}$$

La procédure de correction aboutit-elle ?
Justifier...

1) PALINDROME par RETOURNEMENT-ADDITION (1

1060

22

PALINDROMES à TROUVER

Dans l'ensemble de mots M, quels sont les palindromes?

Voici ara stats bonbon sas

sagas Bob errer rotor essēme

ressasser

Laval solos tôt été ici

Kanak sus nana

épi épée radar M

alla salsa ēre

23

PALINDROME par RETOURNEMENT - ADDITION

87

PALINDROME par RETOURNEMENT_ ADDITION

37488

25

MIROIR de MOTS = MOT de MIROIRS

- On se donne deux mots u et v finis ...
  (A vous de les choisir ...)
- Les mots $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sont les miroirs de u et v
- L'opération sur $M = \{u, v, \tilde{u}, \tilde{v}\}$ est la CONCATENATION
- Montrer sur un exemple que : $\boxed{\widetilde{(uv)} = \tilde{v}\tilde{u}}$

PALINDROME par RETOURNEMENT - ADDITION

47632

27

7) PALINDROME par RETOURNEMENT_ADDITION (7

6752

28

? PALINDROME par RETOURNEMENT-ADDITION ?

2847676782

29

PHRASES PALINDROMES à TROUVER

Dans l'ensemble de phrases P, quelles sont les phrases-palindromes ?

Tu l'as trop écrasé César ce port salut

Et la marine va venir à Malte

Zeus a été à Suez

Esope reste ici et se repose

À quand remonte ton séjour à Caen

À l'autel elle alla, elle le tua là

qui dort dîne

Ainsi Anaïs nie

Karine alla en Irak

Engage le jeu que je le gagne

Jamais plus jamais

P

PALINDROME par RETOURNEMENT-ADDITION

193

31

PALINDROME par RETOURNEMENT-ADDITION

6789

32

PALINDROME par RETOURNEMENT-ADDITION

166

33

PALINDROME par RETOURNEMENT-ADDITION

188

3h

PALINDROME par RETOURNEMENT - ADDITION

63281

35

PALINDROME par RETOURNEMENT- ADDITION

5259

SUITE de FIBONACCI ...

La suite de Fibonacci se définit par :

$$\boxed{F_n : \begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}}$$

- Pouvez-vous donner les 10 premiers termes de la suite ?
- Pouvez-vous donner les 20 premiers termes ?

les ENTIERS de la SUITE de FIBONACCI

la suite de Fibonacci est défini par :

$$\boxed{F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}}$$

Dans le tableau suivant des valeurs de cette suite pour $n=1$ à $n=18$, Calculer les termes manquants :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
F_n				3		8	13		34		89		233	377			1597	

Une PROPRIETE de la SUITE de FIBONACCI

L'entier **1** ajouté à la somme des **n** premiers termes de la suite de Fibonacci donne le $(n+2)$ième nombre de Fibonacci :

$$\boxed{1+\sum_{i=1}^{n} F_n = F_{n+2}}$$

Vérifier cette propriété pour les valeurs suivantes de **n** :

$n=4$, $n=6$, $n=8$, $n=10$

FIBONACCI et ZECKENDORF

Le théorème de Zeckendorf nous dit que :

> Tout entier positif s'exprime de manière unique comme la somme d'un ou plusieurs termes <u>non consécutifs</u> de la suite F_n des nombres de Fibonacci, pour $n > 1$

A partir de la suite de Fibonacci, pour $n = 1$ à $n = 20$, vérifier ce théorème pour les entiers : $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 7$, $n = 12$, $n = 17$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

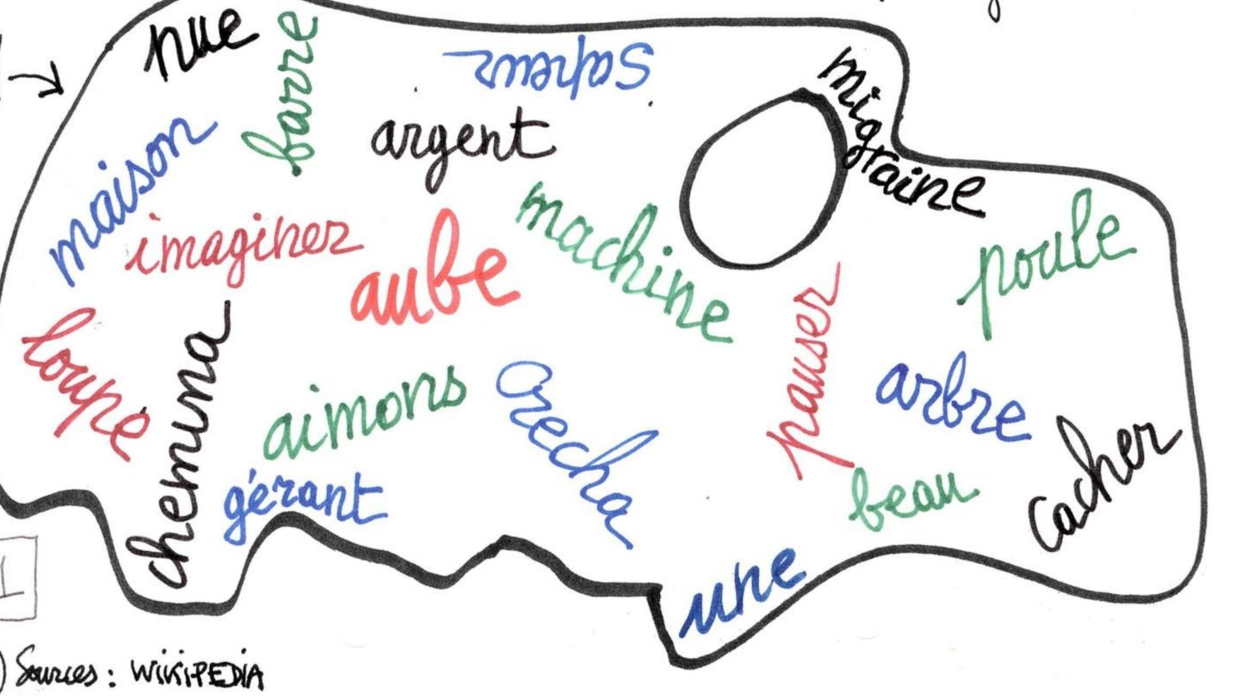
n	13	14	15	16	17	18	19	20
F_n	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765

(Exemple : $n = 6 = F_2 + F_5$)

T'ES ANAGRAMME, donc TU PERMUTES *

Examine les mots de l'ensemble M ; associe chacun d'eux à son anagramme :

M →



41

(*) Sources : WIKIPEDIA

ANAGRAMMES CELEBRES ... et POLITIQUES*

Parmi les éléments de l'ensemble P, associe le nom d'un(e) homme (femme) politique et son anagramme :

P →

42

(*) Sources : www.dcode.fr/generateur-anagrammes

Des CARRES et des CUBES dans les MOTS

On se donne un alphabet $A = \{a, b, c\}$. Un mot m de la forme aa ou bb ou cc est appelé un CARRÉ. Un mot de la forme aaa, bbb ou ccc est appelé un CUBE. Un mot est dit SANS CARRE (CUBE) s'il ne contient aucun carré ni cube.

- Avec deux lettres de l'alphabet A, combien de mots sans carré peut-on former ?
- Parmi les mots suivants, lesquels contiennent au moins un carré ou un cube ? Faire la liste de ces carrés et cubes

$m_1 =$ abcacbabcbaca, $m_2 =$ caabccbb, $m_3 =$ ccaabbabc
$m_4 =$ abcabccbbb, $m_5 =$ accaaabb, $m_6 =$ bcaabba

PALINDROME... LE MIROIR du MIROIR d'un MOT

Étant donné un mot m, le mot $\tilde{m}$ est son miroir obtenu en "renversant" l'ordre des lettres du mot m.

- Montrer par un exemple que : $\boxed{\tilde{\tilde{m}} = m}$
- De même, montrer que, pour des mots m et n : $\boxed{\widetilde{mn} = \tilde{n}\tilde{m}}$
- Si m est un mot, le mot $\boxed{m\tilde{m}}$ est-il un palindrome ?

Un ECRIVAIN perdu chez les NOMBRES PREMIERS*

Le célèbre écrivain Marcel PAGNOL se passionnait pour les nombres premiers. Dans ses "Inédits" parus après sa mort, on trouve l'énoncé suivant :

« Pour tout entier impair x, on obtient un nombre premier p par la formule : $\boxed{p = [x + (x+2)] + x(x+2)}$. Autrement dit : Ajouter la somme de x et de $x+2$ au produit de x et de $x+2$, donne toujours un nombre premier »

VRAI ou FAUX ?

(*) D'après Delahaye J.-P., "Merveilleux nombres premiers", p. 109-110

Mot infini et suite caractéristique des nombres premiers *

On dispose de l'alphabet $A = \{0,1\}$ à partir duquel on construit le mot :

$$\boxed{p = (p_n)_{n \geq 1} = 01101010001010001 \ldots}$$

Le mot p est un mot infini. On l'appelle <u>suite caractéristique des nombres premiers</u>. Pourquoi l'appelle-t-on ainsi ?

Pour répondre, trouvez comment ce mot est construit...

(*) RAMIREZ José, "A Generalization of the Fibonacci Word Fractal and the Fibonacci Snowflake", p. 4

Les PALINDROMES sont dans les ARBRES

- Prenez un mot de longueur n, formé par exemple avec l'alphabet $A=\{0,1\}$, et extrayez-en l'ensemble P des palindromes (les mots d'1 caractère et le <u>mot vide</u> appartiennent à cet ensemble)
- En partant d'un point appelé <u>racine</u>, dressez l'arbre des palindromes de P pour montrer que la relation

$$\boxed{p_1 \preceq p_2 : p_1, p_2 \in P \text{ et } p_1 \text{ est un sous-mot de } p_2}$$

est une <u>relation d'ordre partiel</u>.

<u>Exemples de mots</u> : 01100101, 00101100, ---, et avec l'alphabet $\{a,b\}$: abaababaab

PALINDROME et BASE de NUMERATION

Certains entiers produisent des palindromes, par retournement et addition, après k étapes, quand ils sont écrits en base décimale ($b = 10$), et deviennent encore des palindromes après conversion dans une autre base ($b \neq 10$) et en moins d'étapes...

Vérifiez-le pour les nombres entiers suivants :

87_{10} : en base $b = 8$, 196_{10} : en base $b = 2$

en base $b = 9$

en base $b = 2$

Mot de THUE _ MORSE

- On appelle <u>mot de THUE _ MORSE</u> le mot binaire sur $A=\{a,b\}$ défini par : $\boxed{\mu(a) = ab \quad , \quad \mu(b) = ba}$
- C'est un mot infini dont les premiers termes sont obtenus en concaténant $\mu^n(a)$ et $\mu^n(b)$:

  $\mu^1(a) = ab$, $\mu^1(b) = ba$, $\boxed{t_1} = abba$

  $\mu^2(a) = abba$, $\mu^2(b) = baab$, $\boxed{t_2} = abbabaab$
- "Calculer" la valeur de t_3 et t_4

$\boxed{49}$

Mots PLEINS et PALINDROMES

- Il existe un théorème qui nous dit que :

> Pour un mot fini w, de longueur $|w|$, le nombre de PALINDROMES qu'il contient ne peut être supérieur à $|w|+1$

- Un mot w est dit PLEIN s'il contient $|w|+1$ palindromes.

- Etant donnés les mots $w = abbabba$ et $v = aababbaa$, vérifier s'ils sont pleins ou non.

Mot de FIBONACCI et FRACTALE

Prenez un mot de Fibonacci de longueur n, F_n. Pour obtenir une représentation géométrique de F_n, appliquez la procédure suivante :

- Placer un point dans le plan (le "point de départ" de la courbe)
- Si le **n**ième caractère de F_n ($n \geq 1$) est un **1**, alors tracer un segment de droite
- Si le **n**ième caractère de F_n est un **0**, alors tracer un segment de droite et
  - si **n** est $\boxed{\text{PAIR}}$, alors tournez $\boxed{\text{A GAUCHE}}$
  - si **n** est $\boxed{\text{IMPAIR}}$, alors tournez $\boxed{\text{A DROITE}}$

51 Tracez la courbe de F_6, et pour les courageux, de F_{10}

PALINDROMES ... VRAI ou FAUX ? *

La différence entre un nombre de trois chiffres n et son miroir $\tilde{n}$ est toujours un multiple de 99 ... Vrai ou Faux ?

(*) D'après BERNA Henri, "Palindromes, monotypes et autres bizarreries numériques", p. 80