Édouard Thomas

Les mystérieux carnets de Ramanujan

Samedi 11 mars 2017

Centre Auguste Dobel
Médiathèque Louis Aragon
9 rue Philidor
75020 Paris

Régie autonome des transports parisiens
Comité de la régie d'entreprise

COMITE REGIE
D'ENTREPRISE RATP

Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

- Un mathématicien passionné
- Une destinée fulgurante
- Une intuition puissante et mystérieuse
- Des formules mathématiques inédites
- Un héritage inouï : les carnets
- 2016 : enfin un film ! En 2017, le DVD

Sommaire

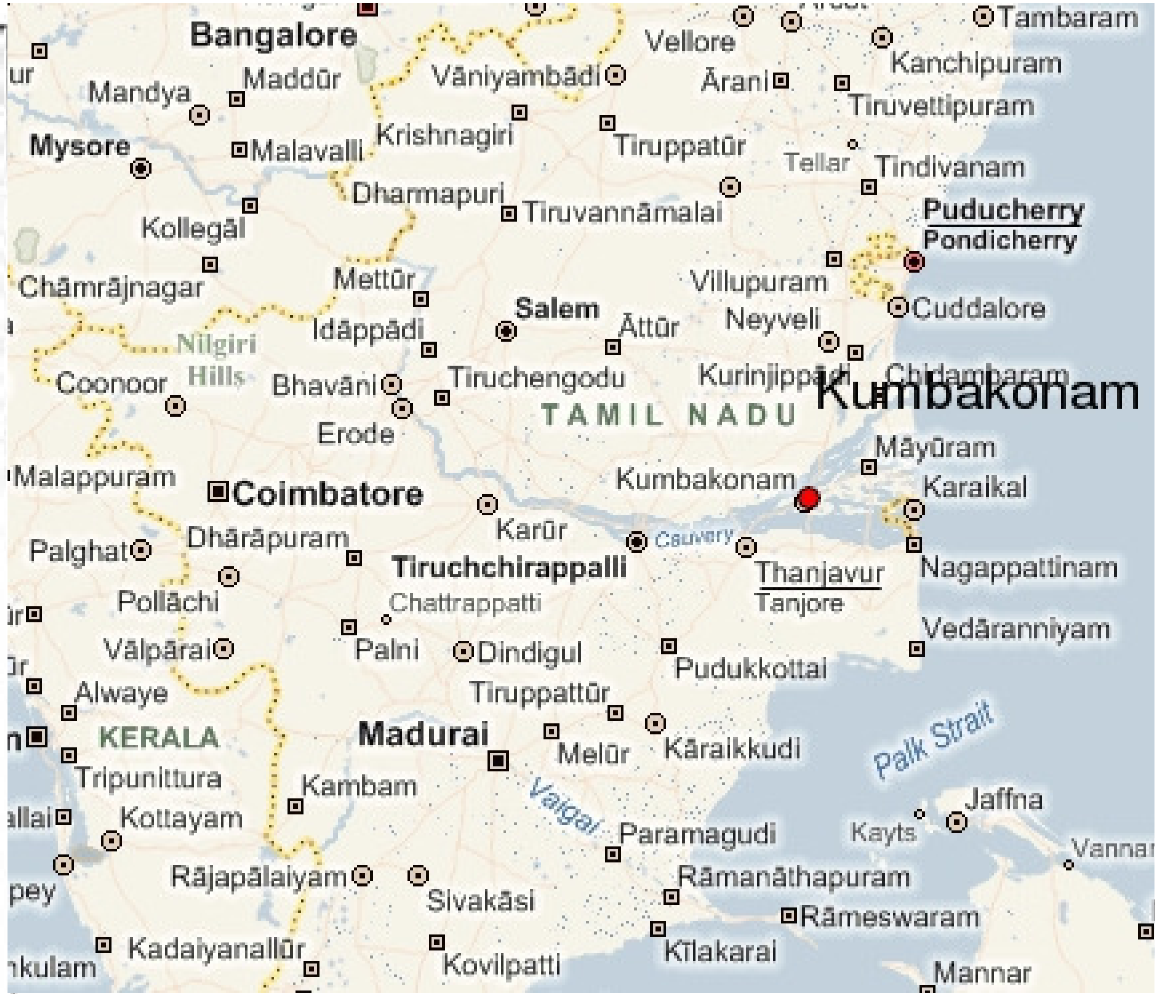
- L'Inde du Sud à la fin du XIX^{e} siècle
- Srinivasa Ramanujan (1887–1920)
- Cambridge, Hardy et la guerre
- Le voyage des carnets
- Un siècle d'édition
- Le « mystère » sur des exemples

L'Inde du Sud
à la fin du XIXe siècle

- Capitale : Madras (aujourd'hui Chennaï)
- Climat tropical
- Économie agricole et artisanale
- Train depuis 1877 (jusqu'à Visakhapatnam)
- La colonisation britannique jusqu'en 1947
- Des traditions fortes (castes, religion, famille)
- La vie spirituelle (ascèse, hindouisme…)

Kumbakonam

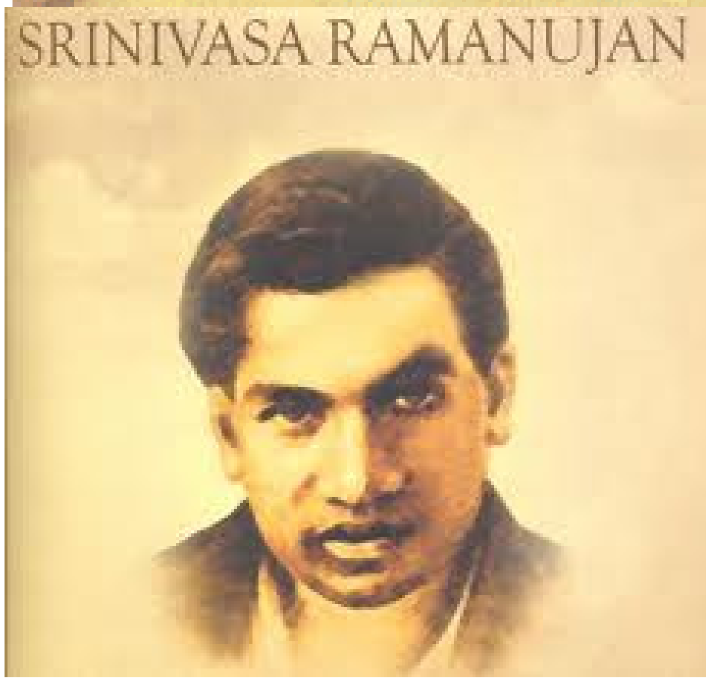
- État du Tamil Nadu, 300 km au sud de Chennaï
- « Chef-lieu de canton », district de Thanjavur
- 50 000 habitants en 1880, 60 000 en 1900
- Ville réputée pour son tissu (saris en soie) et le travail fin des métaux (cuivre, argent…)
- Une ville de pèlerinage (plus de douze temples majeurs)
- Ville phare du brahmanisme (caste supérieure)
- Eau non potable (moustiques, éléphantiasis…)



La Kâverî est un fleuve sacré

Ramanujan

- Né à Érode (Pallipalayam), 22 décembre 1887
- Brahmane très observant (végétarien…)
- Un fort caractère (fier et indépendant)



Une enfance difficile

- Une famille non fortunée
- Variole et autres maladies, santé fragile
- Nombreux décès dans la famille

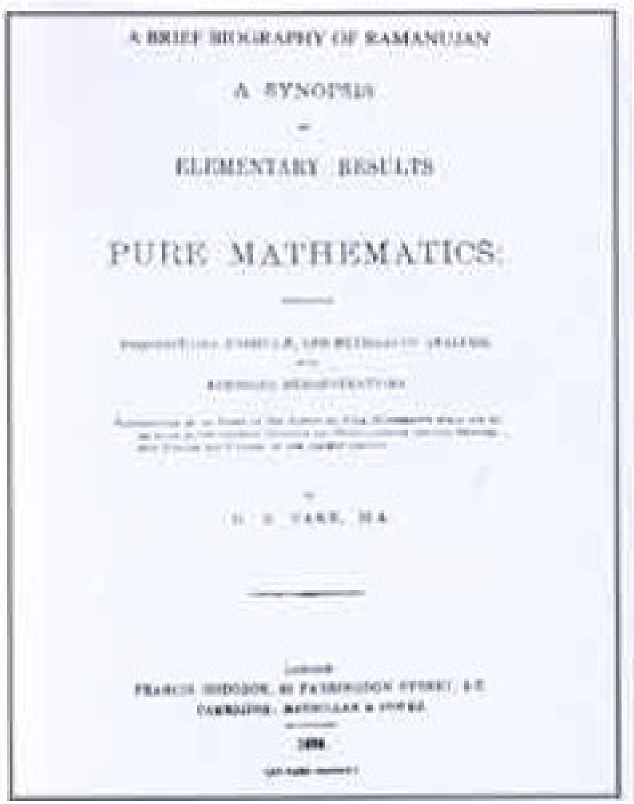
Scolarité

- « Primary examination » (arithmétique, tamoul, anglais, géographie) : 1er du district, à 9 ans !
- À 14 ans : déjà célèbre dans l'académie pour ses capacités en mathématiques
- À 15 ans : découvre le livre de Carr

  décide de se consacrer aux maths

  abandon des autres matières

A Synopsis Of Elementary Results In Pure Mathematics, George Shoobridge Carr, 1880 (deux volumes)

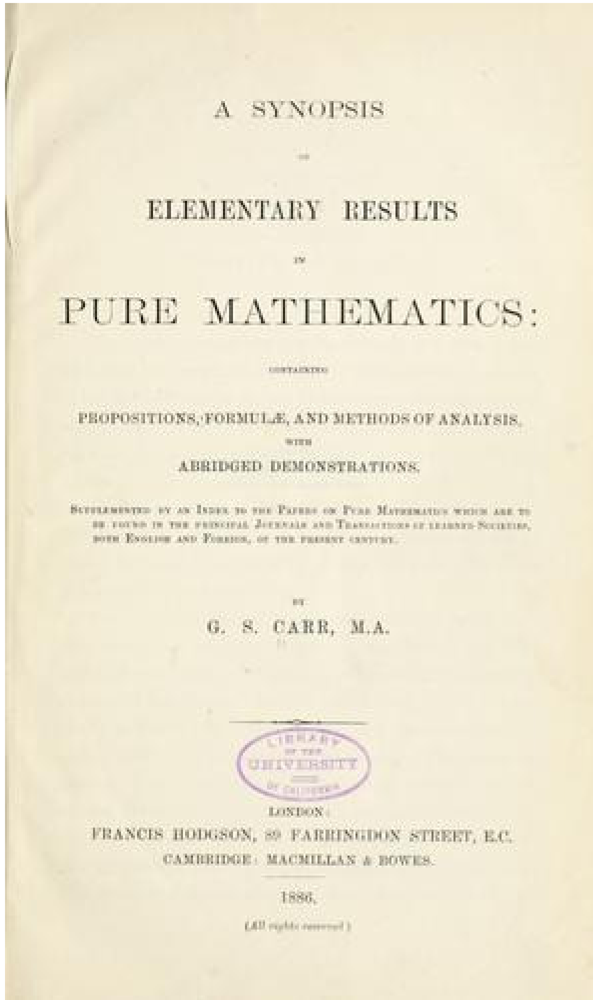

A BRIEF BIOGRAPHY OF RAMANUJAN

A SYNOPSIS

ELEMENTARY RESULTS

PURE MATHEMATICS:

G. S. CARR, M.A.


A SYNOPSIS

OF

ELEMENTARY RESULTS

IN

PURE MATHEMATICS:

CONTAINING

PROPOSITIONS, FORMULÆ, AND METHODS OF ANALYSIS,

WITH

ABRIDGED DEMONSTRATIONS.

BY

G. S. CARR, M.A.

LONDON:
FRANCIS HODGSON, 89 FARRINGDON STREET, E.C.
CAMBRIDGE: MACMILLAN & BOWES.

1886.

Conséquences…

- Se consacre jour et nuit aux mathématiques
- Recense ses **découvertes** dans des carnets
- Échec à tous les examens à venir
- Perte de sa bourse d'étude
- Mariage arrangé avec Janaki (9 ans) pour l'obliger à s'assumer, petits boulots

- Tente de faire reconnaître **la valeur de son travail**

Des contacts

- Ramanujan constitue un réseau
- Problème : est-ce un génie ou un illuminé ?
- Mécénat de Ramachandra Rao (Chennaï)
- Aide de l'Indian Mathematical Society
- Aide de l'université
- Travaille **intensément**
- Doit demander conseil à des experts…

Les lettres

1912–1913

- Première lettre : Henry Frederick Baker (48 ans, Fellow of the Royal Society)
  Pas de réponse positive…
- Deuxième lettre : Ernest William Hobson (56 ans, Fellow of the Royal Society)
  Pas de réponse positive…
- Troisième lettre : **Godfrey Harold Hardy**

Godfrey Hardy (1877–1947)

- Né le 7 février 1877
- Incontestablement le plus grand scientifique britannique depuis Newton



En 1913…

- 35 ans, 3 livres à son crédit
- 100 articles publiés depuis quinze ans
- Fellow of the Royal Society depuis 1910
- A commencé à constituer une école
- Encourage les maths de son temps
- Bien installé à Cambridge et dans sa carrière
- Fin janvier 1913, il reçoit une lettre…

Quelques formules (notations modernes) contenues dans la lettre de Ramanujan à Hardy, datée du 16 janvier 1913

$$1-\frac{3!}{(1!2!)^3}x^2+\frac{6!}{(2!4!)^3}x^4-\ldots=\left(1+\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}+\ldots\right)\left(1-\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}-\ldots\right) \tag{1}$$

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\ldots=\frac{2}{\pi} \tag{2}$$

$$1+9\left(\frac{1}{4}\right)^4+17\left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^4+25\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^4+\ldots=\frac{2^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2} \tag{3}$$

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^5+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^5-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^5+\ldots=\frac{2}{\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^4} \tag{4}$$

$$\int_0^\infty \frac{1+\left(\frac{x}{b+1}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1+\left(\frac{x}{b+2}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a+1}\right)^2}\ldots\,dx=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma(b+1)\Gamma\left(b-a+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)\Gamma(b-a+1)} \tag{5}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\ldots}=\frac{\pi}{2(1+r+r^3+r^6+r^{10}+\ldots)} \tag{6}$$

$$\text{Si } \alpha\beta=\pi^2, \text{ alors } \alpha^{-\frac{1}{4}}\left(1+4\alpha\int_0^\infty\frac{xe^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x}-1}\,dx\right)=\beta^{-\frac{1}{4}}\left(1+4\beta\int_0^\infty\frac{xe^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x}-1}\,dx\right) \tag{7}$$

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}-\cfrac{e^{-a^2}}{2a+\cfrac{1}{a+\cfrac{2}{2a+\cfrac{3}{a+\cfrac{4}{2a+\ldots}}}}} \tag{8}$$

$$4\int_0^\infty\frac{xe^{-x\sqrt{5}}}{\cosh x}\,dx=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{1+\cfrac{1^2}{1+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{3^2}{1+\cfrac{3^2}{1+\ldots}}}}}}} \tag{9}$$

$$\text{Si } u=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^5}{1+\cfrac{x^{10}}{1+\cfrac{x^{15}}{1+\ldots}}}} \text{ et } v=\cfrac{x^{\frac{1}{5}}}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{1+\cfrac{x^3}{1+\ldots}}}}, \text{ alors } v^5=u\frac{1-2u+4u^2-3u^3+u^4}{1+3u+4u^2+2u^3+u^4} \tag{10}$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\ldots}}}=\left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]e^{\frac{2}{5}\pi} \tag{11}$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\ldots}}}=\left[\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{5^{\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}-1}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]e^{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}} \tag{12}$$

L'invitation

- Hardy invite Ramanujan à Cambridge
- Idée : le former aux maths **de son temps**
- Le 17 mars 1914, le prodige embarque
- Il cesse de consigner ses découvertes dans des carnets
- À peine Ramanujan arrivé (le 14 avril 1914), la Grande Guerre éclate (4 août 1914)

Ramanujan à Cambridge

- De nombreux problèmes :

  Le climat, le régime alimentaire, les vêtements, l'ostracisme, la solitude, une autre culture

- Accentués par la guerre :

  Le rationnement, l'explosion des prix, les pénuries, des mathématiciens mobilisés

- L'université de Cambridge :

  Hôpital et camp d'entraînement, pas de lumière la nuit, coupures d'électricité

La maladie

- Un séjour qui se prolonge
- Tensions entre sa femme et sa mère
- Privations, travail intense, vie rude, guerre

La maladie (amibiase hépatique ?)

Terrible souffrance physique

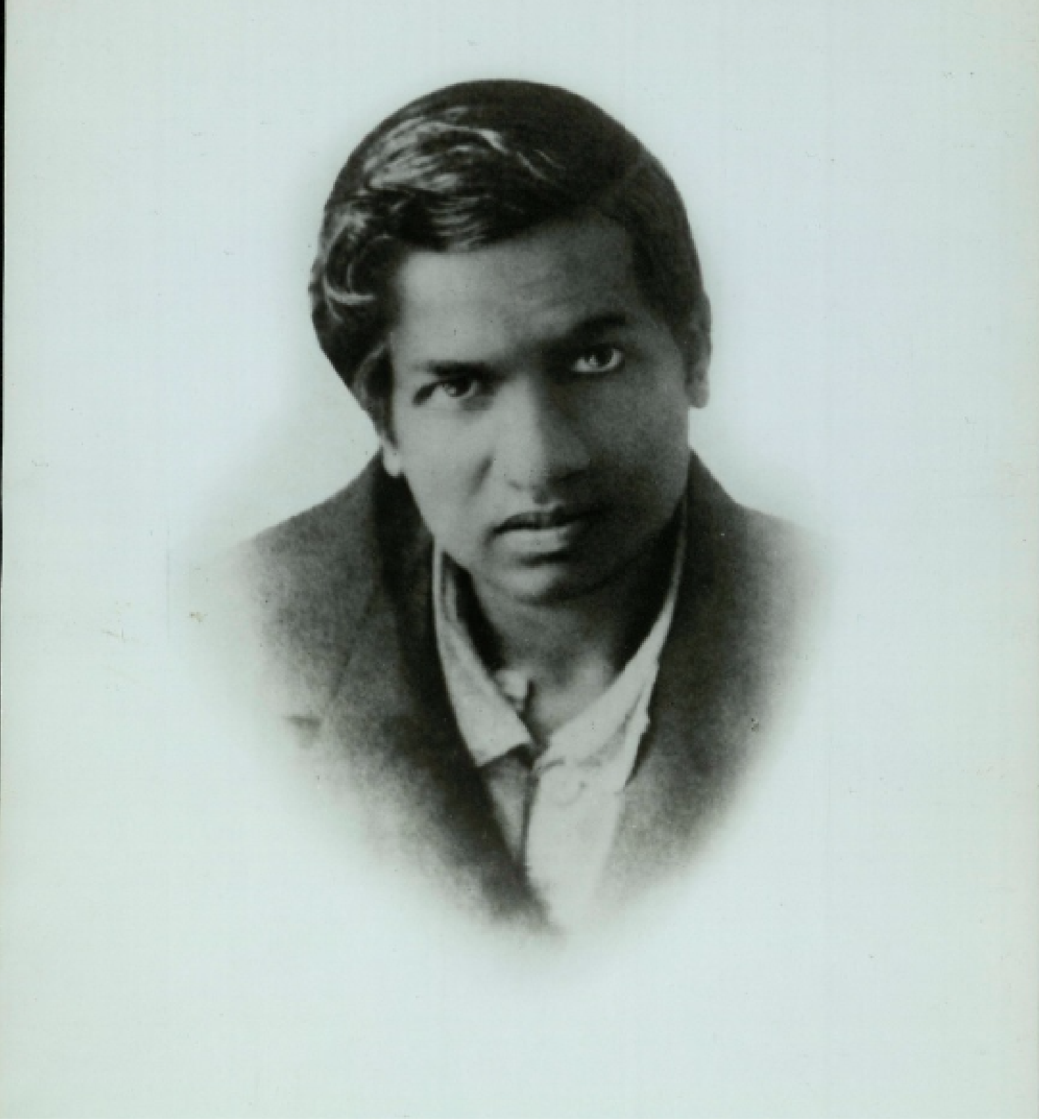
Diagnostics erronés (tuberculose…)

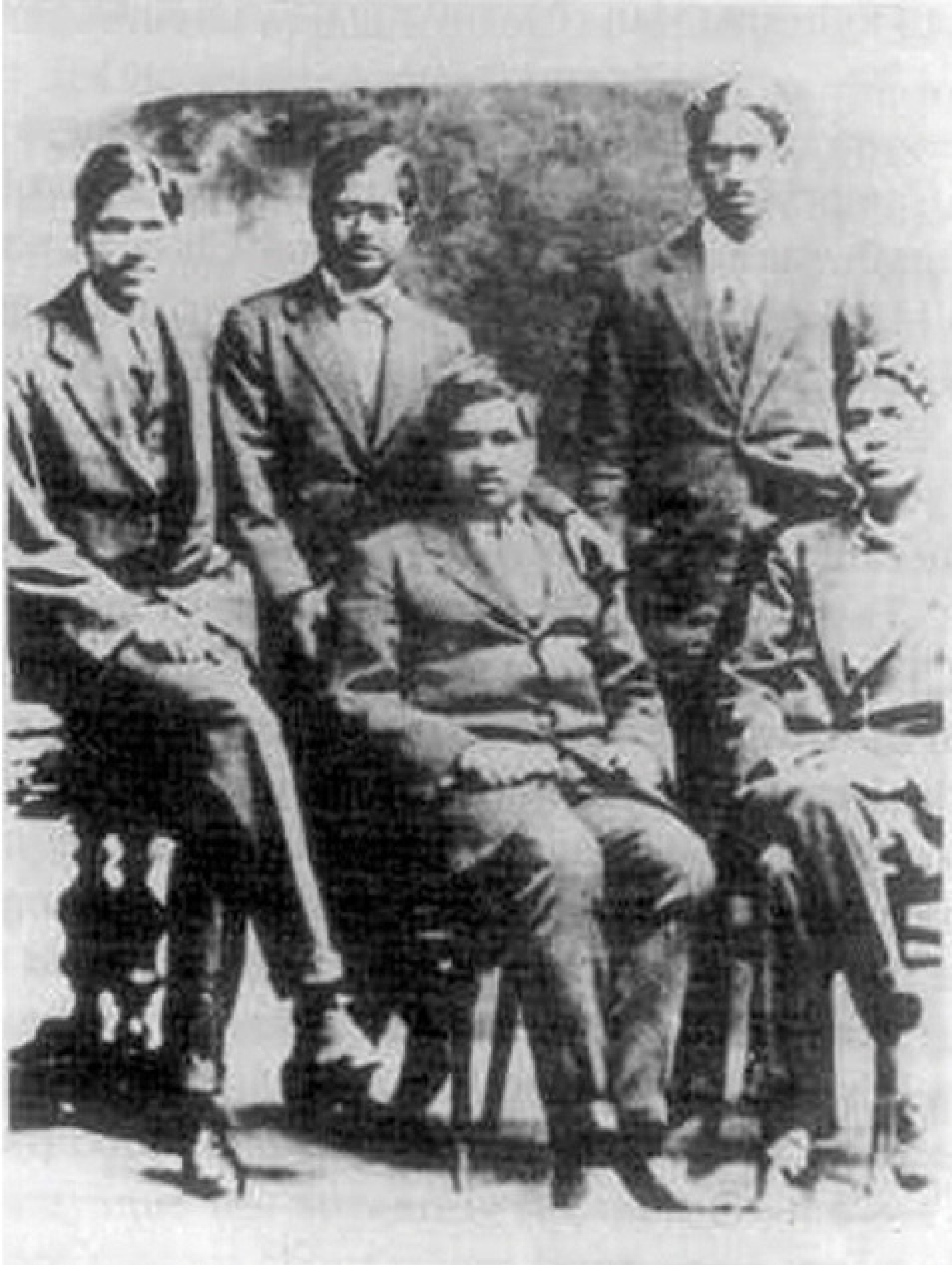
Tensions avec le corps médical

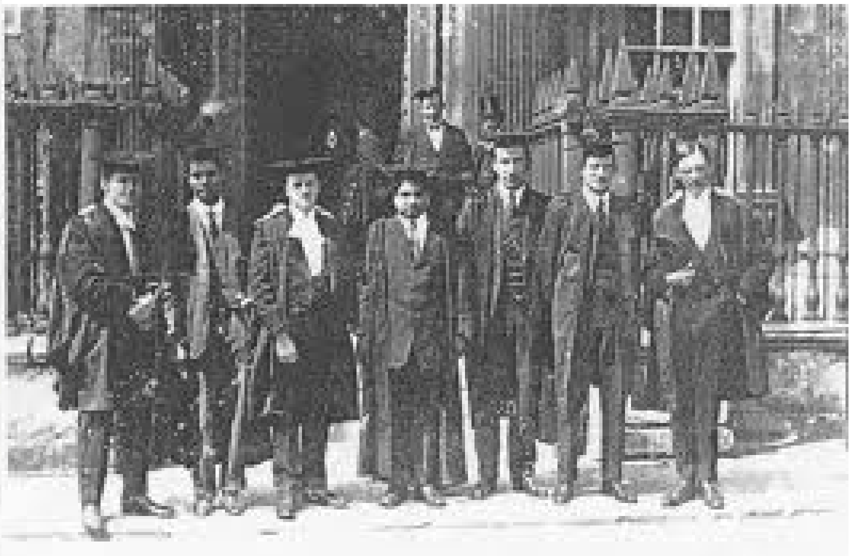
Aucun traitement ne semble efficace

Retour en Inde

- 1917–1918 : sanatoriums (Matlock, Fitzroy…)
- 1917 : Fellow of the London Mathematical Society
- 1918 : Fellow of the Royal Society (30 ans !)
  Fellow of Trinity College, Cambridge
  retrouve de l'énergie pour ses recherches
- 1919 : de retour en Inde, c'est un héros national
  la maladie empire
- 1920 : ultimes contributions mathématiques
  décès le 26 avril 1920 (32 ans)







Srinivasa Ramanujan (centre) G.H Hardy (extreme right), with others at Trinity College, Cambridge.

Les contributions mathématiques

De nombreux domaines abordés :

séries (hypergéométriques, de Dirichlet, de Lambert, d'Eisenstein, bilatérales, *q*-séries), **fonctions spéciales** (fonctions thêta, fausses fonctions thêta, fonctions thêta déguisées, fonctions elliptiques), **analyse combinatoire** (nombres de Bernoulli, transformations, identités remarquables, invariants de classe, équations modulaires, modules singuliers), **théorie des nombres** (fonctions arithmétiques, fractions continues, radicaux imbriqués, nombre de partitions, fonction tau), **analyse** (produits infinis, calcul intégral, développements asymptotiques, formules d'inversion, produit de Hadamard), trigonométrie, géométrie…

Points d’orgue

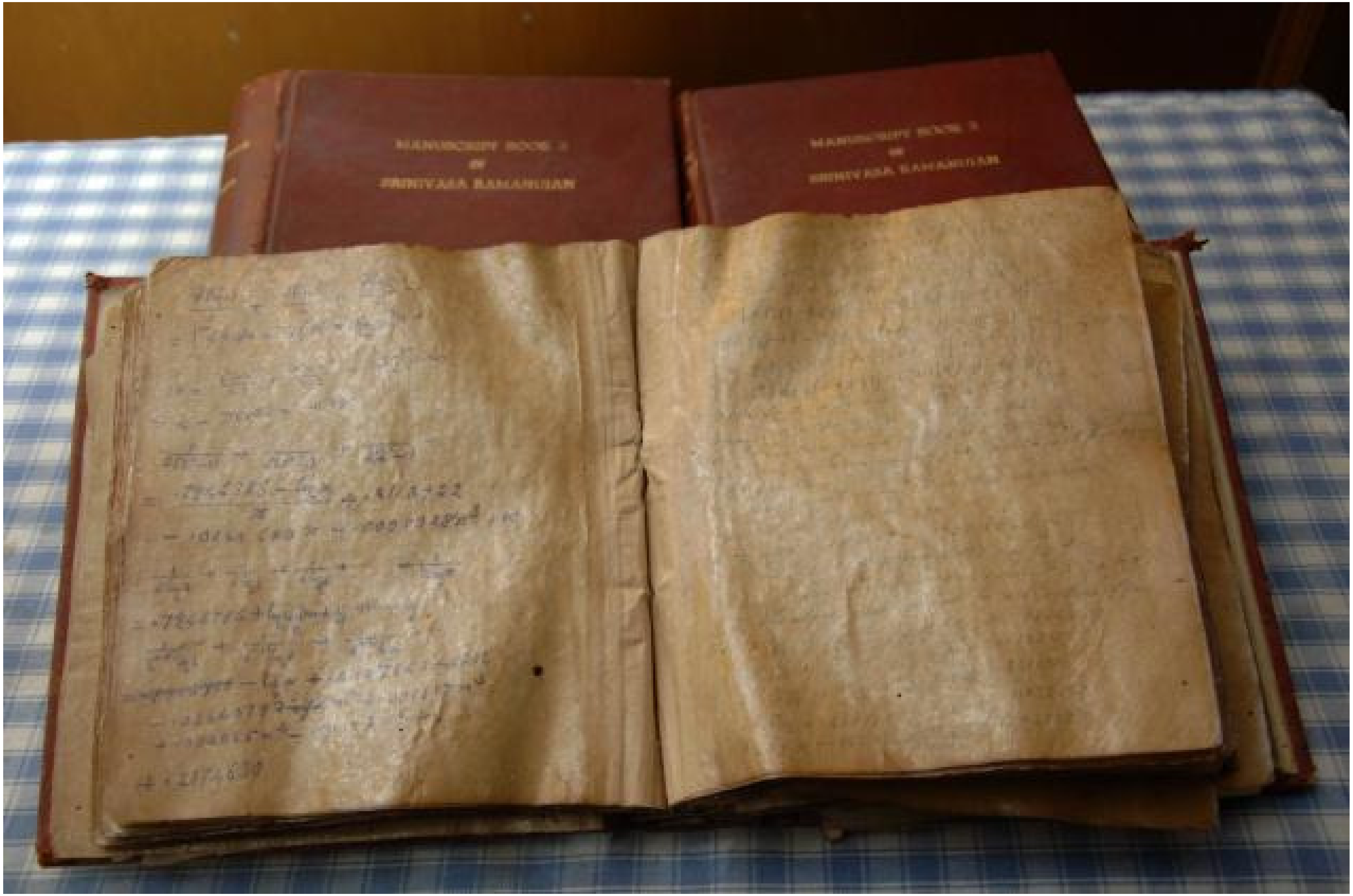
- La théorie des partitions (partages d’entiers)
- Travaux et conjecture sur la fonction tau
- Une théorie des séries divergentes
- De nouvelles formules pour approximer π
- Une théorie des fonctions elliptiques en bases alternatives
- La fraction continue de Rogers–Ramanujan

Publications

- Une vingtaine d'articles en Europe
- Une vingtaine de notes
- La correspondance avec Hardy
- 3 rapports trimestriels (université de Chennaï)
  formules d'interpolation, théorème maître de Ramanujan
- 58 problèmes soumis au *Journal Of The Indian Mathematical Society*
- … et **3 carnets**

Les carnets

- Compilés entre 1903 et 1914
- Assemblage grossier de feuilles de papier
- Uniquement des résultats aboutis
  - Absence de développements, d’explications, de définitions, de conventions, de notations…
  - Calculs réalisés sur ardoise
  - Coût du papier
  - « Carte de visite », non destinés à publication


SRINIVASA RAMANUJAN
SRINIVASA RAMANUJAN

Le voyage des carnets

- Ne quittent jamais Ramanujan en Inde
- Aujourd’hui à l’université de Chennaï
- 1927 : édition des œuvres complètes *publiées* de Ramanujan, par Hardy
- 1957 : le Tata Institute of Fondamental Research à Bombay publie un Photostat des carnets (2 volumes, aucune édition)

Le premier carnet

- 351 pages, 16 chapitres
- Une recension des recherches menées par Ramanujan
- Un premier chapitre datant de l'enfance (!)
- Peu d'organisation
- Gestion confuse des pages

Le deuxième carnet

- 356 pages
- Une réorganisation du premier carnet en 21 chapitres
- Volonté de publier ces résultats
- Contient 100 pages de contenus mathématiques divers et non organisés

Le troisième carnet

- 33 pages
- Aucune structuration logique apparente
- Carnet plus tardif que les deux premiers

Remarques : Sur les trois carnets, moins d'une vingtaine de résultats sont accompagnés d'une quelconque indication

De nombreux résultats sont déjà connus

Un style lacunaire

- Des carnets personnels, pas destinés à être lus
- Ramanujan adopte un style proche de celui de Carr : des formules sans preuves
- Il sait (ou croit savoir) prouver ce qu’il écrit
- Au lecteur de se fabriquer ses démonstrations
- Ramanujan refuse de dévoiler ses techniques

Il faut
les éditer !

- 1920 : Hardy plaide pour une édition des trois carnets de Ramanujan
- Pour les résultats déjà connus : produire une référence précise
- Pour les résultats corrects : en fournir une preuve, si possible dans l'esprit de l'auteur
- Pour les résultats faux : un résultat correct n'est sans doute pas loin, il faut le chercher…

L’édition

- 1920–1947 : Hardy produit une vingtaine d’articles inspirés des carnets
- 1927 : pas d’argent pour l’édition des carnets avec les œuvres complètes
- 1929–1940 : travail d’édition systématique entrepris par **Bertram Martin Wilson** et **George Neville Watson**

Watson et Wilson

- 1929–1931 : début du chantier
- 1931 : la tâche est estimée à cinq ans
- Le carnet 2 est privilégié (Wilson : chapitres 2 à 14, Watson : chapitres 15 à 21)
- 1935 : décès de Wilson (38 ans)
- Années 1930 : Watson produira des notes et plus de 30 articles, avant d'abandonner

La transition

- 1923 : manuscrits envoyés à Hardy
- 1934–1947 : documents transmis à Watson
- 1947 : mort de Hardy (70 ans)
- 1965 : mort de Watson (79 ans)

  que faire des documents retrouvés ?
- 1965, 1968, 1969 : envois à Trinity College
- Les documents dorment à la bibliothèque…

1976

- George Andrews (né en 1938) : spécialiste des *q*-séries et des fonctions spéciales
- Connaît bien les travaux de Ramanujan
- 1976 : visite Trinity College pour consulter les notes de Watson

découvre des manuscrits inattendus

Le carnet perdu

- 138 pages manuscrites de Ramanujan
- 1 200 résultats (q-séries, fonctions thêta…)
- Travaux réalisés durant l'année 1920
- Ni un « carnet », ni « perdu »
- Absence de texte
- Difficile à lire
- 1987 : copie **élargie** rendue disponible

Un siècle d'édition

- Hardy : une vingtaine d'articles
- Watson, Wilson : 6 à 8 chapitres du carnet 2
- Facs-similés des carnets disponibles, réalisés en 1957
- Fac-similé du carnet perdu, réalisé en 1987
- Andrews : une trentaine d'articles
- Travaux académiques épars

Bruce Berndt

- Né en 1939
- Théoricien des nombres (analyse et séries)
- 1974 : en résidence à Princeton pour un an

lit deux articles de Grosswald
qui prouvent des formules de Ramanujan

Berndt sait les prouver !

peut-il en prouver d'autres ?

Chapitre 14

- Toutes les formules sont dans le carnet 2, chapitre 14
- Mai 1977 : prouver les 87 formules (1 an !)
- Depuis 1978 : éditer les trois carnets
- Démarche systématique, rigoureuse, tenace
- Aide de nombreux mathématiciens, d’étudiants, de Springer, de fondations…

21 ans
plus tard…

- L’édition des trois carnets est achevée !!!
- **3 254 résultats** (comptabilité de Berndt)
- **Moins d’une dizaine sont faux**
- **Les deux tiers sont originaux**
- 5 livres (2 300 pages)
- Plus de 100 articles

5 livres

- 1985 : carnet 2 (ch. 1 à 9) + rapports
- 1989 : carnet 2 (chapitres 10 à 15)
- 1991 : carnet 2 (16 à 21)
- 1994 : carnets 2 et 3 + carnet 1 (ch. 1 à 16)
- 1998 : carnets 1, 2 et 3
- Plus : édition de la correspondance

  The Ramanujan Journal

  essais, articles, ouvrages techniques

Quid du carnet perdu ?

- Plusieurs dizaines d'articles de G. Andrews
- Édition systématique avec B. Berndt :
  - 2005, volume I, 440 pages
  - 2009, volume II, 420 pages
  - 2012, volume III, 446 pages
  - 2013, volume IV, 452 pages
  - Dernier volume attendu (en 2017)

Citations 1

- *« Des formules telles que, s'il ne les avait pas écrites, personne ne les aurait trouvées, même dans cent ans, même dans deux cents ans »* (Berndt)
- *« Sans aucun doute, Ramanujan pensait comme tout autre mathématicien, il pensait simplement* "with more insight" *que la majorité d'entre nous »* (Berndt)

Citations 2

- *« Ramanujan savait parfaitement quand ses méthodes heuristiques le conduisaient à des résultats corrects, et quand ce n'était pas le cas »* (Berndt)
- *« Personne, dans l'histoire des mathématiques, ne possédait l'habileté de Ramanujan dans le domaine des fractions continues ou des radicaux imbriqués »* (Berndt)

Florilège

$$\frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}}=3{,}1416\ldots$$

370

(1) $\frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}} = 3.14164\cdots = \pi + .00005$ (!!)

(2) $\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{7}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{13}{4^2}\cdot\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 + \frac{19}{4^3}\cdot\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 + \cdots$

(3) $\frac{16}{\pi} = 5 + \frac{47}{64}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{89}{64^2}\cdot\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 + \frac{131}{64^3}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 + \cdots$

(4) $\frac{8(1+\sqrt{5})}{\pi} = (6+\sqrt{5}) + (66+19\sqrt{5})\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{64}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8 +$

$$2\sin\frac{\pi}{18} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{\ldots}}}}}$$

où la suite des signes $-, +, +$ a pour période 3

$$\sqrt[3]{\cos 40^\circ} + \sqrt[3]{\cos 80^\circ} - \sqrt[3]{\cos 20^\circ} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9} - 2\right)}$$

Partitions

$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$

On écrit : $p(4) = 5$.

On calcule que $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$…

$p(7) = 15$, $p(100) = 190\,569\,292$…

Question :

quelles sont les propriétés
de la fonction p ?

Un exemple

- 50,04 % des $p(n)$ inférieurs à 10^6 sont pairs, et 49,96 % sont impairs…

  La proportion des nombres pairs est-elle 1/2 ?
- 33,1 % des $p(n)$ inférieurs à 3 200 sont multiples de 3. La proportion est-elle 1/3 ?
- 34,6 % des $p(n)$ inférieurs à 2 000 sont multiples de 5…
- **Quelle est la distribution des valeurs $p(n)$?**
- Pas le moindre angle d'attaque…

Des réponses

- $p(5k+4)$ est un multiple de 5
  $p(7k+5)$ est un multiple de 7
  $p(11k+6)$ est un multiple de 11
- $$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$
- Vers une formule *exacte* (Rademacher, 1943)

$$\frac{\sum\limits_{n\geq 0} e^{-7\pi n^2}}{\sum\limits_{m\geq 0} e^{-\pi m^2}} = \sqrt[8]{28}\,\frac{\sqrt{13+\sqrt{7}}+\sqrt{13+3\sqrt{7}}}{14}$$

En physique…

- 1 + 2 + 3 + 4 + 5 +… = −1/12

(Euler, Riemann, Ramanujan)

- Vingt-six dimensions en théorie des cordes
- Effet Casimir en électrodynamique quantique

- *String Theory* (volume 1). Joseph Polchinski, Cambridge University Press, 2005
- « L'infini et les fondations mathématiques. » Science4all, Lê Nguyên Hoang, vingt-cinq vidéos disponibles en ligne, 2016–2017.

… mécanique statistique…

- Les *q*-séries (les identités de Rogers–Ramanujan)
- Les modèles sur réseaux exactement solubles (le modèle hexagonal dur)
- Le modèle d'Andrews–Baxter–Forrester

- *The Hard-Hexagon Model And The Rogers–Ramanujan Type Identities*. George Andrews, *Proceedings Of The National Academy Of Sciences* 78, 1981

… théorie conforme des champs…

- Algèbres de Lie (algèbres de Kac–Moody)
- Combinatoire (identités de Macdonald), représentations, partages d'entiers
- Identités de Rogers–Ramanujan et fonction tau de Ramanujan

- *Affine Lie Algebras And Combinatorial Identities*. James Lepowsky, *Proceedings Of The 1981 Rutgers Lie Algebras Conference*, Springer, 1982

… et supergravité

- Méthode du cercle
- Entropie et « aire » des trous noirs

- *On The Positivity Of Black Holes Degeneracies In String Theory*. Kathrin Bringmann et Sameer Murty, arXiv:1208.3476v2, 2012

Un génie

« Son talent était exceptionnellement hors du commun, et il est l'un des rares mathématiciens contemporains que je qualifierais de génie au sens populaire du terme » (Tao)

Mystères…

« *Ses méthodes pour calculer les invariants de classe demeurent en grande partie dans une obscurité impénétrable ; c'est regrettable qu'il ne nous ait laissé aucun indice* » (Berndt)

« *Bien que des progrès considérables aient été réalisés, un rideau noir nous a empêchés de voir ce qui se passe sur la scène, à savoir quelles furent les idées de Ramanujan derrière ses découvertes* » (Berndt, 2016)

Références

The Man Who Knew Infinity – A Life Of The Genius Ramanujan. Robert Kanigel, Washington Square Press, 1991

Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan. Bernard Randé, Cassini, 2002

Les mystérieux carnets de Ramanujan enfin décryptés ! Édouard Thomas, *Maths Société Express*, brochure éditée par le CIJM, 2016.

Ramanujan. Letters And Commentary.
Bruce Berndt et Robert Rankin,
American Mathematical Society, 1995.

An Overview Of Ramanujan's Notebooks.
In: *Charlemagne And His Heritage:
1200 Years Of Civilization And Science
In Europe*, volume 2 (*Mathematical Arts*),
édité par P.L. Butzer, H.T. Jongen et
W. Oberschelp, Brepolz, Turnhout, 1998

Ramanujan's Notebooks – Part I.
Bruce Berndt, Springer, 1985

Ramanujan's Notebooks – Part II.
Bruce Berndt, Springer, 1989

Ramanujan's Notebooks – Part III.
Bruce Berndt, Springer, 1991

Ramanujan's Notebooks – Part IV.
Bruce Berndt, Springer, 1994

Ramanujan's Notebooks – Part V.
Bruce Berndt, Springer, 1998

Ramanujan's Lost Notebook – Part I.
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2005

Ramanujan's Lost Notebook – Part II.
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2009

Ramanujan's Lost Notebook – Part III.
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2012

Ramanujan's Lost Notebook – Part IV.
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2013