

Jouer avec les triangles

François Dubois*

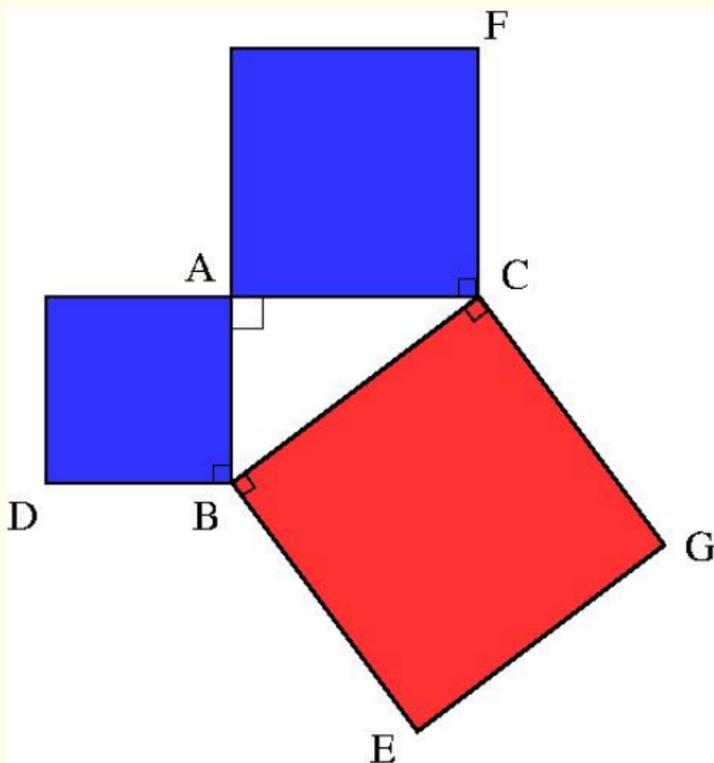
Kafemath au café "Saint Paul de Vence"

15 place Montierneuf, Poitiers

vendredi 17 février 2017

* animateur du Kafemath, café mathématique à Paris... et à Poitiers

Théorème de Pythagore (théorème de l'âne en Bolivie)



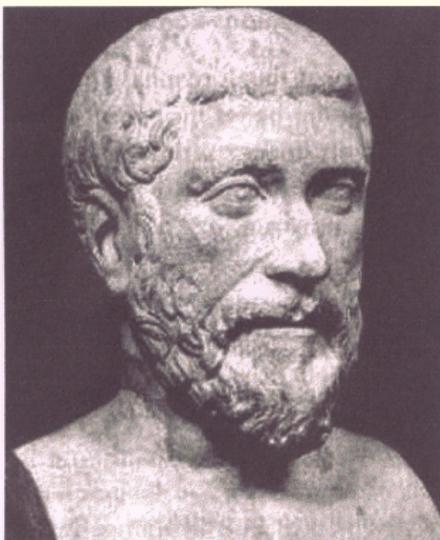
Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Un quatrain pour Pythagore

Le carré de l'hypoténuse
Est égal, si je ne m'abuse
À la somme des carrés
Construits sur les autres côtés.

Franc-Nohain (1872 - 1934)
avocat, sous-préfet, écrivain, poète et librettiste.

Pythagore (Samos, 580 av. J.C. - Métaponte, 485 av.)



Né vers 580 avant J.C. dans l'île de Samos, au large de la Turquie

Aurait été l'élève de Thalès à Milet

Voyage en Egypte et à Babylone ?

Fonde une école scientifique et mystique à Croton (Italie)

Ecole pythagoricienne (jusqu'à 400 av J.C.) : "Tout est nombre"

Expérimentation physique



Les masses sont proportionnelles aux surfaces.
Le théorème de Pythagore exprime que la masse du grand carré est la somme des masses des deux plus petits.

Expérimentation physique (ii)



Pas si mal !

Expérimentation physique (iii)

Mais tout de même... On change de partenaire et on va à la
[Menuiserie Allain, 19 rue Gabriel Péri à Saint Cyr l'Ecole](#)



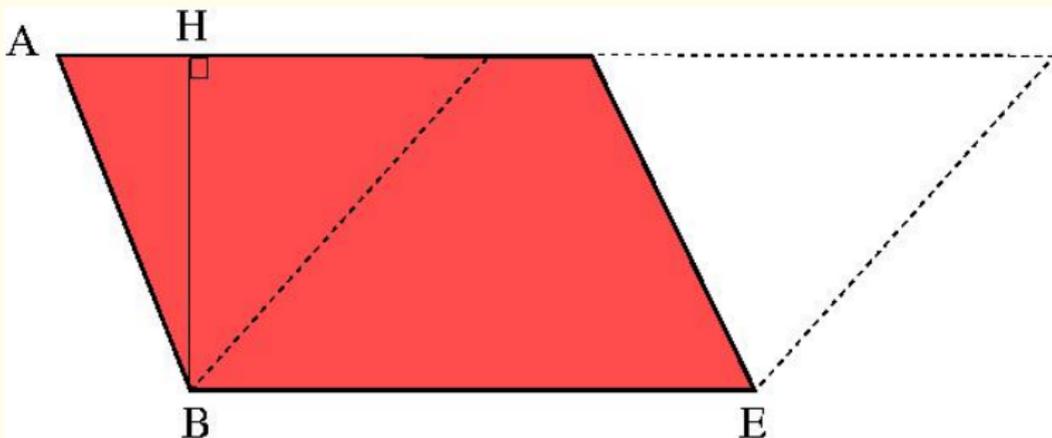
Les carrés ont été un peu diminués...

Expérimentation physique (iv)



L'écart des masses est maintenant imputable à la balance !

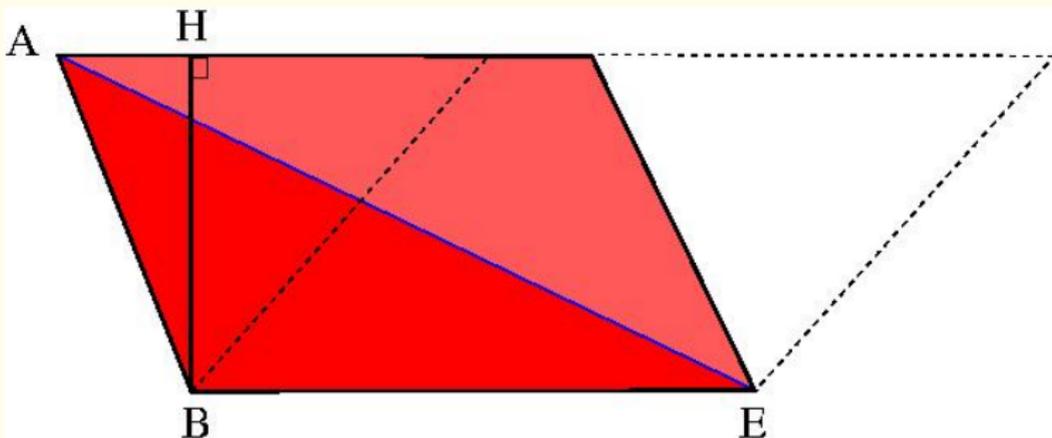
Surface d'un triangle



La surface commune des deux parallélogrammes est égale

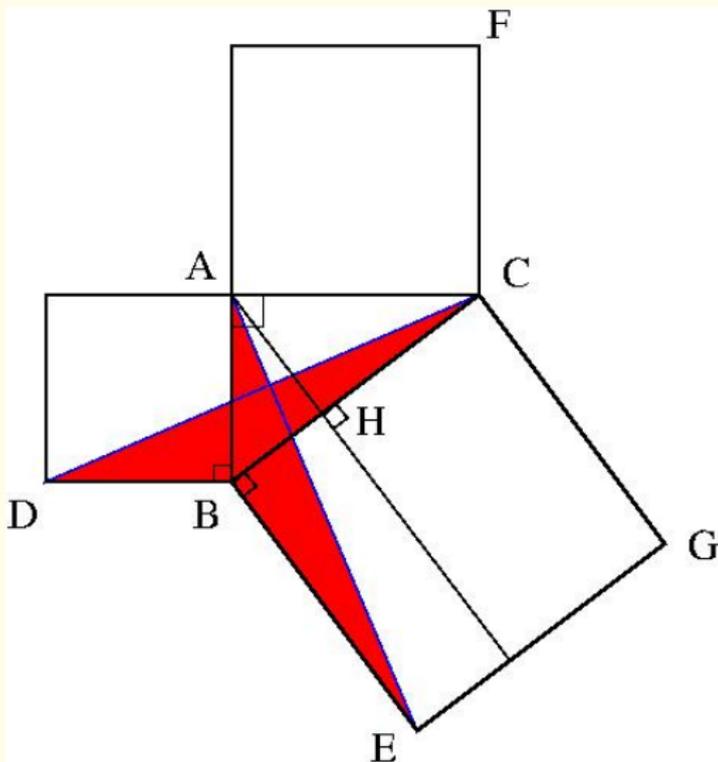
à la base BE multipliée par la hauteur BH .

Surface d'un triangle (ii)



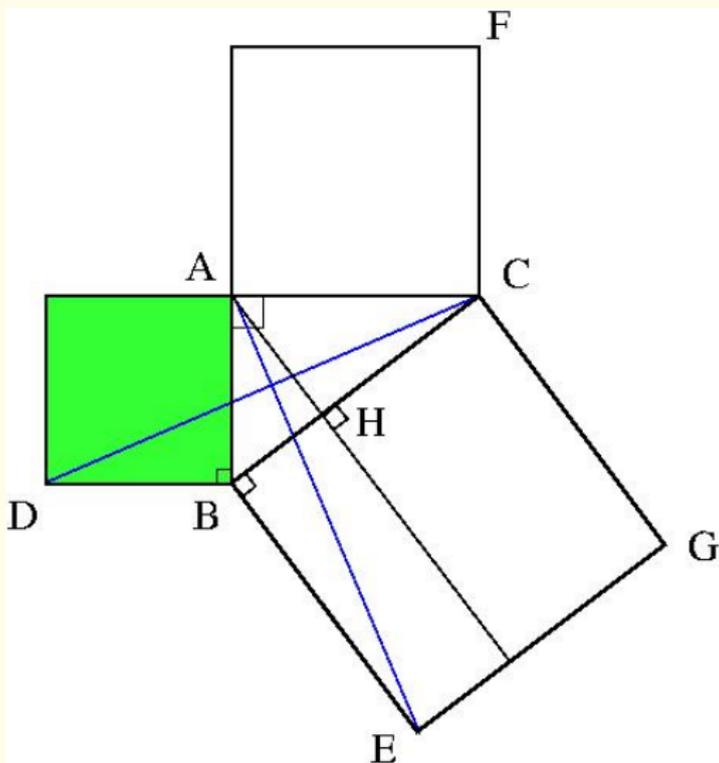
La surface du triangle BEA est égale
à la moitié de la surface du parallélogramme.

Preuve d'Euclide (moulin à vent)



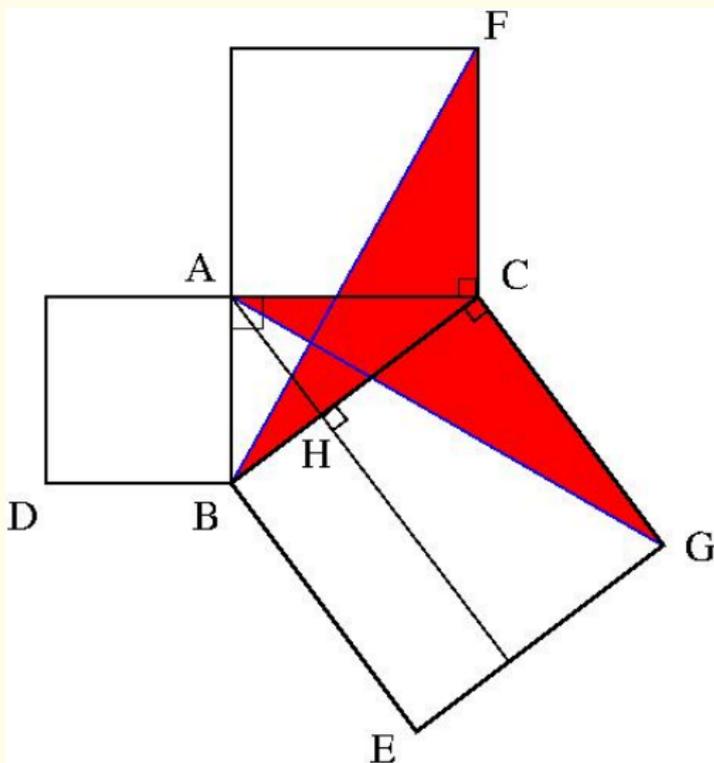
Les deux triangles DBC et ABE sont égaux.

Preuve d'Euclide (moulin à vent) (ii)



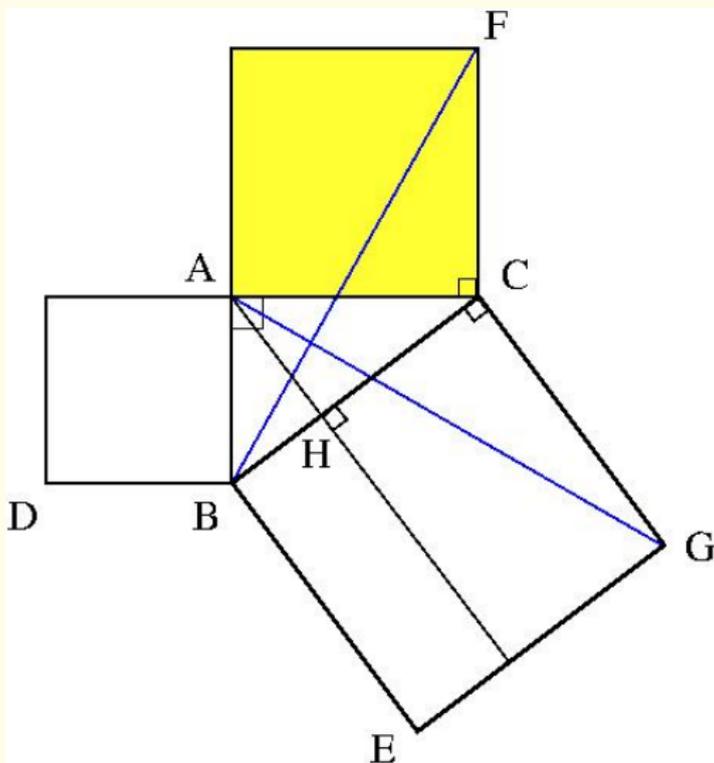
La surface du carré vert est le double de celle du triangle DBC .

Preuve d'Euclide (moulin à vent) (iv)



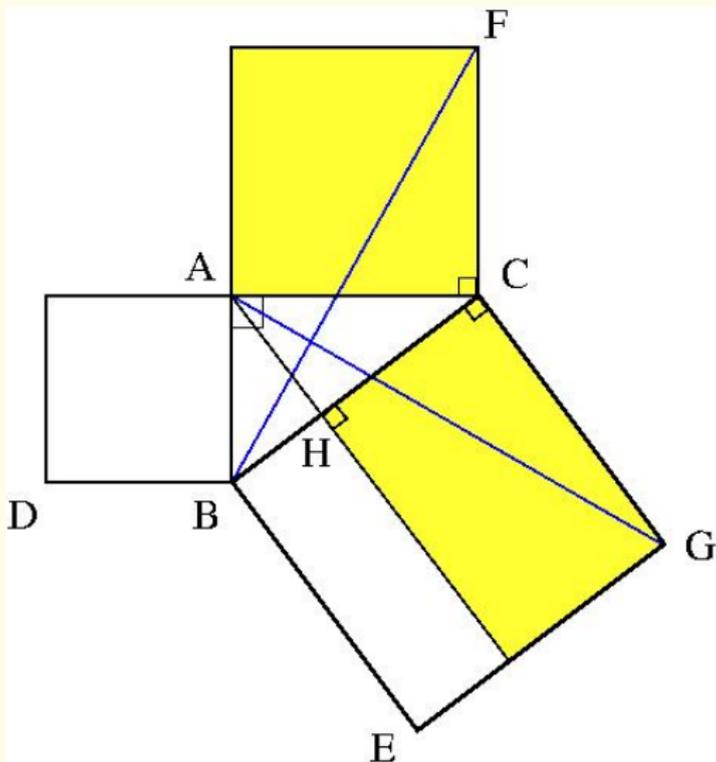
Même chose de l'autre côté. Les triangles GCA et BCF sont égaux.

Preuve d'Euclide (moulin à vent) (v)



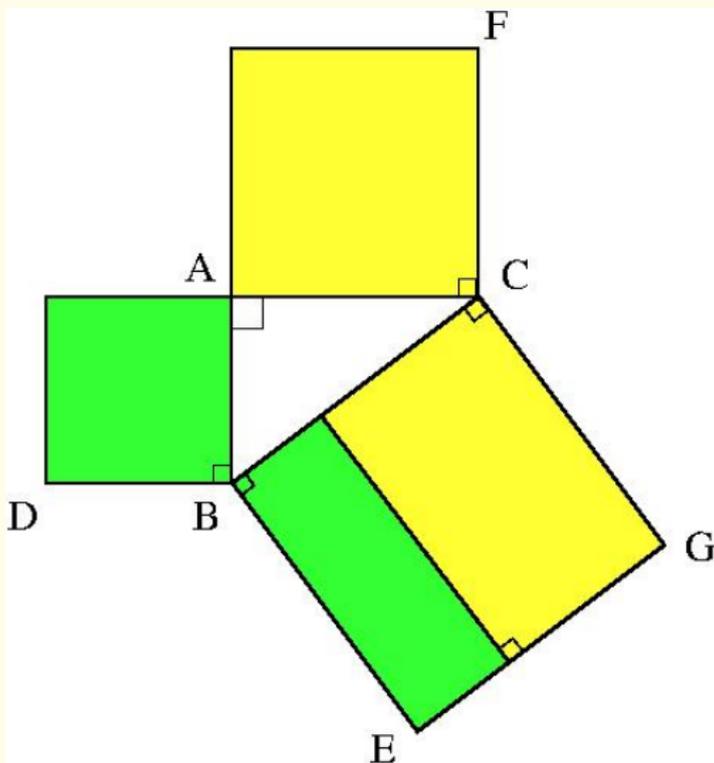
La surface du carré jaune est le double de celle du triangle BCF .

Preuve d'Euclide (moulin à vent) (vi)



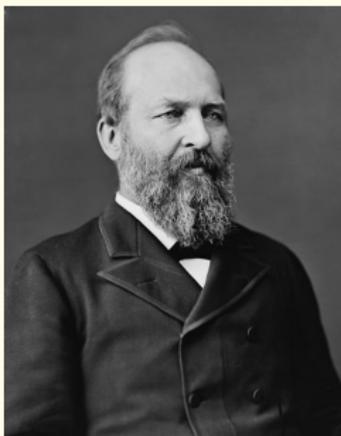
La surface du rectangle jaune est le double de celle du triangle GCA .

Preuve d'Euclide (moulin à vent) (vii)



On réunit les deux propriétés ; le théorème de Pythagore est établi.

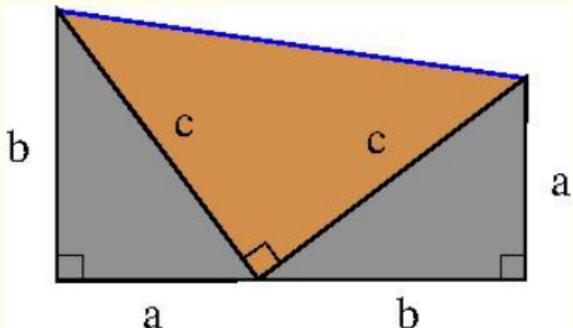
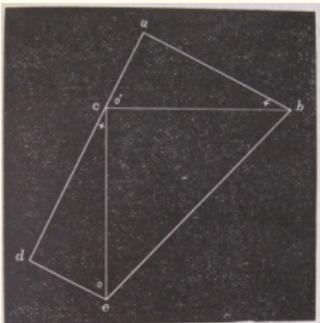
James Garfield (1831 - 1881)



militaire qui a participé à la guerre de Sécession
membre du Congrès américain (Ohio) de 1862 à 1878
20 ième **président des Etats Unis** d'Amérique (élection de 1880)
meurt assassiné après moins d'un an de mandat.

Fait des maths dans ses heures perdues au congrès,
il publie une preuve très élégante du théorème de Pythagore :
Pons Asinorum (le pont des ânes) dans le **New-England Journal of Education** à Boston (volume 3, numéro 14, page 161, 1876).

Preuve de James Garfield (1876)



On calcule de deux façons l'aire du trapèze

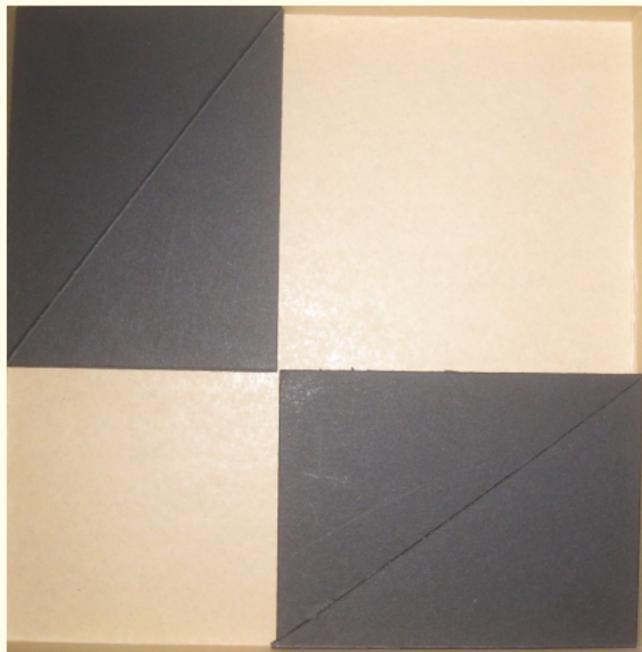
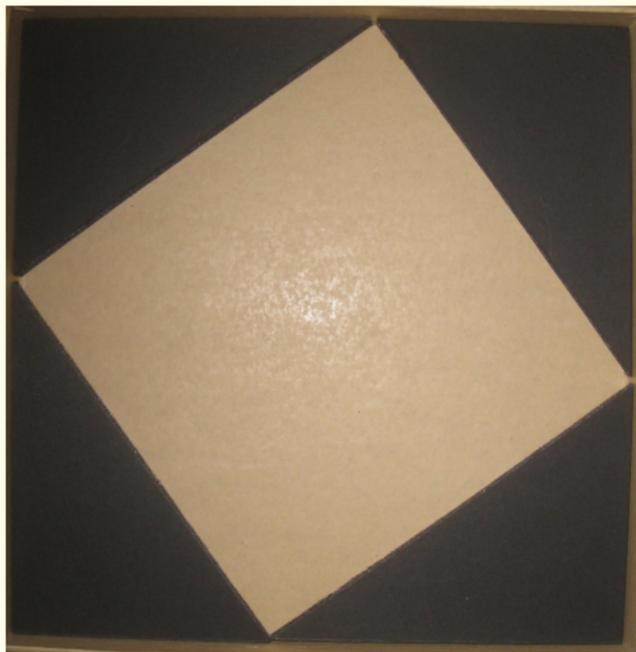
première façon : $(a + b) \frac{a + b}{2}$

seconde façon : $\frac{c^2}{2} + 2 \frac{ab}{2}$

Donc $\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{2ab}{2} = \frac{c^2}{2} + ab$

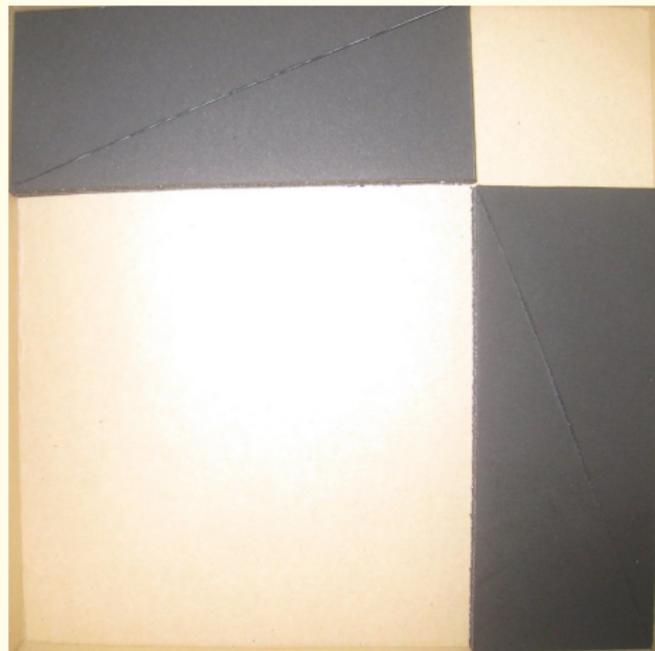
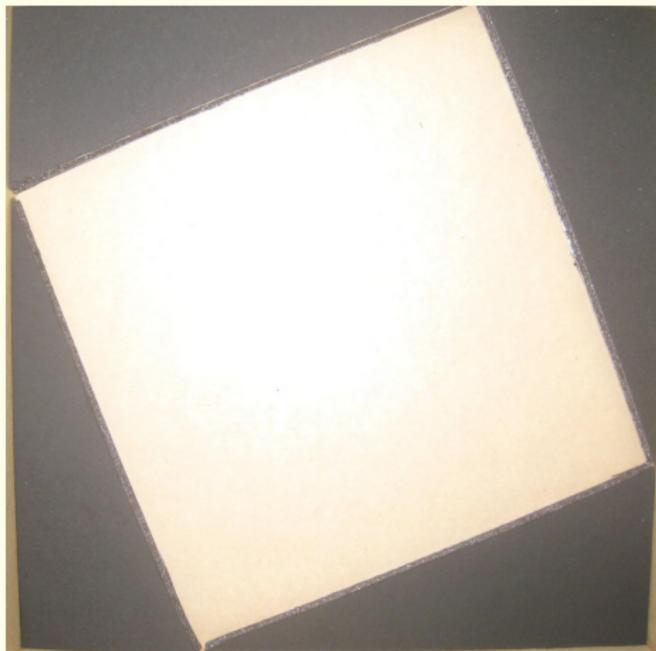
et $a^2 + b^2 = c^2$

Preuve de James Garfield : illustration expérimentale



Les deux surfaces claires sont égales.

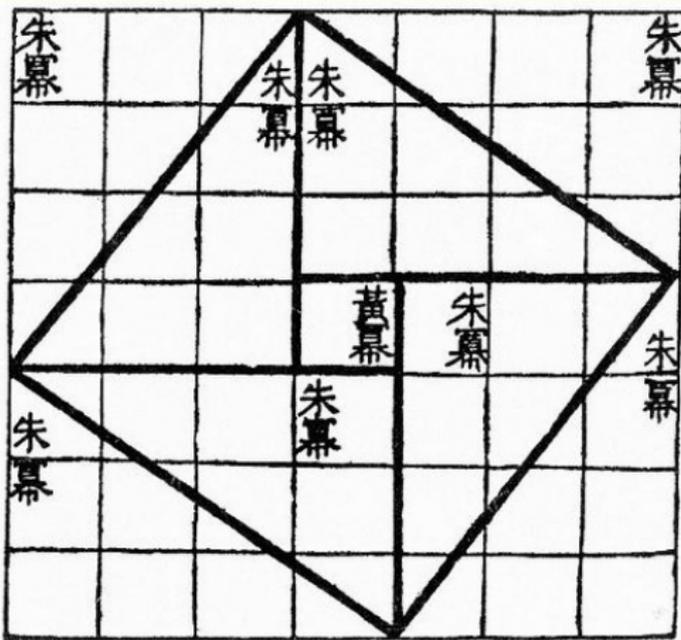
Preuve de Garfield : seconde illustration expérimentale



Les deux surfaces claires sont égales.

Traité chinois des "Neuf Chapitres"

句股幂合以成弦幂



Théorème gougou

Jiuzhang Suanshu, “Les Neuf Chapitres sur l’art mathématique”,
traité chinois (206 avant - 220 après J.C.)
Commentaire de Liu Hui (263 après J.C.)



Liu-Hui ($\simeq 220$ - $\simeq 280$)

Théorème “gougou”
de : gou (base) et gu (hauteur)

suite de l'histoire...

Tablette d'argile "Plimpton 322" ([Babylone](#), 1800 avant J.C.)
Triplets pythagoriciens ?

Inde. [Baudhayana](#), 800 avant J.C.

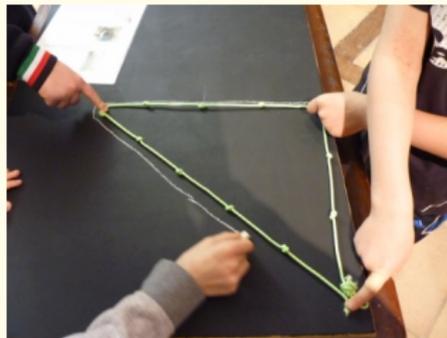
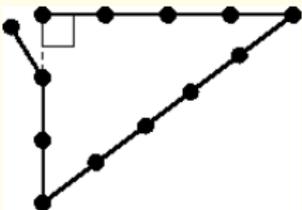
"Sulba-Sutra", traité de construction des autels.

Preuves dans des cas particuliers et triplets pythagoriciens.

[Corde à treize noeuds](#)

en Mésopotamie, Inde, Egypte et au Moyen-Âge.

Angle droit grâce au triangle (3, 4, 5).



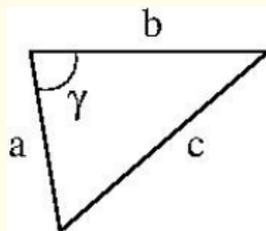
suite de l'histoire... (ii)



Ghiyath al-Kashi, mathématicien perse, 1380-1429.

Généralisation du théorème de Pythagore

dans un triangle quelconque



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Ah ces fractions !



Marcel Pagnol et Alexander Korda, *Marius*, 1931

Raimu et Pierre Fresnay

Ah ces fractions ! (ii)

CÉSAR

C'est ça ! Insulte la clientèle au lieu de te perfectionner dans ton métier ! Eh bien, pour la dixième fois, je vais te l'expliquer, le picon-citron-curaçao. (Il s'installe derrière le comptoir.)

Approche-toi ! (Marius s'avance et va suivre de près l'opération.)

César prend un grand verre, une carafe et trois bouteilles. Tout en parlant, il compose le breuvage.)

Tu mets d'abord **un tiers** de curaçao. Fais attention : un tout petit tiers. Bon. Maintenant, **un tiers de citron**. Un peu plus gros. Bon. Ensuite, **un BON tiers** de Picon. Regarde la couleur. Regarde comme c'est joli. Et à la fin, **un GRAND tiers** d'eau. Voilà.

MARIUS Et ça fait **quatre tiers**.

CÉSAR

Exactement. J'espère que cette fois, tu as compris.

(Il boit une gorgée du mélange).

Ah ces fractions ! (iii)

MARIUS

Dans un verre, il n'y a que **trois tiers**.

CÉSAR Mais, imbécile, ça dépend de la grosseur des tiers !

MARIUS

Eh non, ça ne dépend pas. Même dans un arrosoir, on ne peut mettre que **trois tiers**.

CÉSAR (trionphal)

Alors, explique moi comment j'en ai mis **quatre** dans ce verre.

MARIUS Ça, c'est de l'arithmétique.

CÉSAR

Oui, quand on ne sait plus quoi dire, on cherche à détourner la conversation.

Ah ces fractions ! (iv)

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \dots = \frac{2+3}{6+9} = \dots = \frac{\alpha + 3\beta}{3\alpha + 9\beta} = \dots$$

Un même nombre **rationnel**,

c'est à dire quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres entiers,
 peut être représenté de multiples façons
 avec des numérateurs et des dénominateurs différents !

Règle d'**égalité de deux fractions** :

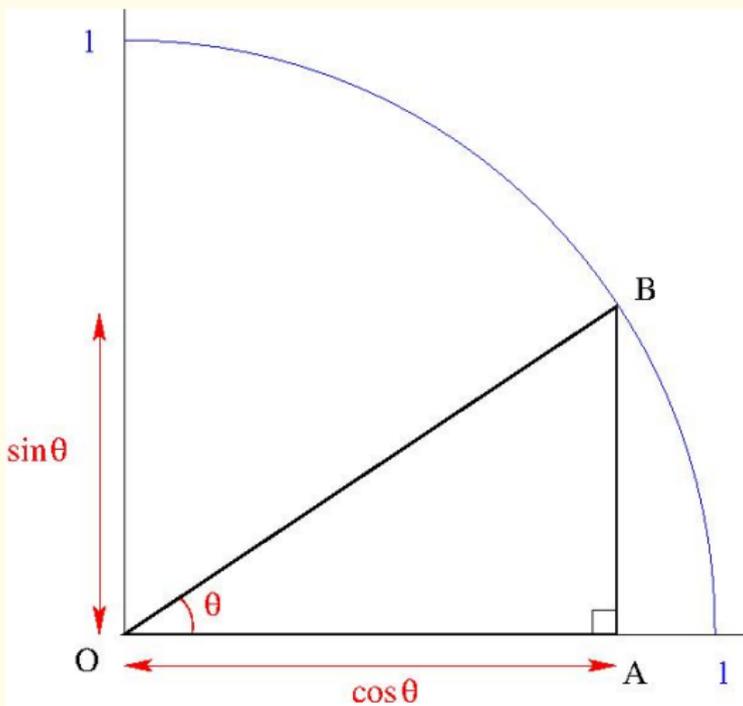
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si et seulement si } ad = bc$$

Si deux fractions sont égales,

on peut **jouer** avec le numérateur et avec le dénominateur

$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ on a aussi } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\alpha a + \beta c}{\alpha b + \beta d} !!$$

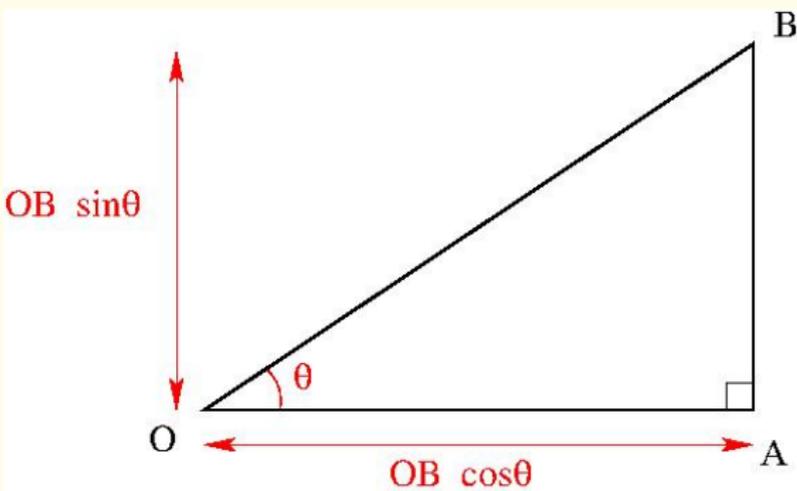
La trigo, quelle horreur !



Dans le triangle OAB , le théorème de Pythagore nous apprend que

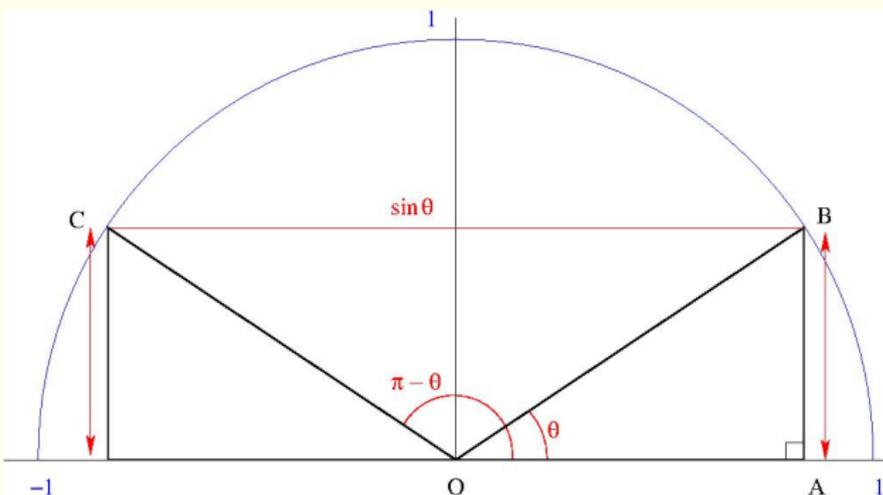
$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

La trigo, quelle horreur ! (ii)



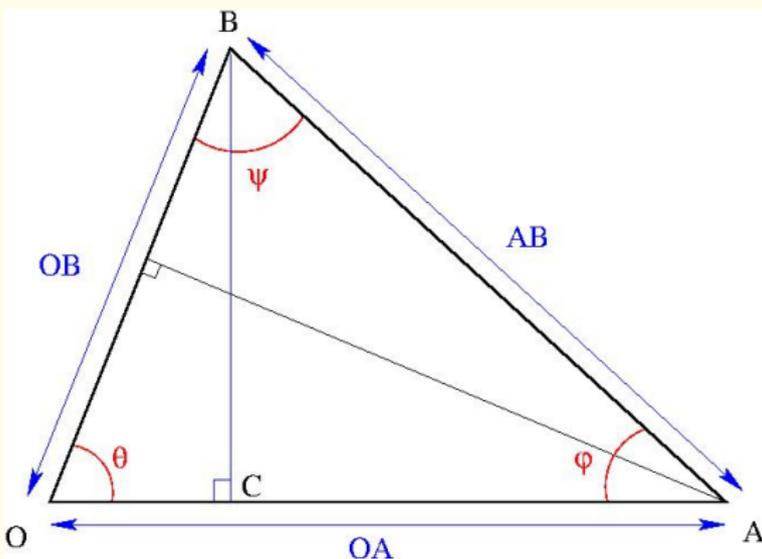
$$\sin \theta = \frac{AB}{OB} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}, \quad \cos \theta = \frac{OA}{OB} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$$

La trigo, quelle horreur ! (iii)



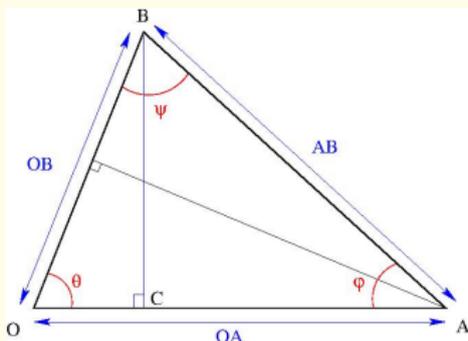
$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

La trigo, quelle horreur ! (iv)



$$\begin{aligned}
 \text{surface du triangle "quelconque" OAB} &= \frac{1}{2} OA BC = \\
 &= \frac{1}{2} OA OB \sin \theta = \frac{1}{2} OA AB \sin \varphi = \frac{1}{2} OB AB \sin \psi \\
 \text{et} \quad &\frac{\sin \theta}{AB} = \frac{\sin \varphi}{OB} = \frac{\sin \psi}{OA}
 \end{aligned}$$

La trigo, quelle horreur ! (v)



$$\frac{\sin \psi}{OA} = \frac{\sin \theta}{AB} = \frac{\sin \varphi}{OB} \quad \text{et} \quad \psi = \pi - (\theta + \varphi)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \psi}{OA} &= \frac{\frac{AC}{AB} \sin \theta}{\frac{AC}{AB} AB} = \frac{\frac{OC}{OB} \sin \varphi}{\frac{OC}{OB} OB} \\ &= \frac{\cos \varphi \sin \theta}{CA} = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{OC} = \frac{\cos \varphi \sin \theta + \cos \theta \sin \varphi}{OC + CA} \end{aligned}$$

$$\sin \psi = \sin(\pi - (\theta + \varphi)) = \sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi$$

de même, $\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$

L'imaginaire sans complexes ?



John Napier (1550 - 1617) et Leonhard Euler (1707 - 1783)

L'imaginaire sans complexes !

Devinette

Au café des pratiques,

Mr Logarithme et Mlle Exponentielle prennent un café.

Mais qui paie les consommations ?

L'imaginaire sans complexes !

Devinette

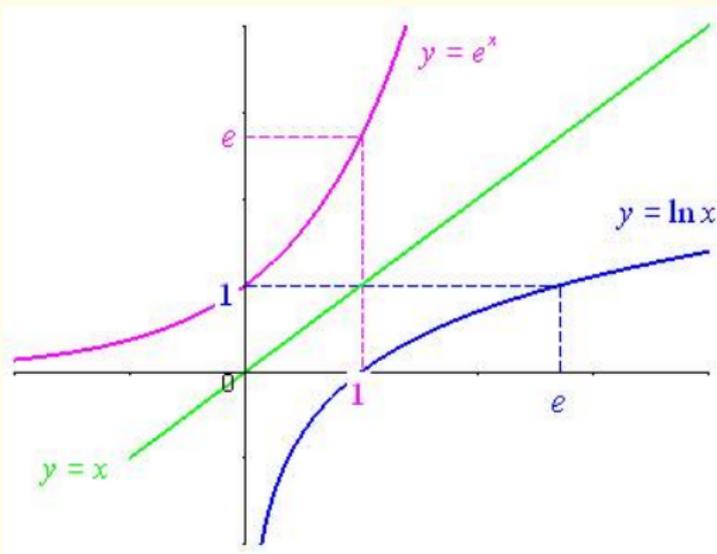
Au café des pratiques,

Mr Logarithme et Mlle Exponentielle prennent un café.

Mais qui paie les consommations ?

L'exponentielle parce que Logarithme **ne paie rien**

Logarithme et exponentielle



<http://mathsv-ressources.univ-lyon1.fr>

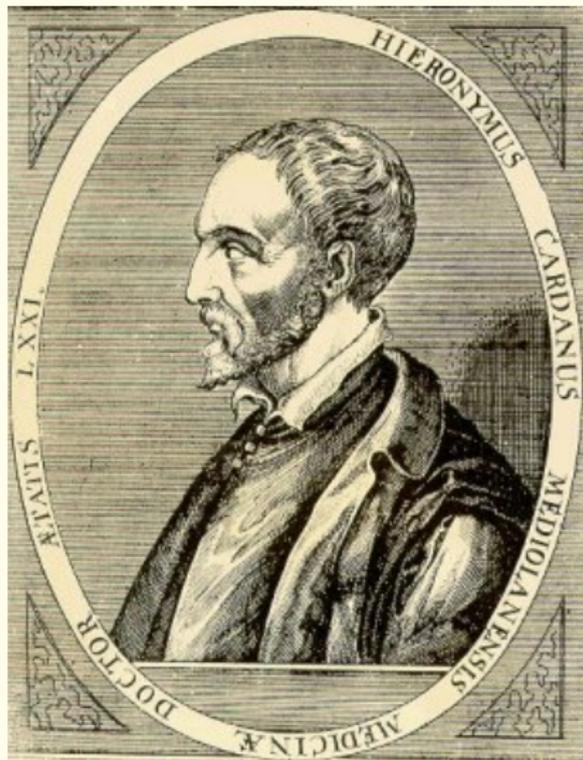
Logarithme : remplacer les multiplications par des additions

pour faire moins de calculs... $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

L'exponentielle est la fonction réciproque et remplace les additions

par des multiplications : $\exp(a + b) = \exp a \exp b$

Nombres "imaginaires"



Niccolò Tartaglia (1499-1557) et Gerolamo Cardano (1501-1576)

Nombres “imaginaires”

Résoudre l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$

Méthode de Tartaglia - Cardano...

On a besoin de manipuler une grandeur telle que
son carré vaut “-1” !!

Mais qu'on se rassure...

cette grandeur disparaît à la fin du calcul, elle est imaginaire !

Grandeur nommée “più di meno”

par Raphaël Bombelli (1526 - 1572)

“più di meno via più di meno fà meno”

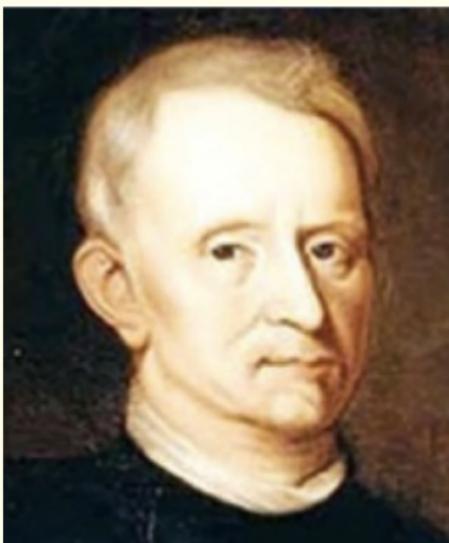
Un magnifique Kafemath de Gilles Moine le 23 février 2012...

voir <http://kafemath.fr/2011-2012/kfm-2011-2012.html>

“*i* comme impossible”

$$i^2 = -1$$

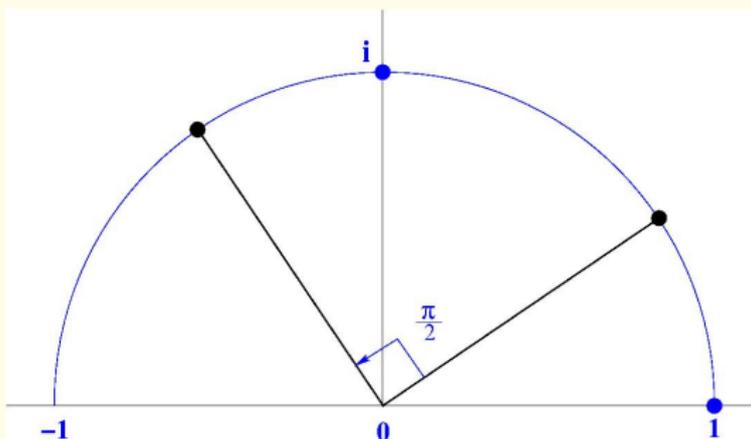
Les nombres imaginaires pour la géométrie



Jean-Robert Argand (1768 - 1822)

et Augustin Louis-Cauchy(1789 - 1857)

Les nombres imaginaires pour la géométrie (ii)



Interprétation géométrique du nombre i
grâce à une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$;
notion de “plan complexe”

Euler et l'exponentielle

Comment généraliser la relation fondamentale
qui transforme l'addition en multiplication

$$\exp(a + b) = \exp a \exp b$$

aux nombres imaginaires ?

Bonne façon de faire : $\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$

On peut alors écrire la relation fondamentale

avec $a = i\theta$ et $b = i\varphi$:

$$\exp(i(\theta + \varphi)) = \exp(i\theta) \exp(i\varphi)$$

Alors

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi) &= (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i (\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi) \end{aligned}$$

On sépare les parties réelle et imaginaire :

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$$

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi$$

donc la trigo, c'est très simple !!

Relation d'Euler : $e^{i\pi} = -1$

Exthétique et mathématiques...

$e^{i\pi} = -1$ une relation qui relie

$e \simeq 2,71828\dots$

$\pi \simeq 3,1415926\dots$

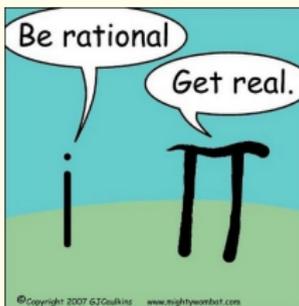
l'imaginaire i , qui n'est pas un nombre "réel" !

-1 le nombre des températures négatives !

multiplication

exponentiation

La "plus belle formule" des mathématiques ?



dessin de Gordon J. Caulkins, <http://www.mightywombat.com>
sur cette présentation avec sa permission !

Richard Feynman (1918 - 1988) et le nombre π



théoricien de l'électrodynamique quantique,
inventeur de l'**intégrale de chemin**, dite "de Feynman"
et encore mal comprise des mathématiciens,
prix Nobel de physique (1965), co-auteur du
"cours de physique de Feynman" (1961 - 1963),
a eu l'idée de l'ordinateur quantique (1982)
Si une formule mathématique utilise le nombre π ,
sa question favorite : "**Où est le cercle ?**"

Références indispensables...

Albert Ducrocq et André Warusfel

Les mathématiques : plaisir et nécessité,

Vuibert, Paris, 2000.

Alain Bouvier, Michel George et François Le Lionnais

Dictionnaire des mathématiques

Presses Universitaires de France, 2005.

Amy Dahan-Dalmedico et Jeanne Peiffer

Une histoire des mathématiques. Routes et Dédales

Editions du Seuil, Paris, 1986.

Richard Mankiewicz

L'histoire des mathématiques

Editions du Seuil, Paris, 2001.

Karin Chemla et Guo Shuchun

*Les neuf chapitres ; le classique mathématique
de la Chine ancienne et ses commentaires*

Dunod, Paris, 2005.

Les Echos, Michel Broué, 26 janvier 2017



Sophie Germain (1776-1831) a beaucoup correspondu avec Carl Friedrich Gauss, sous le pseudonyme de "Antoine Auguste Leblanc"

Sofia Kovalevskaja (1850-1891), mathématicienne russe, première femme obtenir un doctorat en Allemagne, participa la Commune de Paris.

Les Echos, Michel Broué, 26 janvier 2017 (ii)



Emmy Noether (1882-1935), mathématicienne allemande, spécialiste d'algèbre abstraite et de physique théorique, Einstein avait reconnu son immense génie mathématique

Claire Voisin (née en 1962), médaille d'or 2016 du CNRS, titulaire (depuis juin 2016) de la chaire de géométrie algébrique au Collège de France.

Kafemath

Première séance du “kafemath” en octobre 2004

ASSOCIATION “KAFEMATH”

Art. 1. Fondation

Il est fondé, entre les adhérents aux présents statuts, une association régie par la loi du 1^o juillet 1901 ayant pour nom “Kafemath”.

Art. 2. Objet

Cette association a pour objet le plaisir à faire des mathématiques, les découvrir, les redécouvrir, les faire aimer, comme l'énonce son texte fondateur, proposé par François Dubois en mars 2005 :

« Les mathématiques sont un élément fondamental de la culture. Mais elles sont souvent trop isolées dans des lieux réservés aux spécialistes ! Tout en restant ouvert à tous, au Kafemath, on parle de maths, on en découvre l'histoire, on en fait un peu, on en débat, on en apprend si on veut. On y rit et surtout, surtout, on y prend plaisir ! Ensemble. Et il suffit d'être passionné pour devenir co-animateur. »

Les mathématiques sont l'affaire de tous. En faciliter l'accès est l'objet du Kafemath.

Association créée en février 2011...

Kafemath (ii)

Les séances du Kafemath en 2016-2017



jeudi 15 décembre 2016 : "[Pour une histoire des géométries](#)",
avec [François Lavallo](#), membre de l'association Kafemath, à "[La Coulée Douce](#)", 51 rue du Sahel, Paris 12e.



jeudi 10 novembre 2016 : "[Comment on a construit la gamme](#)"
avec Gilles Moine, membre de l'association Kafemath, à "[La Coulée Douce](#)", 51 rue du Sahel, Paris 12e.



vendredi 21 octobre 2016 : [Gathering 4 Gardner](#), à la Commune Libre d'Aligre, à Paris 12e. En hommage à [Martin Gardner](#). Avec les interventions de [Philippe Boulanger](#), [Jean-Jacques Dupas](#), [Jacques Fournier](#), [Jean Gagnereau](#), [François Lavallo](#), [Philippe Socrate](#), [Alain Zalmanski](#) ; animé par [Pierre Berloquin](#).
Le site du [G4G-Oulipo](#) proposé par Jean Gagnereau.



Kafemath (iii)

samedi 10 septembre 2016 : présentation de l'association "Kafemath"

au forum des associations du [12e arrondissement](#) de Paris, boulevard de Reuilly, toute la journée.

Avec l'aide de nombreux membres de l'équipe. Une belle journée boulevard de Reuilly à Paris.



Merci de votre attention !

