



Pour une histoire des géométries

d'Euclide à Bourbaki

Géométrie au cours des Âges

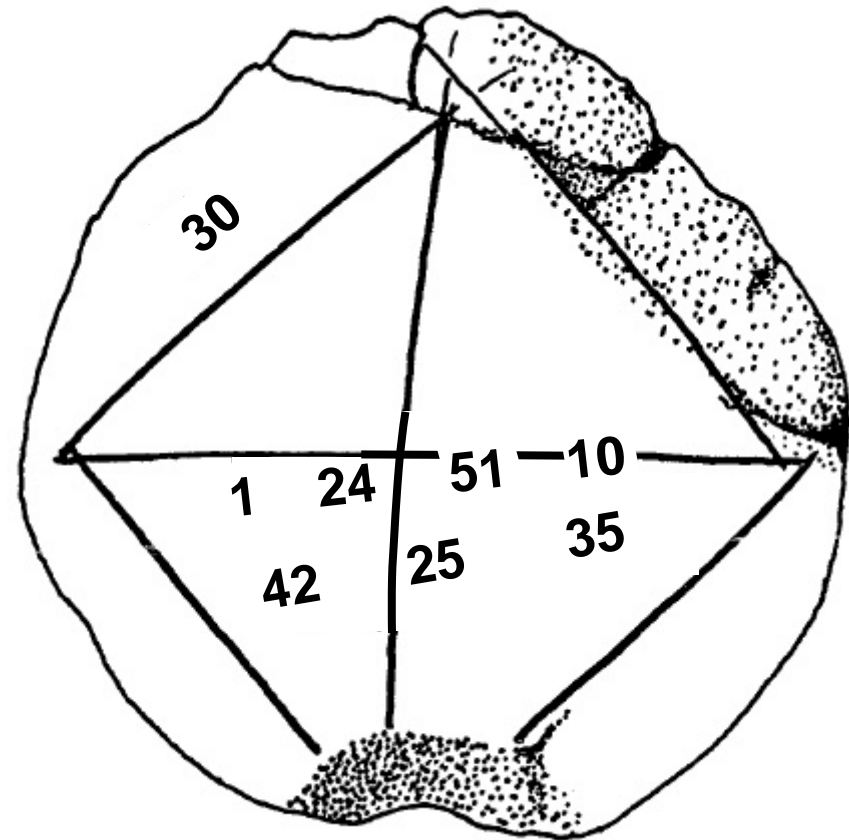
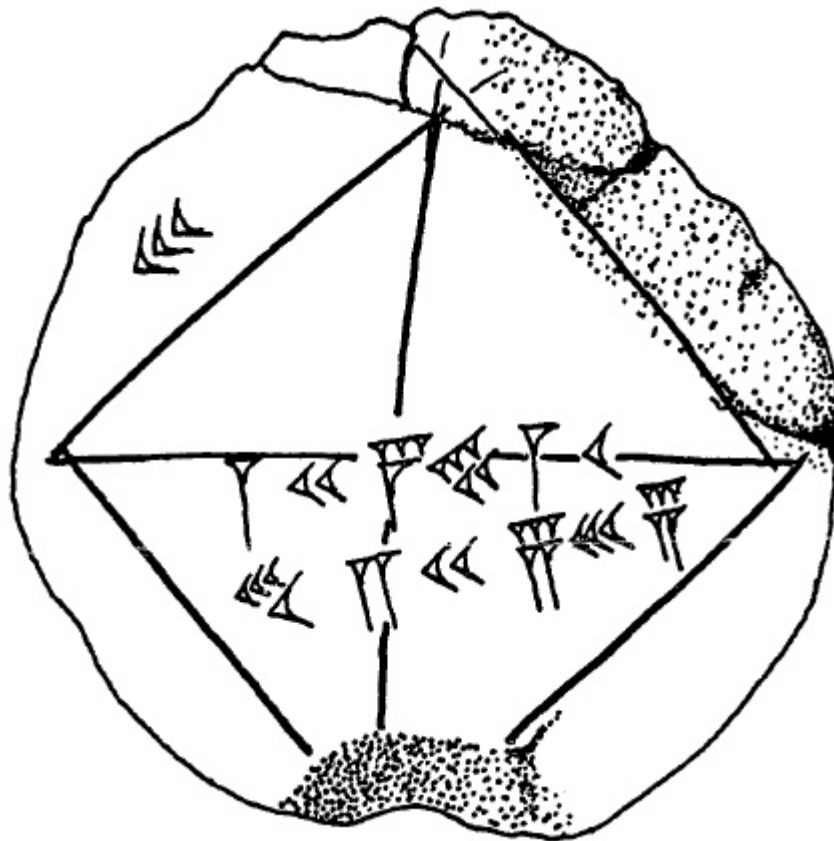


Papyrus de Rhind
vers - 2000



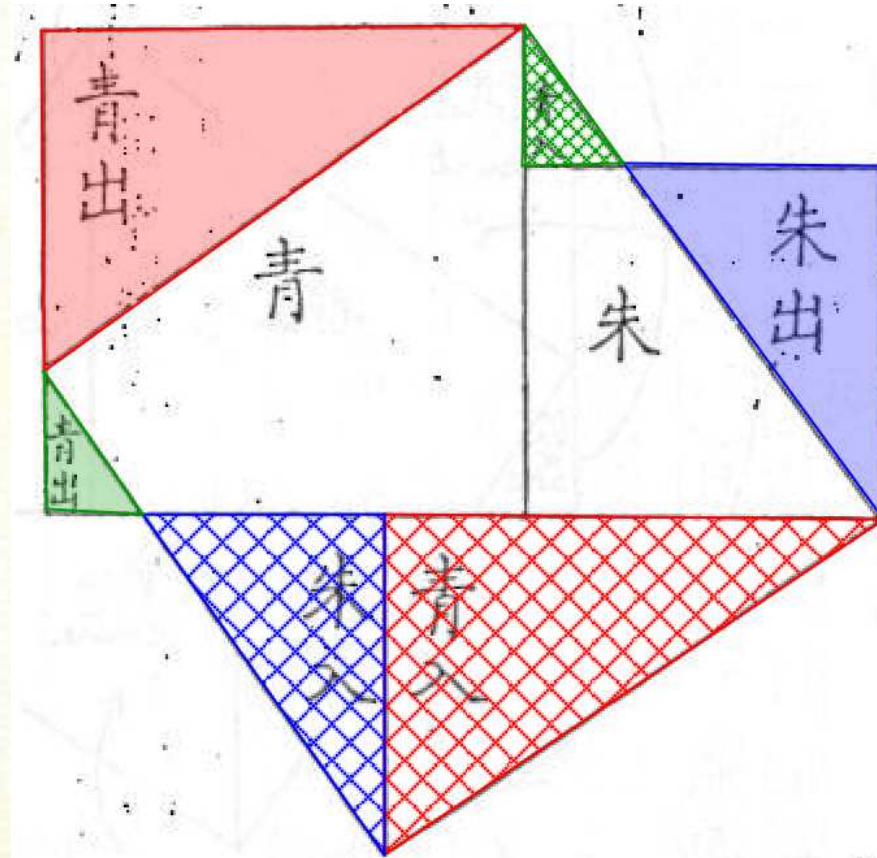
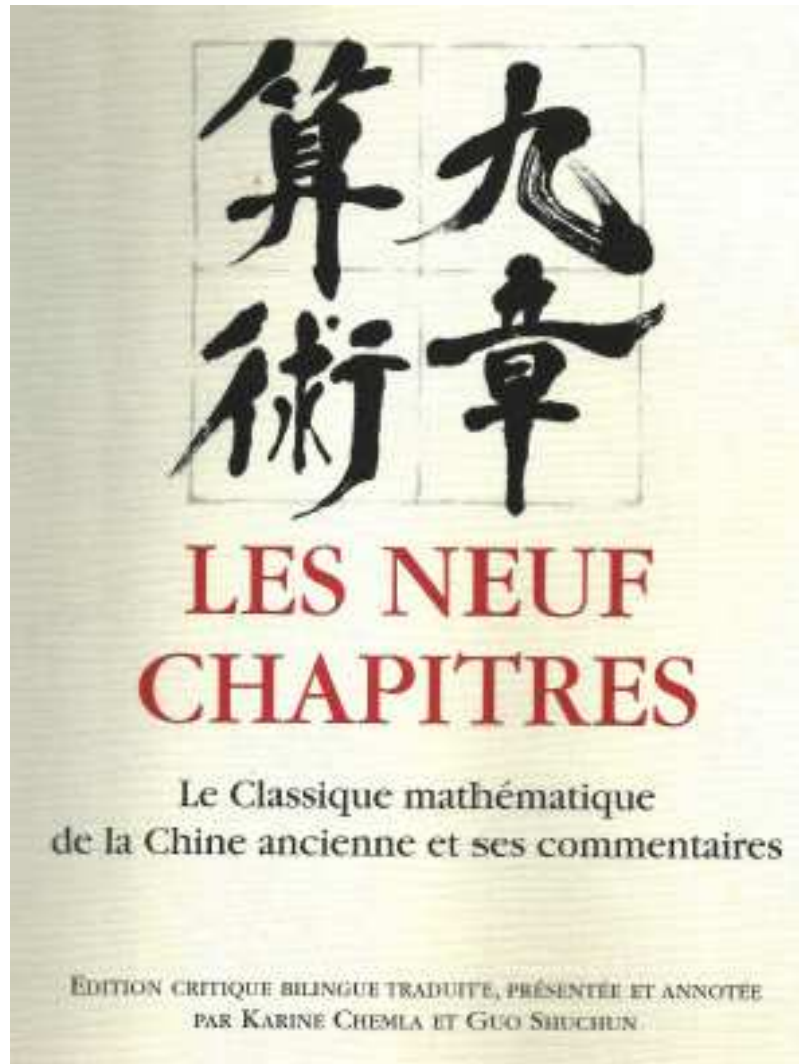
Babylone
vers - 1700

Géométrie au cours des Âges



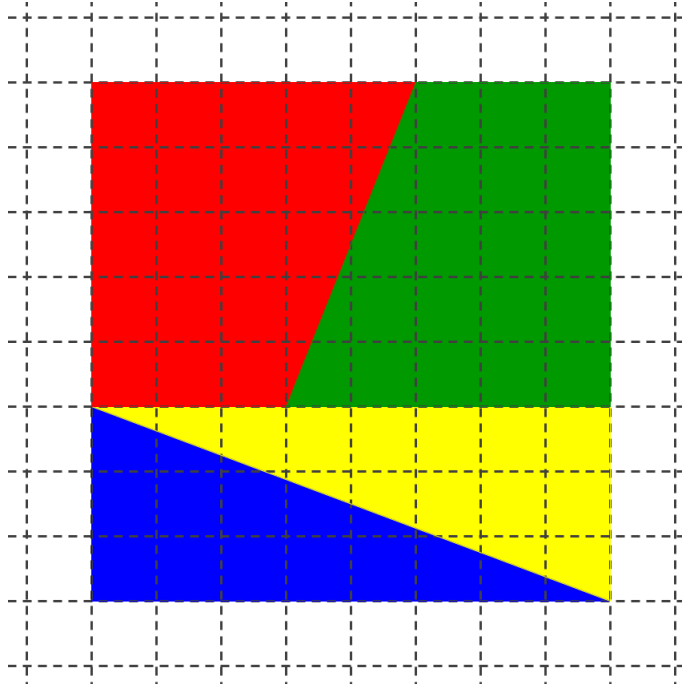
$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600} = 1,41421\overline{296}$$

Géométrie au cours des Âges

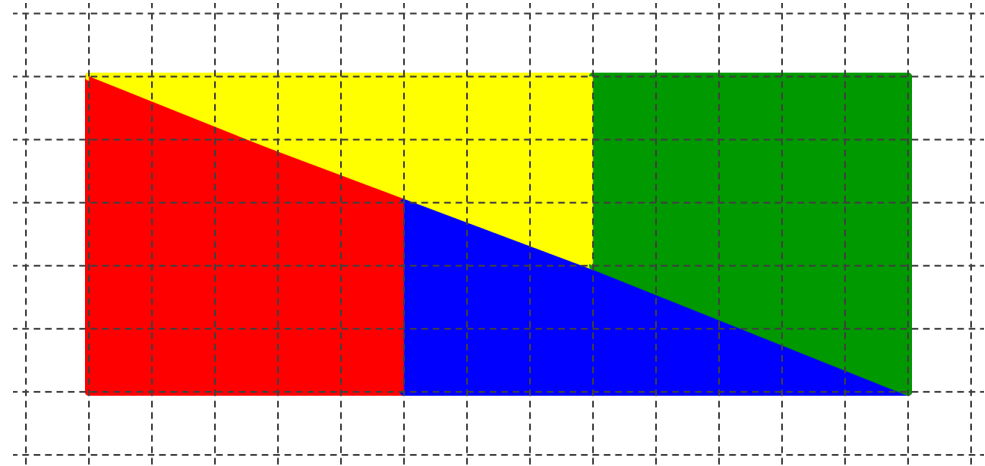


Lewis Carroll (1832-1898)

$$8 \cdot 8 = 64$$

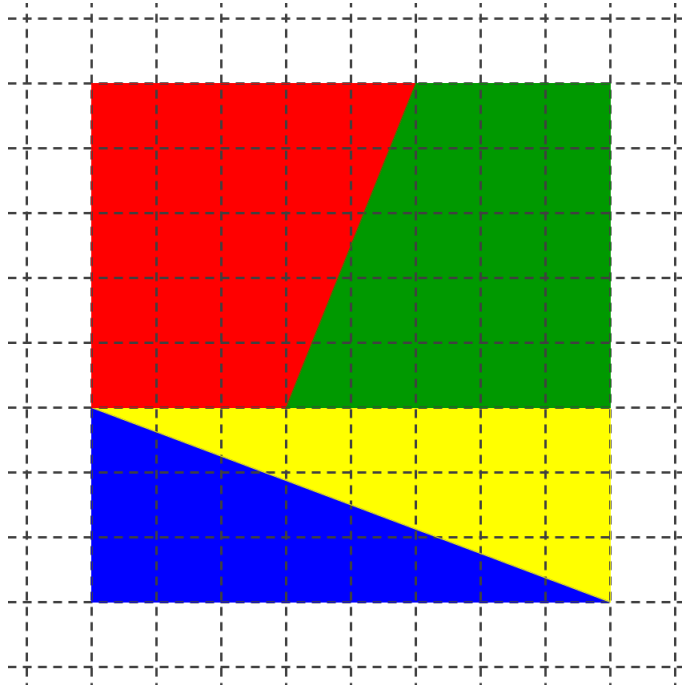


$$5 \cdot 13 = 65$$

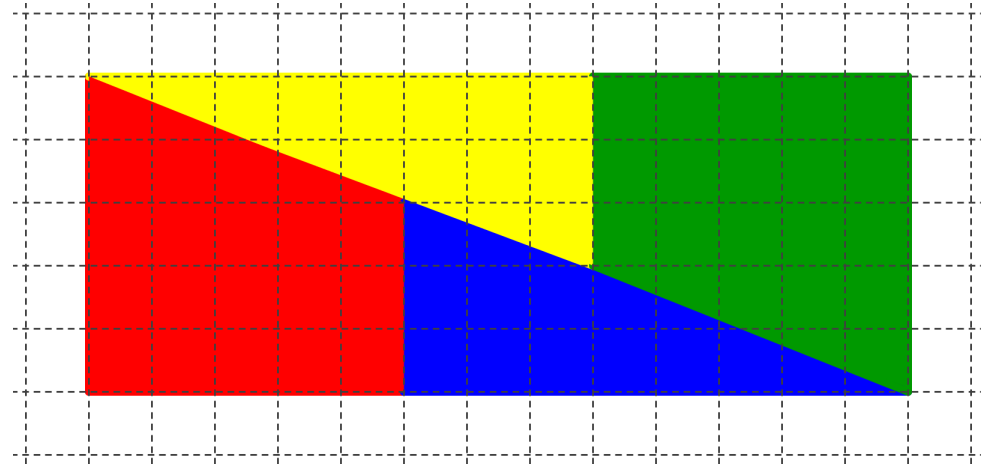


Lewis Carroll (1832-1898)

$$8 \cdot 8 = 64$$

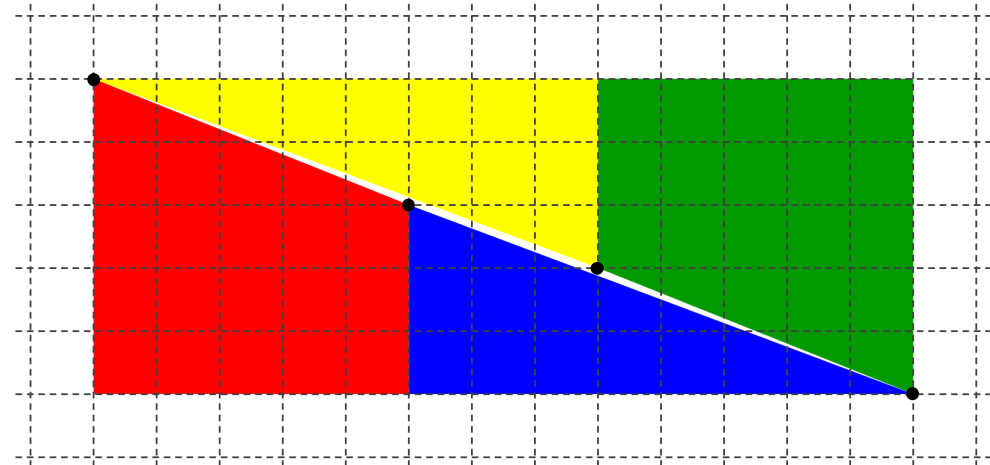


$$5 \cdot 13 = 65$$



George PICK (1899)

$$S = \frac{B}{2} + I - 1$$



$$65 = 64 + 1$$

Platon (vers -428, vers -348)

Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre

Monde visible <i>Perception des sens</i>		Monde intelligible <i>Perception intellectuelle</i>	
		Pensée	Esprit
illusion	concret	abstrait	spirituel
ombres	nature	géométrie	idées
Opinion		Vérité	

← **GEOMETRIE** →

« En outre, ils font usage de figures visibles, et sur ces figures, ils construisent des raisonnements sans avoir à l'esprit ces figures elles-mêmes, mais les figures parfaites dont celles-ci sont des images ».

(La République)

Les *Eléments* d'Euclide

vers - 300



Papyrus Oxyrhyncus 29, vers II^e siècle

Les *Eléments* d'Euclide

Eléments: 465 propositions en 13 livres

Livres I à IV : Géométrie plane

(Pythagore, cercle, polygones réguliers)

Livres V à X : Proportions

(Thalès, $\sqrt{2}$)

Livres XI à XIII : Géométrie dans l'espace

(Polyèdres réguliers, aires, volumes cône, cylindre, sphère)

Ne traite pas : *quadrature des surfaces, duplication du cube, trisection de l'angle.*

Les *Eléments* d'Euclide

Originalité :

Organisation des concepts de façon logique et déductive à partir de notions clairement énoncées:

- **Définitions** : notions premières de la théorie, acceptées sans justification.
- **Demands** : *postulats, plus spécifiquement géométriques.*
- **Notions communes** : *axiomes, caractère d'évidence plus fondamentale.*

Démonstrations de propositions: les 28 premières propositions n'utilisent pas le Postulatum, les suivantes, oui.

Euclide 1^{er} géomètre non euclidien?

Première tentative d'axiomatisation des mathématiques.

Pas de texte original, les éditions diffèrent.

Paul Tannery : cinquième postulat énoncé par Euclide?

La géométrie d'Euclide

Processus de construction de la géométrie d'Euclide

Expérience	-	Acquisition
Intuition	-	Induction
Théorie	-	Déduction

Théorie: système déductif.

A partir des axiomes toutes les propriétés sont obtenues par déduction logique.

Les *Eléments* d'Euclide



1632

Définitions : 37
Demandes : 4
Notions communes : 19

Les *Eléments* d'Euclide

LES ÉLÉMENTS
DE
GÉOMÉTRIE
D'EUCLIDE,

1804

traduits littéralement, et suivis d'un Traité du Cercle,
du Cylindre, du Cône et de la Sphère; de la mesure
des Surfaces et des Solides; avec des Notes;

Par F. PEYRARD, Bibliothécaire
de l'École Polytechnique.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'INSTITUT NATIONAL.

Et nova sunt semper. — OVID....



A PARIS,

CHEZ F. LOUIS, LIBRAIRE, RUE DE SAVOIE, N° 12.

AN XII — 1804.

Définitions :	35
Demandes :	3
Notions communes :	12

Les *Eléments* d'Euclide

EUCLIDIS

E L E M E N T A.

EDIDIT ET LATINE INTERPRETATUS EST

I. L. HEIBERG,
DR. PHIL.

UOL. I.

LIBROS I—IV CONTINENS.



LIPSIAE

IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

MDCCLXXXIII.

1883

Définitions :	23
Demandes :	5
Notions communes :	5

1. Un *point* est ce dont il n'y a aucune partie
2. Une *ligne* est une longueur sans largeur
3. Les *limites d'une ligne* sont des points
4. Une *ligne droite* est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.
5. Une *surface* est ce qui a seulement longueur et largeur.
6. Les *limites d'une surface* sont des lignes.
7. Une *surface plane* est celle qui est placée de manière égale par rapport aux droites qui sont sur elle.
8. Un *angle plan* est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite.
9. Et quand les lignes contenant l'angle sont droites, l'angle est appelé *rectiligne*.
10. Et quand une droite, ayant été élevée sur une droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles égaux est *droit*, et la droite qui a été élevée est appelée *perpendiculaire* à celle sur laquelle elle a été élevée.
11. Un angle *obtus* est celui qui est plus grand qu'un droit.
12. Un angle *aigu* est celui qui est plus petit qu'un droit.
13. Une *frontière* est ce qui est limite de quelque chose.
14. Une *figure* est ce qui est contenu par quelque ou quelques frontière(s).
15. Un *cercle* est une figure plane contenue par une ligne, celle appelée *circonférence*, par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont jusqu'à la circonférence du cercle égales entre elles.

!?

16. Et le point est appelé *centre* du cercle.

17. Et un *diamètre* du cercle est n'importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales.

18. Un *demi-cercle* est la figure contenue par le diamètre et la circonférence découpée par lui ; le centre du demi-cercle est le même que celui du cercle.

19. Les *figures rectilignes* sont les figures contenues par des droites ; *trilatères* : celles qui sont contenues par trois droites, *quadrilatères* par quatre ; *multilatères* par plus de quatre.

20. Parmi les figures trilatères est un *triangle équilatéral* celle qui a les trois côtés égaux ; *isocèle* celle qui a deux côtés égaux seulement ; *scalène* celle qui a les trois côtés inégaux.

21. De plus, parmi les figures trilatères est un triangle *rectangle* celle qui a un angle droit ; *obtusangle* celle qui a un angle obtus ; *acutangle* celle qui a les trois angles aigus.

22. Parmi les figures quadrilatères est un *carré* celle qui est à la fois équilatérale et rectangle ; est *oblongue* celle qui est rectangle mais non équilatérale ; un *losange* celle qui est équilatérale mais non rectangle ; un *rhomboïde* celle qui a les côtés et les angles opposés égaux les uns aux autres, mais qui n'est ni équilatérale ni rectangle ; et que l'on appelle *trapèzes* les quadrilatères autres que ceux-là.

23. Des droites *parallèles* sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre.

DEMANDES

5 demandes

1. Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.
2. Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.
3. Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.
4. Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.
5. Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

NOTIONS COMMUNES

9 notions communes

1. Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.
2. Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les tous sont égaux.
3. Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.
4. Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les tous sont inégaux.
5. Et les doubles du même sont égaux entre eux.
6. Et les moitiés du même sont égales entre elles.
7. Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.
8. Et le tout est plus grand que la partie.
9. Et deux droites ne contiennent pas une aire.

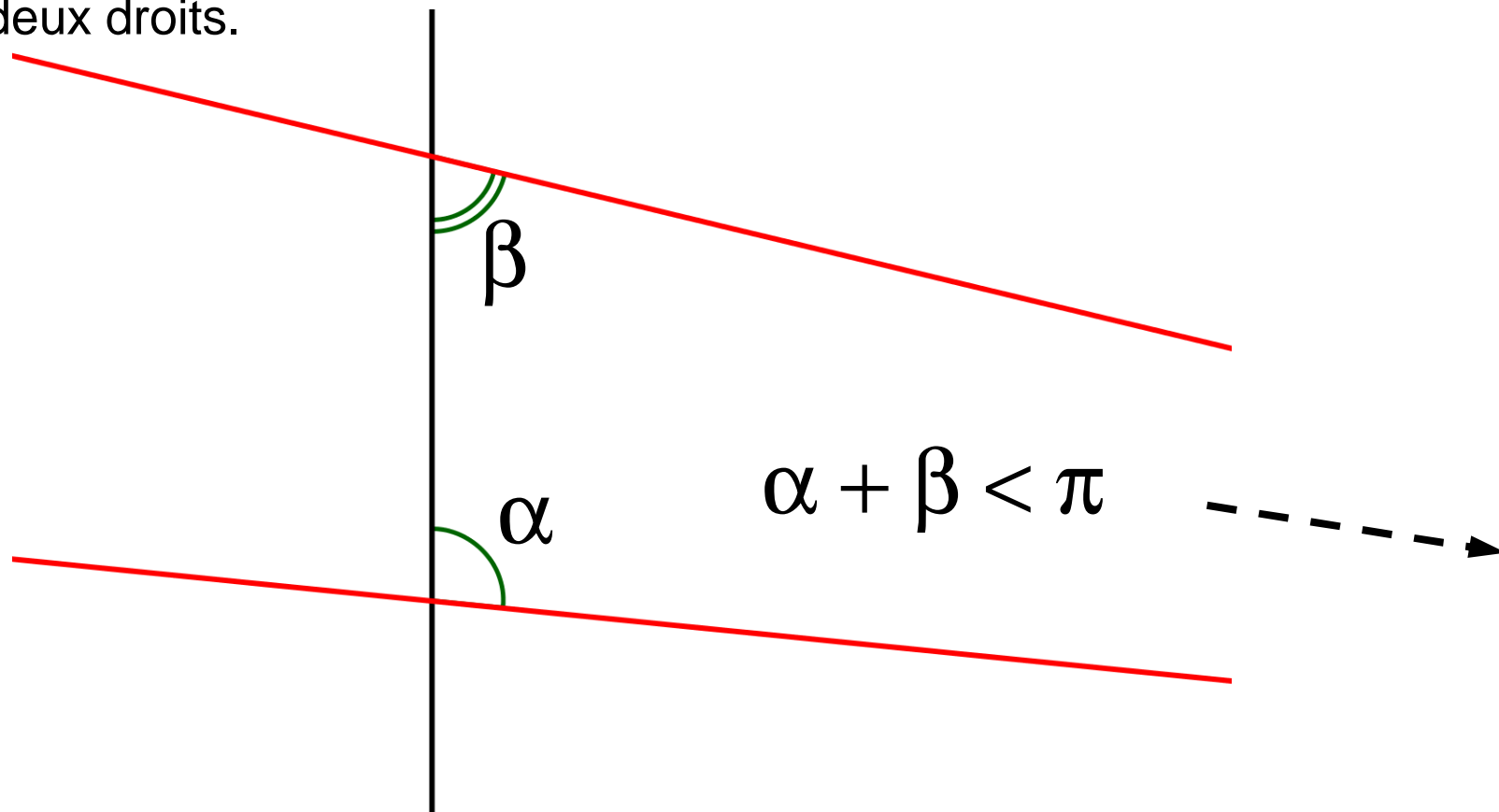
Les postulats :

1. Qu'il soit demandé de mener de tout point à tout point une ligne droite.
2. Qu'il soit demandé de prolonger en ligne droite et en continuité une droite limitée.
3. Qu'il soit demandé de construire un cercle de tout centre et de tout rayon.
4. Qu'il soit demandé que tous les angles droits soient égaux entre eux.
5. **Qu'il soit demandé que si une droite rencontrant deux droites situées dans un même plan fait d'un même côté des angles intérieurs dont la somme soit moindre que deux droits, les deux droites prolongées indéfiniment se rencontrent du côté où la somme est inférieure à deux droits.**
(les 5 demandes de Vitrac) (notion commune n°11 de Peyrard)
6. **Qu'il soit demandé que deux droites ne contiennent pas d'espace.**
(notion commune n°9 de Vitrac et n°12 de Peyrard)

Le cinquième Postulat

Postulatum

Qu'il soit demandé que si une droite rencontrant deux droites situées dans un même plan fait d'un même côté des angles intérieurs dont la somme soit moindre que deux droits, les deux droites prolongées indéfiniment se rencontrent du côté où la somme est inférieure à deux droits.



Les commentateurs grecs

Posidonius (I^{er} siècle av. JC)

Droites parallèles = droites coplanaires équidistantes.

Posidonius => Euclide, réciproque?

Proposition XXXIV : deux parallèles sont équidistantes, en utilisant le postulat V.

En fait:

Deux droites parallèles sont équidistantes ⇔ Postulat V vrai

Géminus (I^{er} siècle av. JC) : notion de droites asymptotes

Idée reprise par Saccheri.

Proclus (410-483)

Il démontre un équivalent du Postulat : « Lorsqu'une droite coupe l'une des parallèles, elle coupe l'autre », mais admet implicitement que *la distance entre deux parallèles est bornée*, ce qui revient à supposer le Postulat!

Autres commentateurs

Deux points particulièrement discutés et interprétés :

Théorie des parallèles du livre I

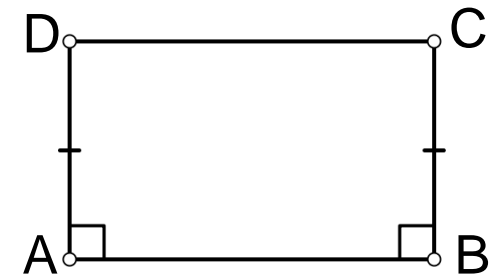
Théorie des proportions du livre V

Omar Khayyam

introduit le quadrilatère ABCD. Il s'agit de montrer que les angles égaux C et D sont droits.

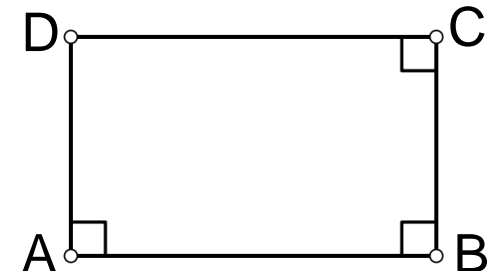
Raisonnement par l'absurde, mais cercle vicieux.

Idée reprise par Saccheri.



Ibn al Haytam Autre quadrilatère : angle D droit?

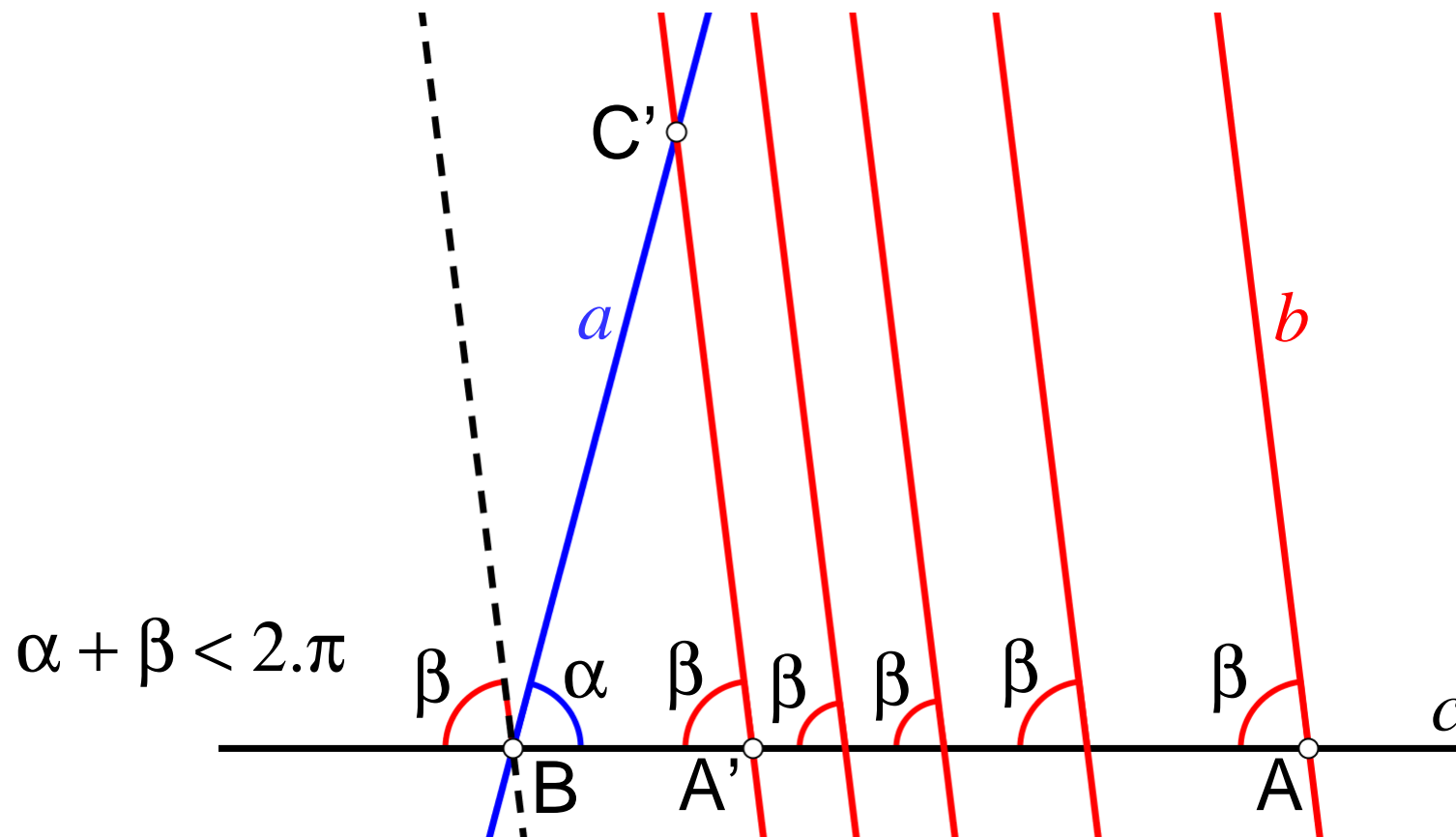
Idée reprise par Lambert.



Autres commentateurs John Wallis (1616 - 1703)

Il demande d'admettre que pour toute figure, il existe toujours une figure semblable de grandeur quelconque.

Idée reprise par Carnot, Laplace.



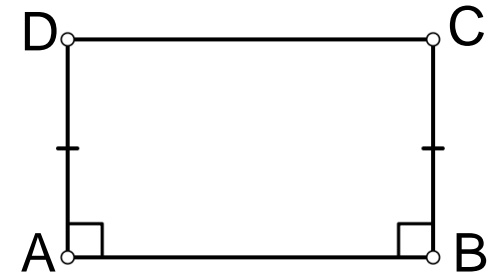
Les précurseurs

Girolamo Saccheri (1677-1733)

Il croit à la véracité du postulat et cherche à le démontrer.

Il reprend le quadrilatère d'Omar Khayyam, mais ne dit pas que les angles C et D sont droits.

Il envisage les trois hypothèses: angle droit, obtus ou aigu.



Il montre que si l'une de ces hypothèses est vraie pour un quadrilatère, elle est vraie pour tous les quadrilatères (triangles, angles inscrits).

A partir de la proposition XVI (*angle extérieur d'un triangle supérieur à un angle intérieur opposé*), Saccheri rejette l'hypothèse obtus (**géométrie sphérique**) qui implique le postulat, qui lui-même impose l'angle droit.

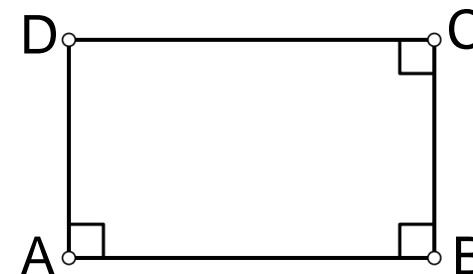
« L'hypothèse de l'angle aigu (**géométrie hyperbolique**) est absolument fausse car cela répugne à la nature de la ligne droite ».

Les précurseurs

Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

Theorie der Parallellinien (1786)

reprend le quadrilatère de Ibn al-Haytam.
Trois hypothèses sur la nature de l'angle D.



Angle obtus : ressemblance géométrie plane et sphérique.

Angle aigu : aire du triangle ABC proportionnelle au déficit $\pi - (A+B+C)$.

Ne conclut pas \Rightarrow D'Alembert dans l'*Encyclopédie* :

« La définition et les propriétés de la ligne droite, ainsi que des lignes parallèles sont l'écueil et pour ainsi dire le scandale des éléments de géométrie. »

« On parviendrait plus facilement à la trouver (la démonstration du Postulat) si on avait une bonne définition de la ligne droite; par malheur cette définition nous manque ».

Qu'est une Droite?

Eléments d'Euclide:

2. Une ligne est une longueur sans largeur.
4. Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.

Adrien Marie Legendre (1752 - 1833)

Eléments de géométrie (1823)

De nombreuses formulations équivalentes du postulat

« C'est sans doute à l'imperfection du langage vulgaire et à la difficulté de donner une bonne définition de la droite, qu'il faut attribuer le peu de succès qu'ont obtenu les géomètres, lorsqu'ils ont voulu déduire ce théorème des seules notions sur l'égalité des triangles que contient le premier livre des Eléments ».

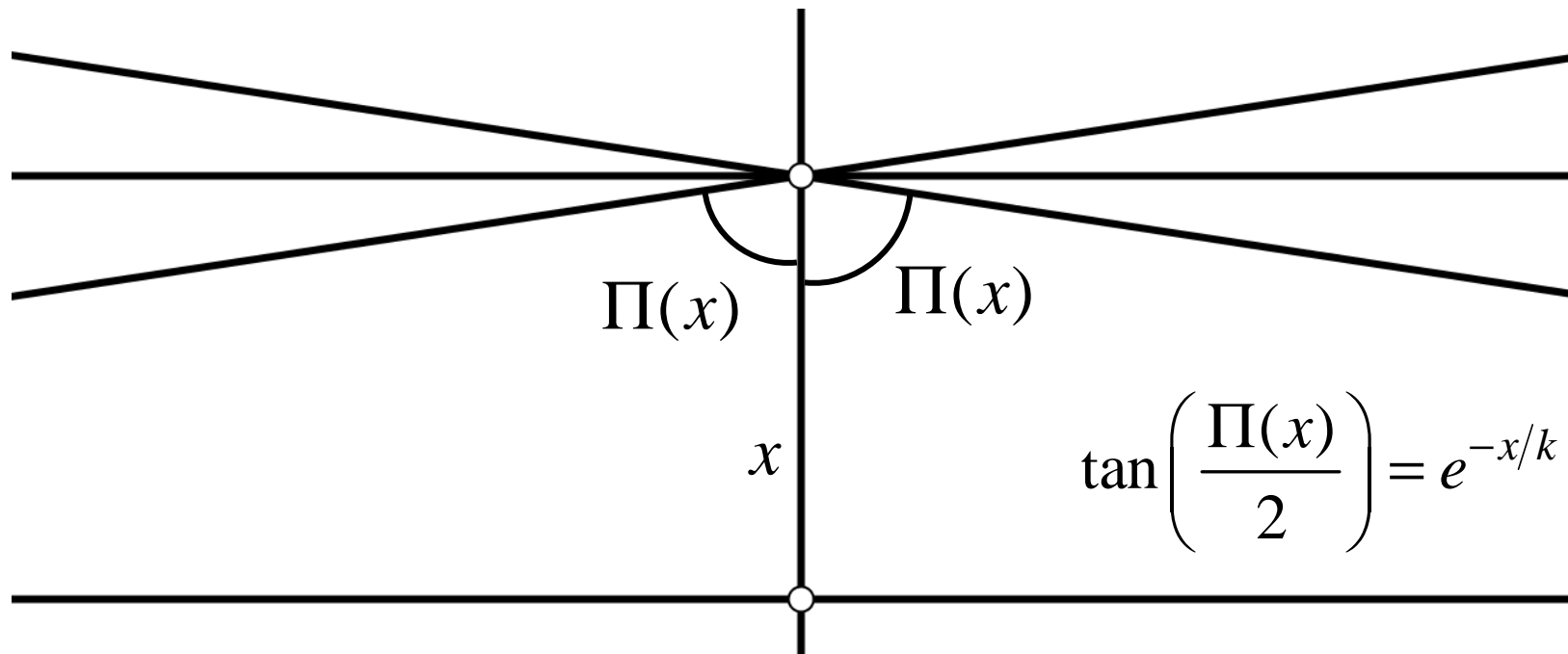
« La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre ».

A-t-on besoin du Postulatum?

Genèse de la géométrie non euclidienne:

Bolyai János (1802-1860)

Lobatchevski Nicolas (1793-1856)





« Le seul qui ait jamais su entrer dans mes idées métaphysiques relatives aux mathématiques »

C. F. Gauss



Marosvásárhely Kollégium

Farkas travailla activement sur les fondements de la géométrie et particulièrement sur l'axiome XI des parallèles (*postulat V*).

Il obtient de nombreuses formulations équivalentes:

« **Si cet axiome est vrai,**
alors trois points suffisent à définir un cercle ».

Découragé de ne pas aboutir, il mettra en garde son fils János de poursuivre ses recherches sur la théorie des parallèles :

« J'ai traversé cette nuit noire, et j'y ai enseveli toutes les joies de ma vie. Pour l'amour de Dieu, je t'en supplie, abandonne ce thème, crains-le autant que les passions, car il peut te dérober tout ton temps, ta santé, ta tranquillité, tout le bonheur de ta vie... ».

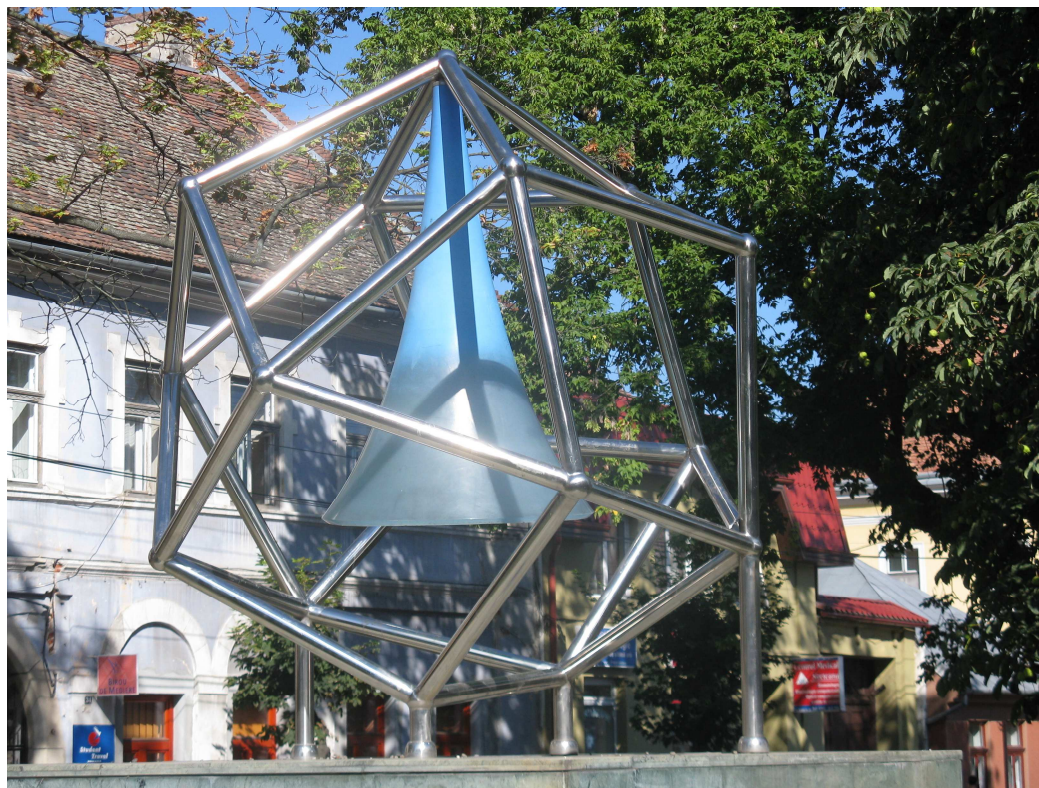
János Bolyai (1802-1860), meilleur sabreur de l'armée austro-hongroise et violoniste virtuose, prend le contre-pied de son père en cherchant les conséquences de la fausseté de l'axiome XI.

Le trois novembre 1823, il écrit à son père :

« J'ai découvert des choses si belles que j'en ai été ébloui. [...] En attendant je ne puis ici dire autre chose que ceci :

***de rien,
j'ai créé un nouveau monde.»***

$$\tan\left(\frac{\Pi(x)}{2}\right) = e^{-x/k}$$



Semmiböl egy ujj más világot teremtettem

Il développe une géométrie sans l'axiome des parallèles (1829):

- Par un point donné, on peut construire plusieurs parallèles
- Les seules figures semblables sont égales
- La somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits
- L'aire d'un triangle est bornée
- Par trois points non alignés, ne passe pas forcément un cercle

Son père le publie en 1831 en annexe de son monumental *Tentamen*.

Titre de l'*Appendix* :

« La science absolue de l'espace indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'Axiome XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir a priori) suivie de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fausseté de l'Axiome XI »

Résultat oublié :

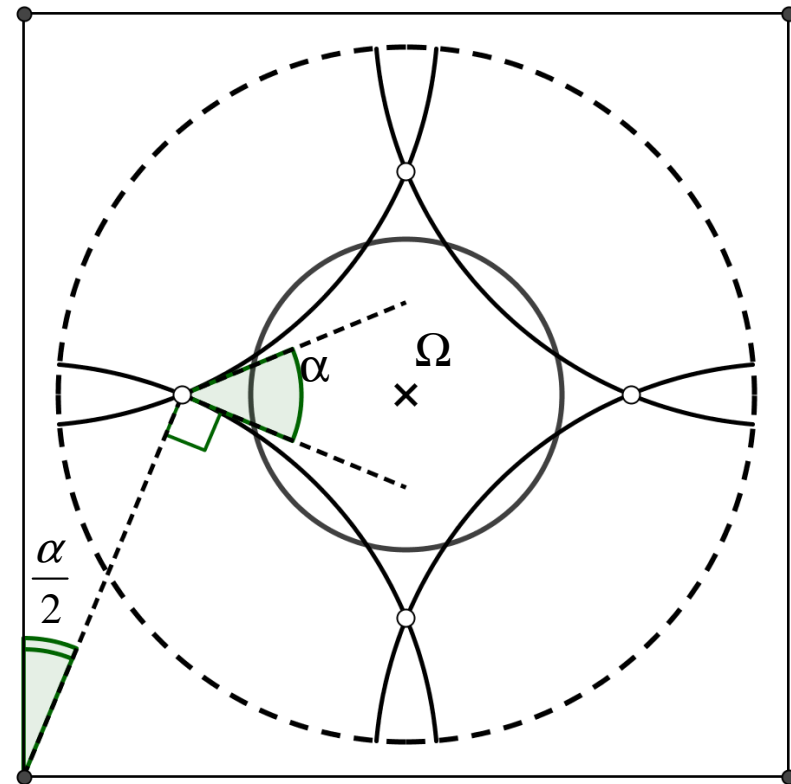
Si on construit une géométrie sans cet axiome, alors la quadrature du cercle est possible.

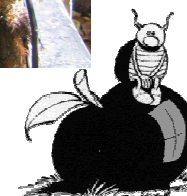
$$R = \ln(1 + \phi)$$

$$S = 2\pi - 4\alpha = 4\pi \frac{r^2}{1 - r^2}$$

$$S = \pi \quad \longrightarrow \quad \alpha = \pi/4$$

$$r = \sqrt{5}/5$$





Saut conceptuel

Variétés de dimensions n

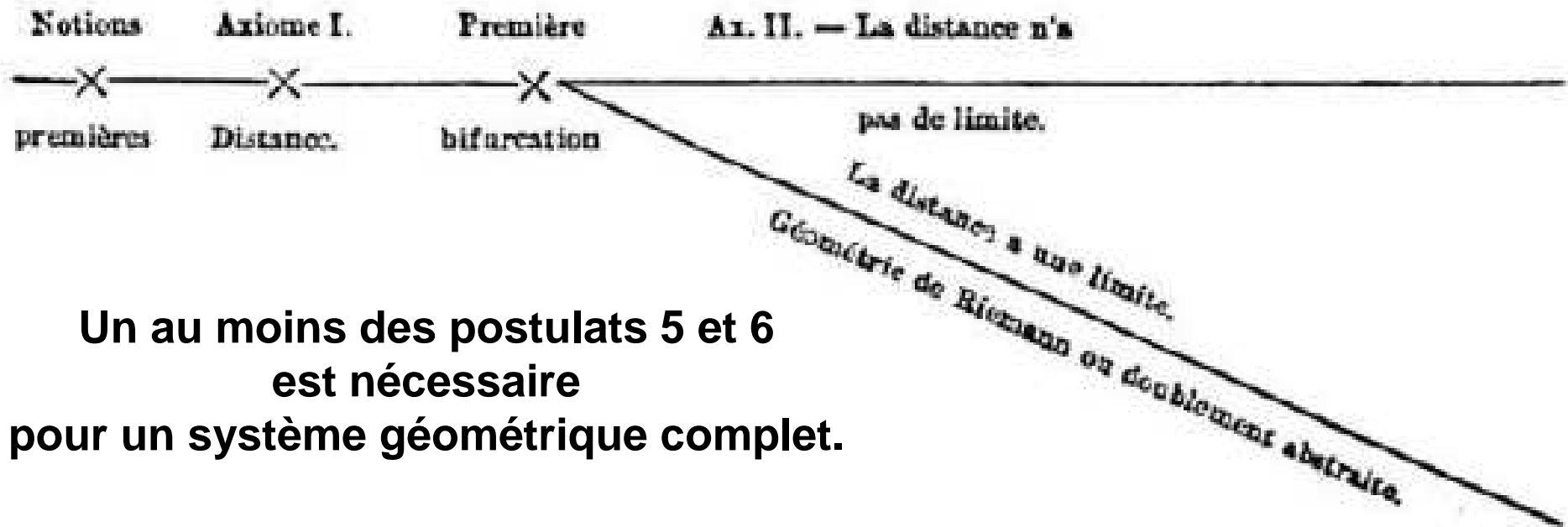
Calcul différentiel local

Notion de métrique

Modèle de géométrie elliptique avec la géométrie sphérique

Les Géométries

Bifurcation de De TILLY



Un au moins des postulats 5 et 6 est nécessaire pour un système géométrique complet.

Hypothèse de l'angle aigu ($k > 0$) = Postulat 6 = **Bolyai-Lobatchevski**

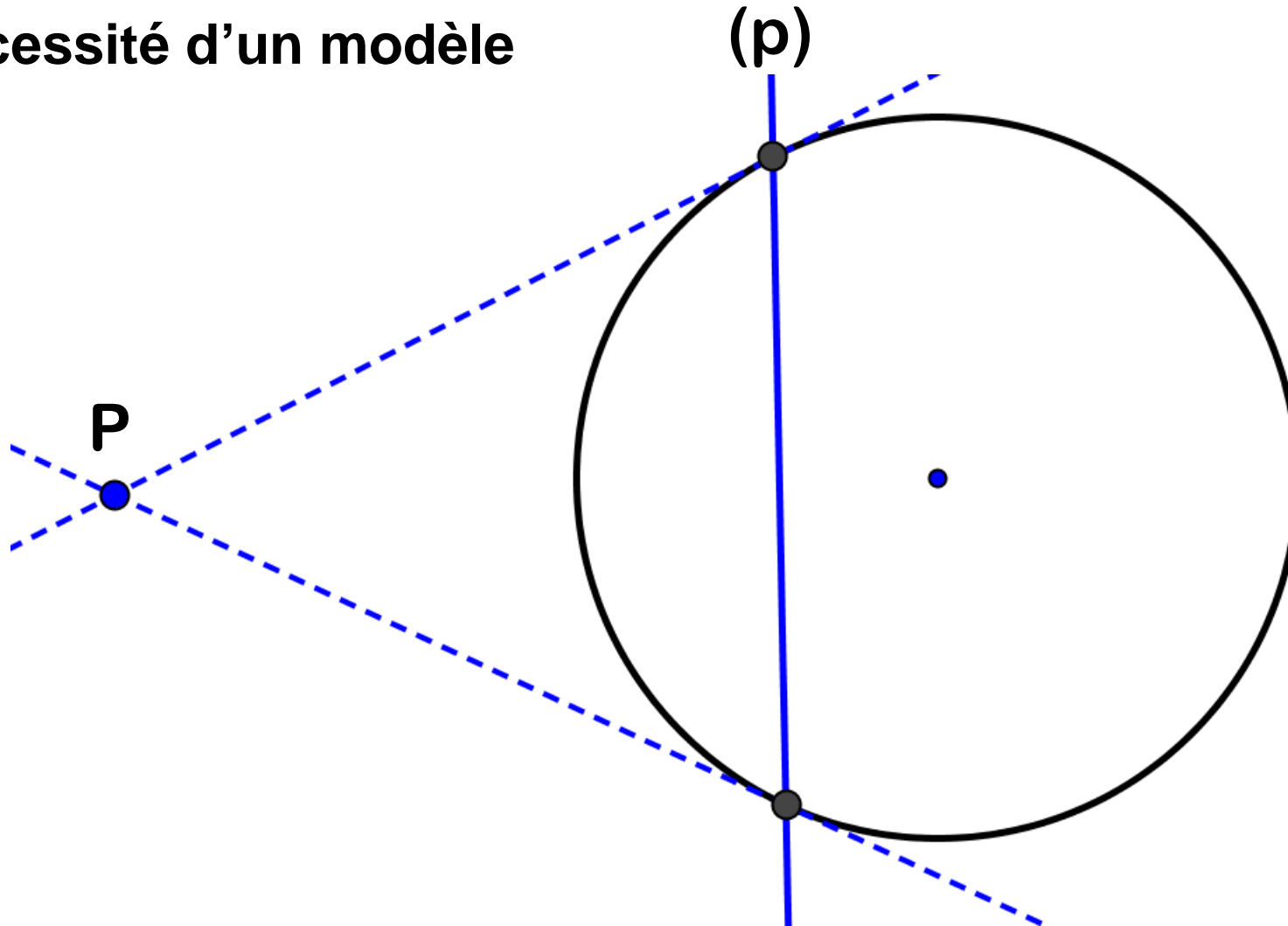
Hypothèse de l'angle droit ($k = \infty$) = Postulat 5 + Postulat 6 = **Euclide**

Hypothèse de l'angle obtus ($k < 0$) = Postulat 5 = **Riemann**

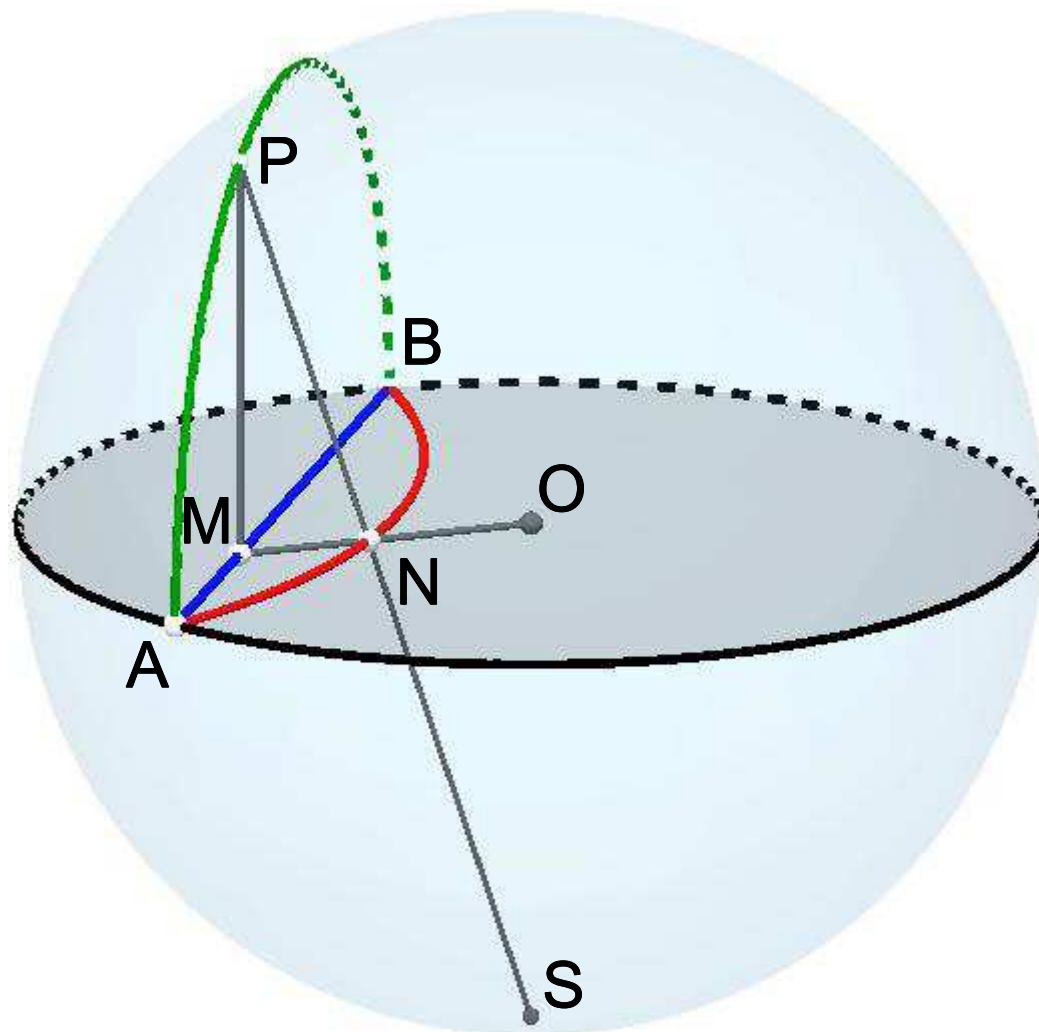
Courbure 1/k	Géométrie	Hypothèse	Exemple	nb. de //	K
<0	Bolyai- Lobatchevski	angle aigu	pseudo- sphère	∞	-1
0	Euclide	angle droit	plan	1	0
>0	Riemann	angle obtus	sphère	0	+1

Surface d'un triangle: $\alpha + \beta + \gamma = \pi + K \cdot S$

Nécessité d'un modèle

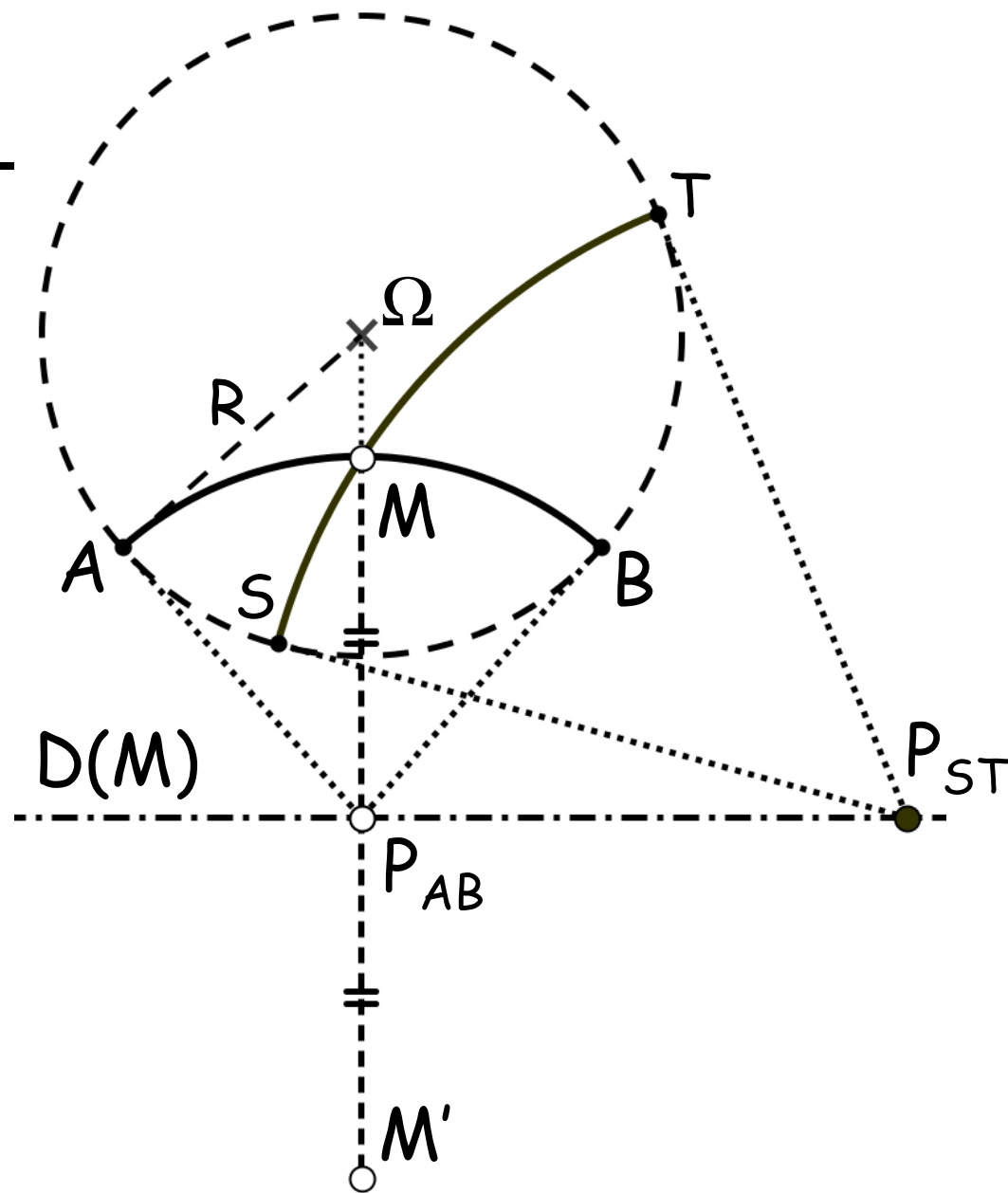


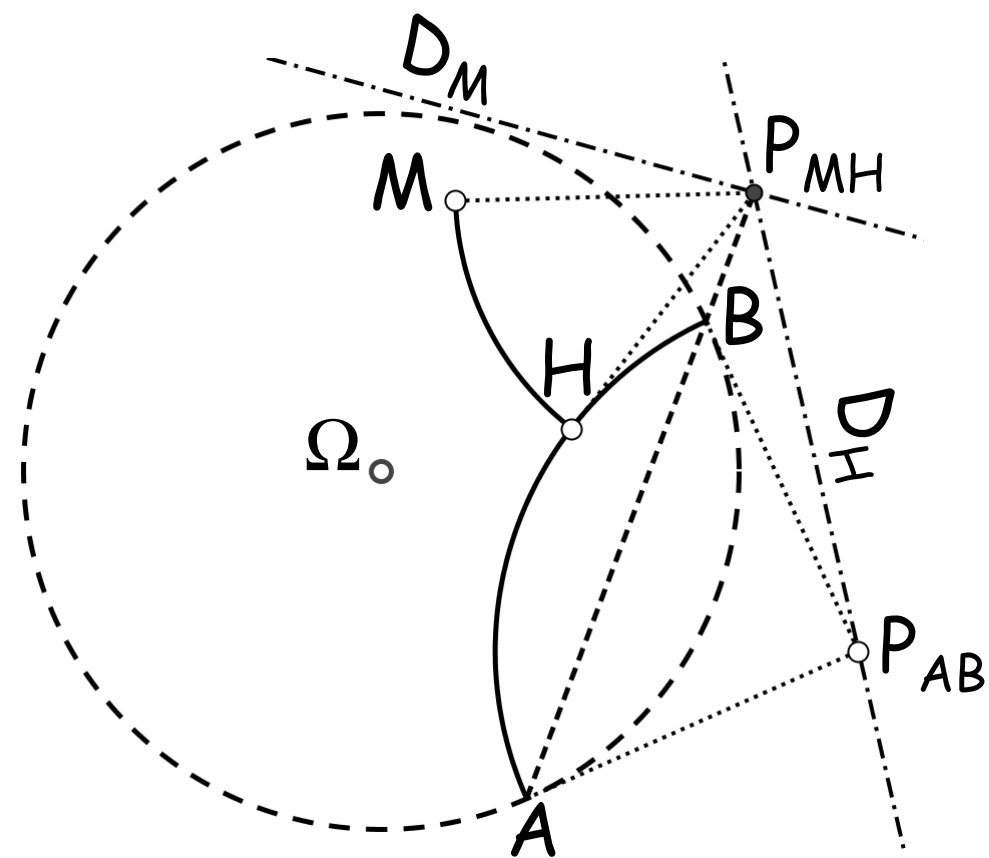
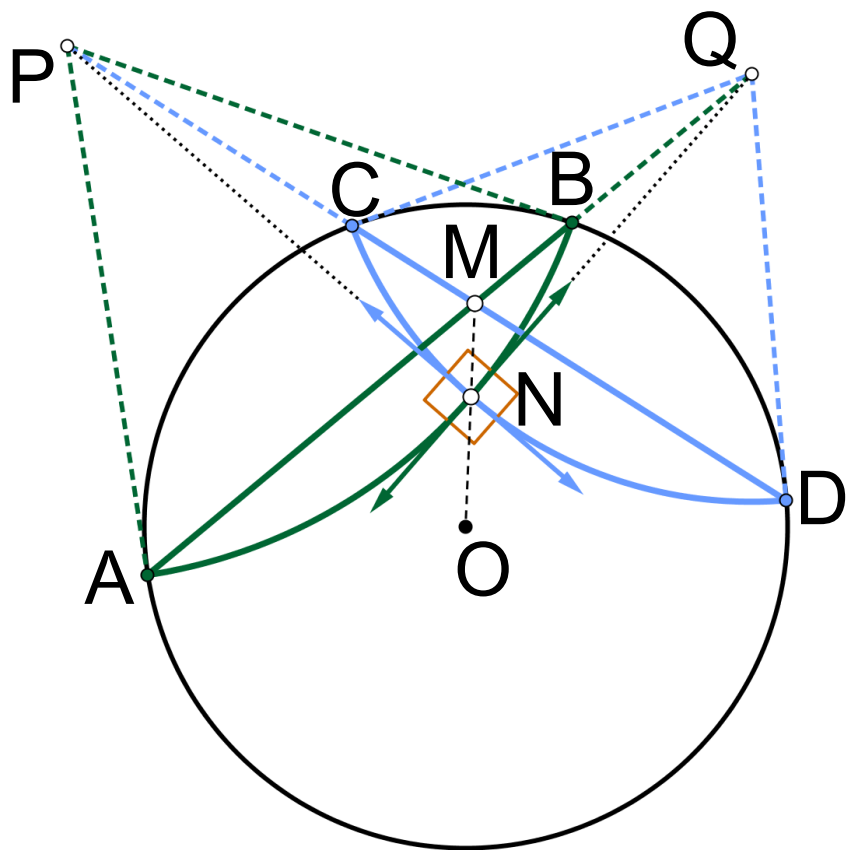
Modèles de Klein et Poincaré

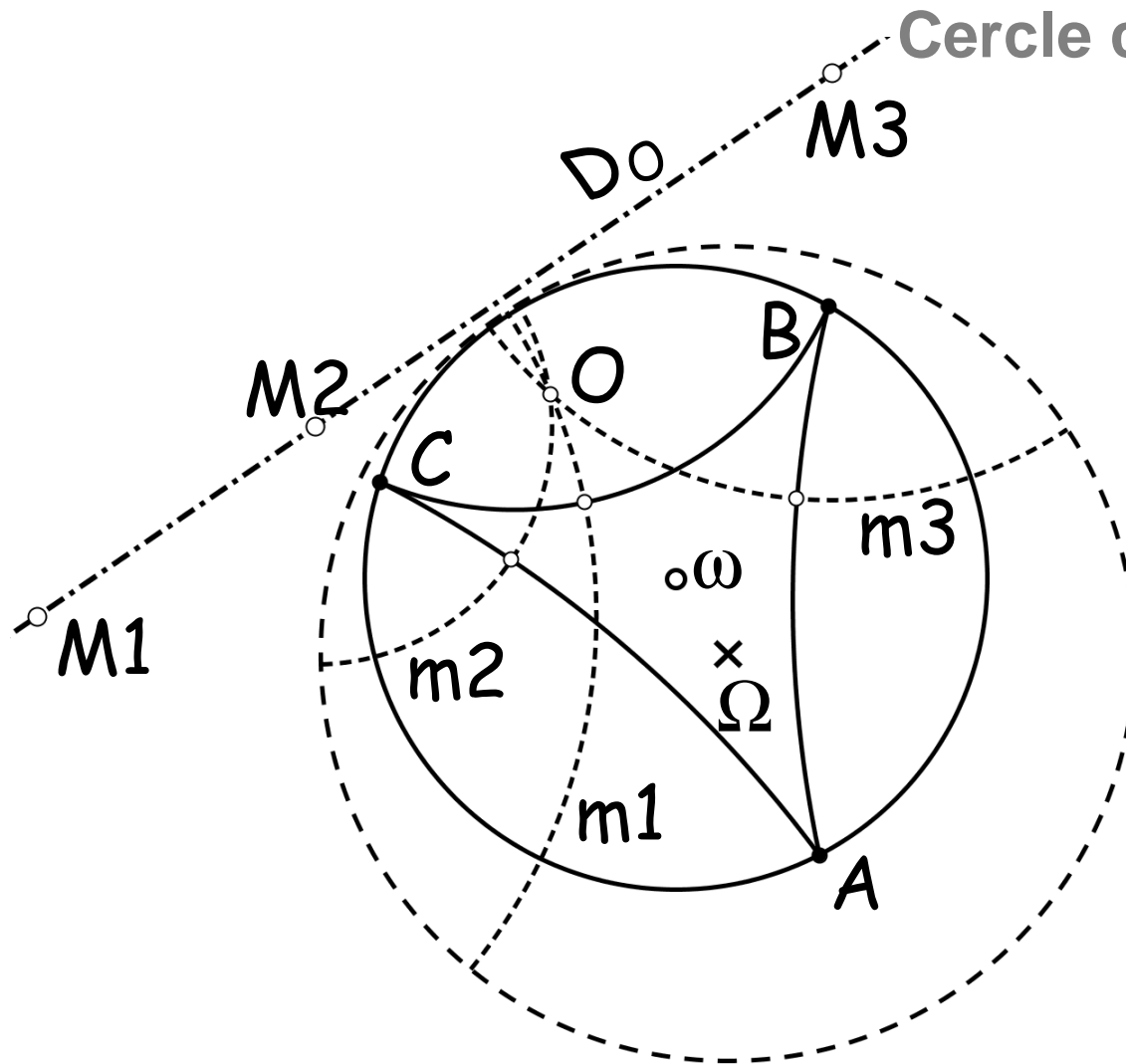


Disque de Poincaré

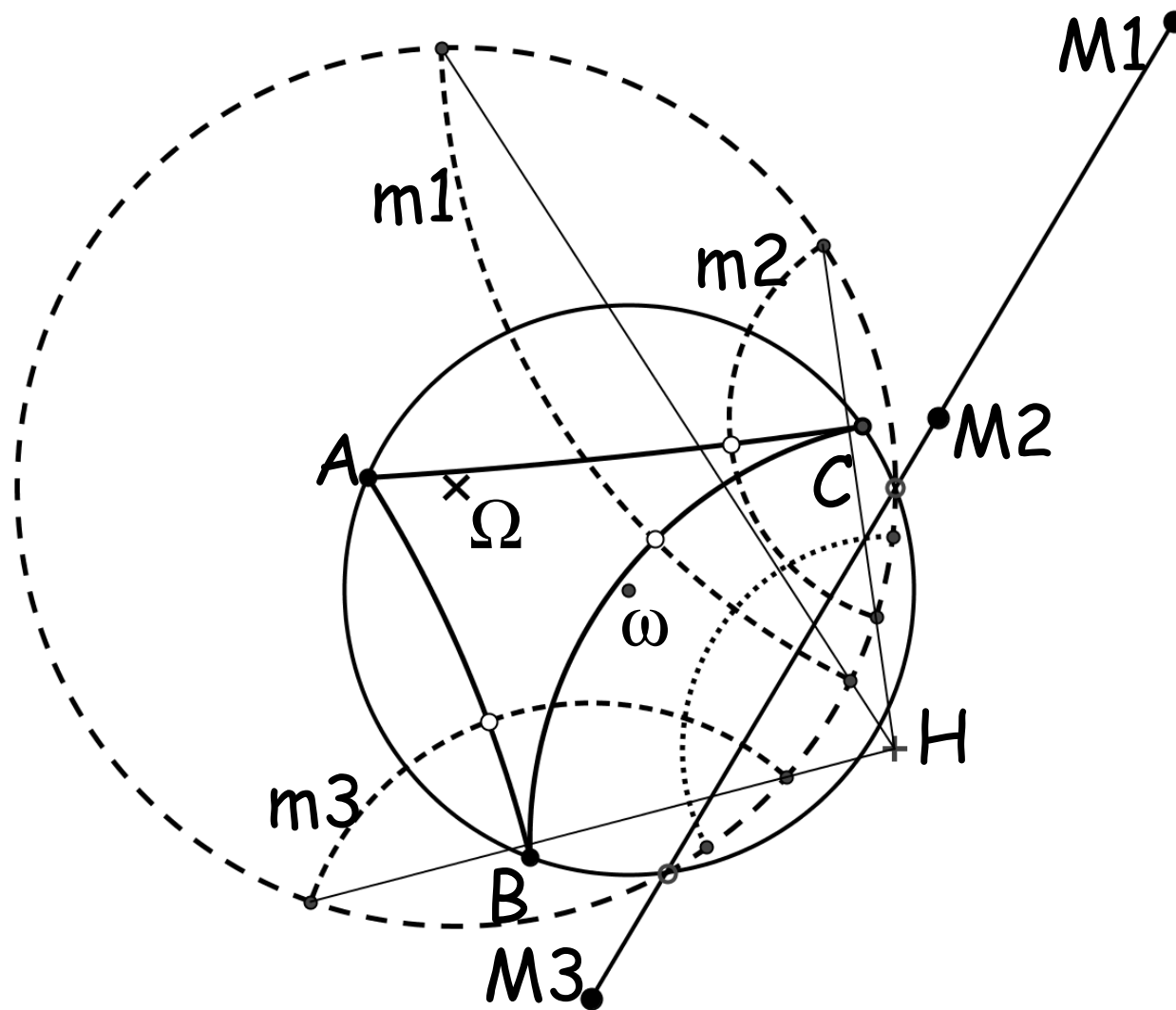
Inversion:
 $\Omega M \cdot \Omega M' = R^2$

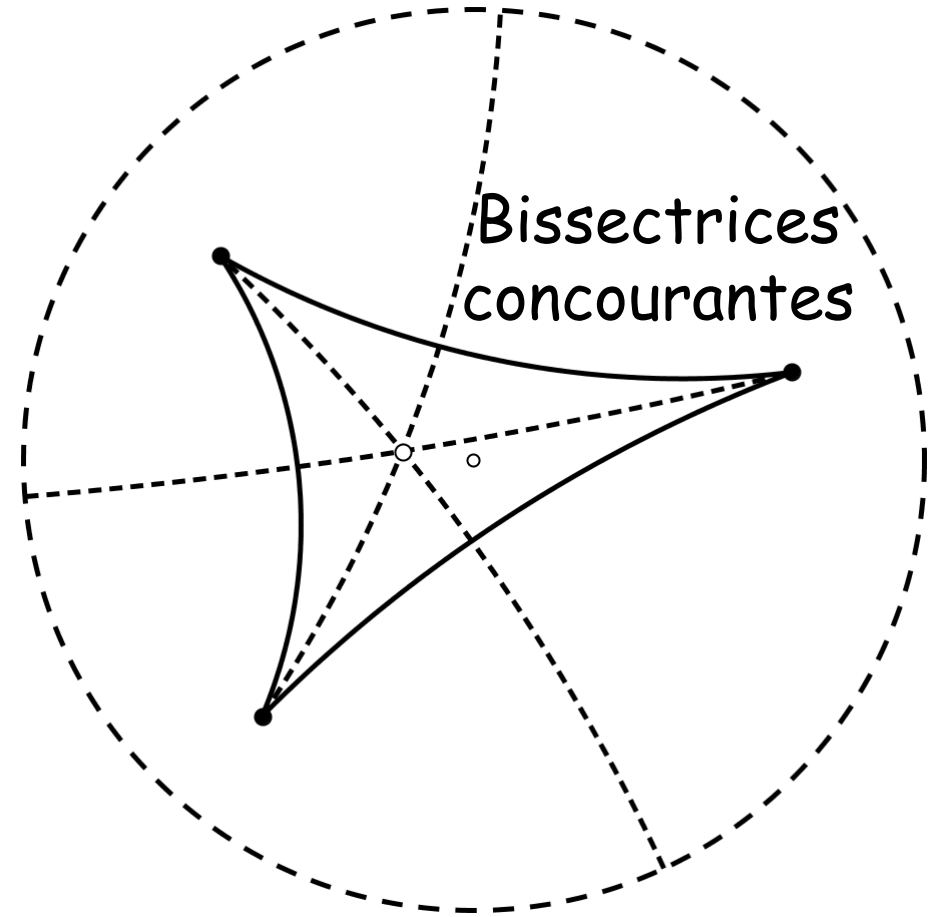
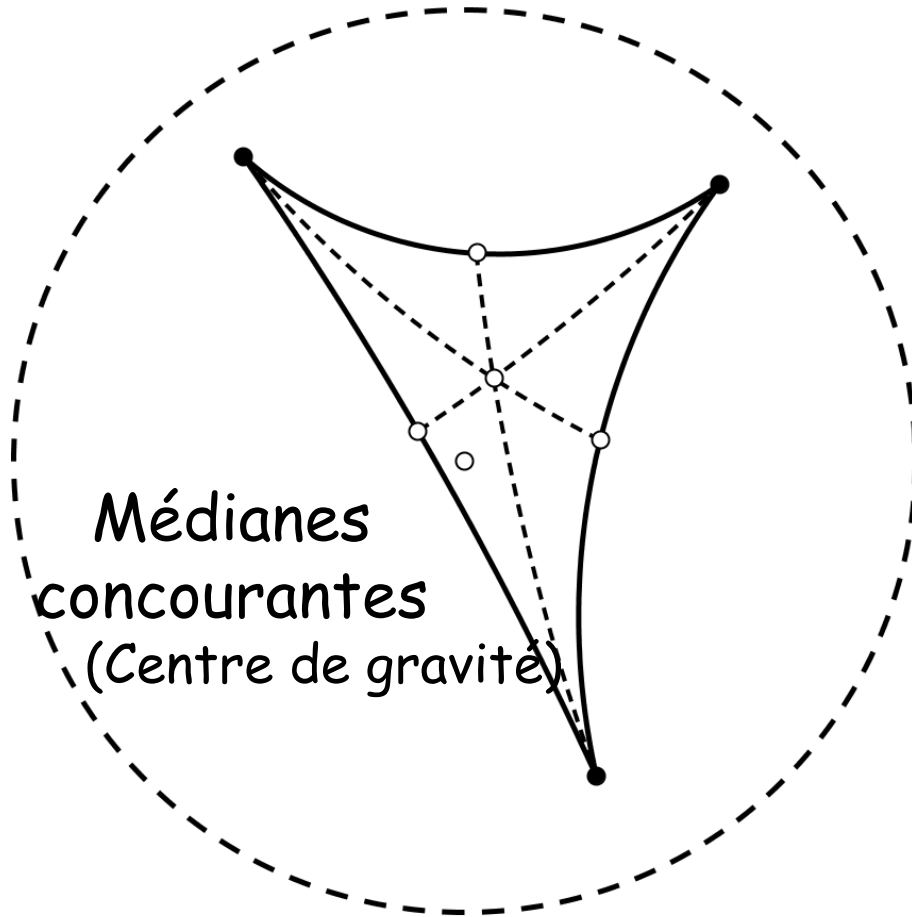


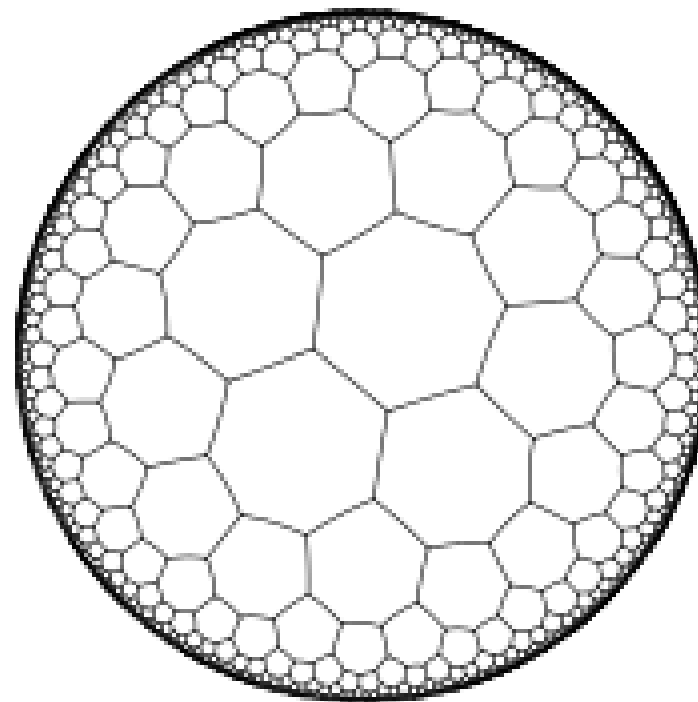
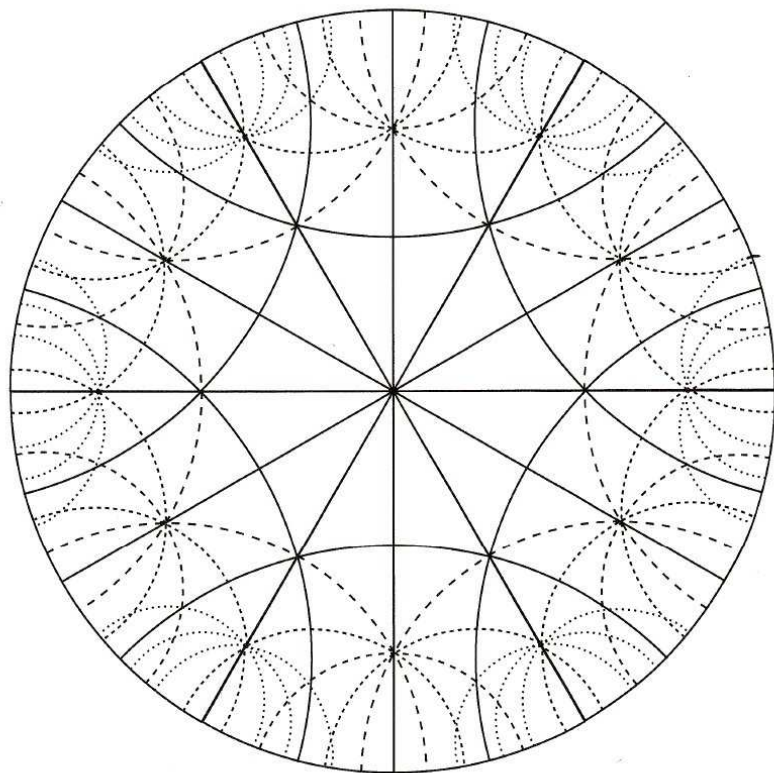




Disque de Poincaré Médiatrices non concourantes







Programme d'Erlangen

Apogée de la géométrie synthétique vers 1860, alors que la géométrie analytique se développe et acquiert rapidement une grande efficacité.

Vers 1850, les notions de **groupes** et d'**invariants** deviennent consistantes.

On constate que les **théorèmes de géométrie** classique ne sont rien d'autres que des **relations entre invariants du groupe des similitudes**.

En 1872, **Félix Klein** propose dans sa thèse le célèbre « **Programme d'Erlangen** » pour unifier les géométries.

Il considère une géométrie comme la donnée d'une « **multiplicité** » X , un ensemble d'éléments, et d'un **groupe G de transformations** de X .

La géométrie euclidienne est ainsi la donnée du plan affine euclidien et du groupe des isométries euclidiennes, alors que le plan projectif et les homographies définissent la géométrie projective.

Les propriétés relatives à chaque géométrie (propriétés affines, euclidiennes, projectives, ...) sont celles qui sont conservées dans l'action du groupe.

Programme d'Erlangen

Théorème de Pythagore = théorème euclidien (*longueurs, orthogonalité*).

Théorème de Thalès = théorème affine (*parallèles*).

On aboutit alors à une classification structurée des théorèmes selon le groupe auxquels ils sont rattachés, et cette « impitoyable clarté » (*Bourbaki dixit*) a enlevé pour beaucoup de l'intérêt à l'étude de la géométrie classique.

Déjà, dès 1837, Michel Chasles déclarait :

« Aujourd'hui, chacun peut se présenter, prendre une vérité quelconque connue, et la soumettre aux divers principes généraux de transformation ; il en retirera d'autres vérités, différentes ou plus générales (...). Peut donc qui voudra, dans l'état actuel de la science, généraliser et créer en géométrie ; le génie n'est plus indispensable pour ajouter une pierre à l'édifice. »

Programme d'Erlangen

Synthèse d'Erlangen : séduisante, mais non constructive.

Le groupe de transformations détermine le type de géométrie, mais ne donne pas de méthodes pour obtenir les théorèmes de cette géométrie.

Problème résolu par la **théorie des invariants** de **David Hilbert**.

Théorie des invariants et le programme d'Erlangen Contemporains et inséparables.

*(le programme d'Erlangen sans la théorie des invariants,
c'est comme un vélo sans pédales. Daniel Perrin)*

Objectif d'une géométrie : développer la théorie des invariants relatifs à son groupe de transformations (Klein).

Géométrie euclidienne: les invariants les plus intuitifs sont les notions de longueur, d'angle et donc d'orthogonalité.

Géométrie projective: le birapport de quatre points en est l'invariant fondamental.

Géométrie projective

Mathématiques = recherche d'invariants

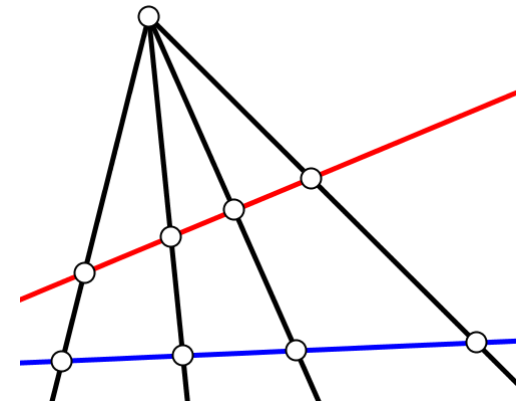
Propriétés qui se conservent par projection?

Géométrie projective

Deux principes fondamentaux:

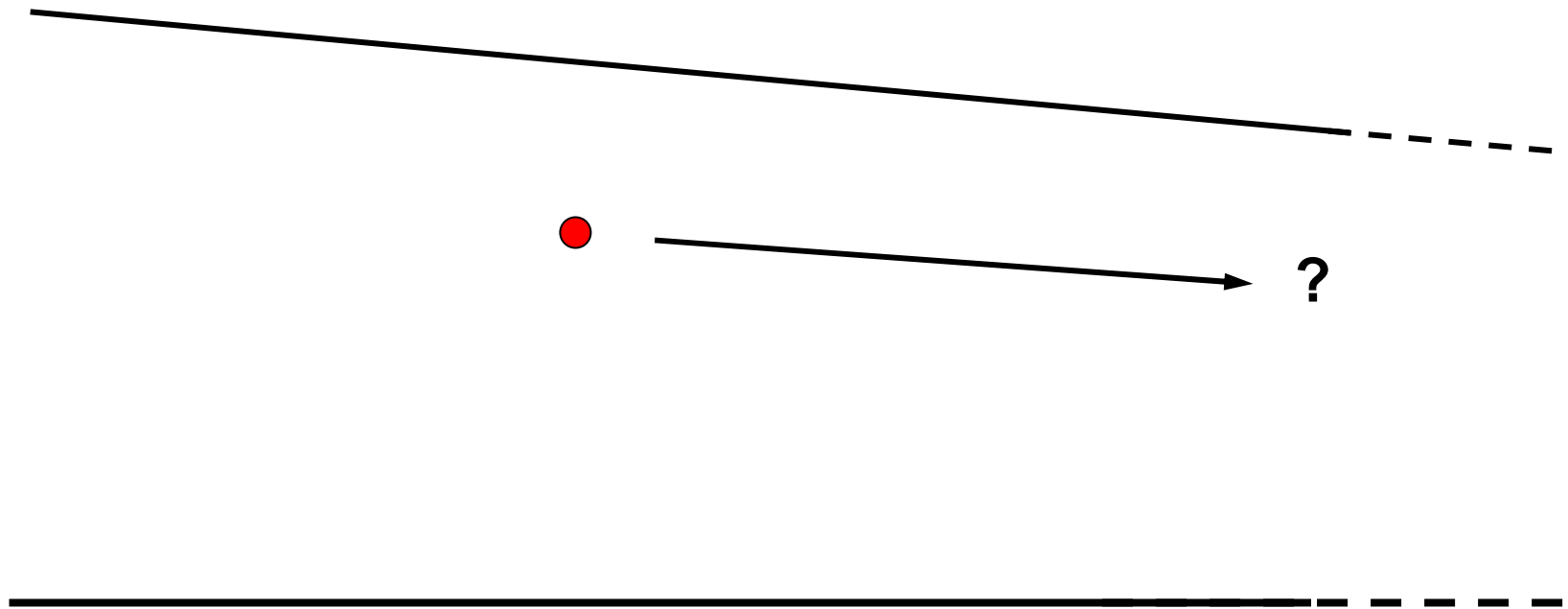
- Principe de continuité
- Dualité

*Mais non conservation
de toutes les propriétés métriques*

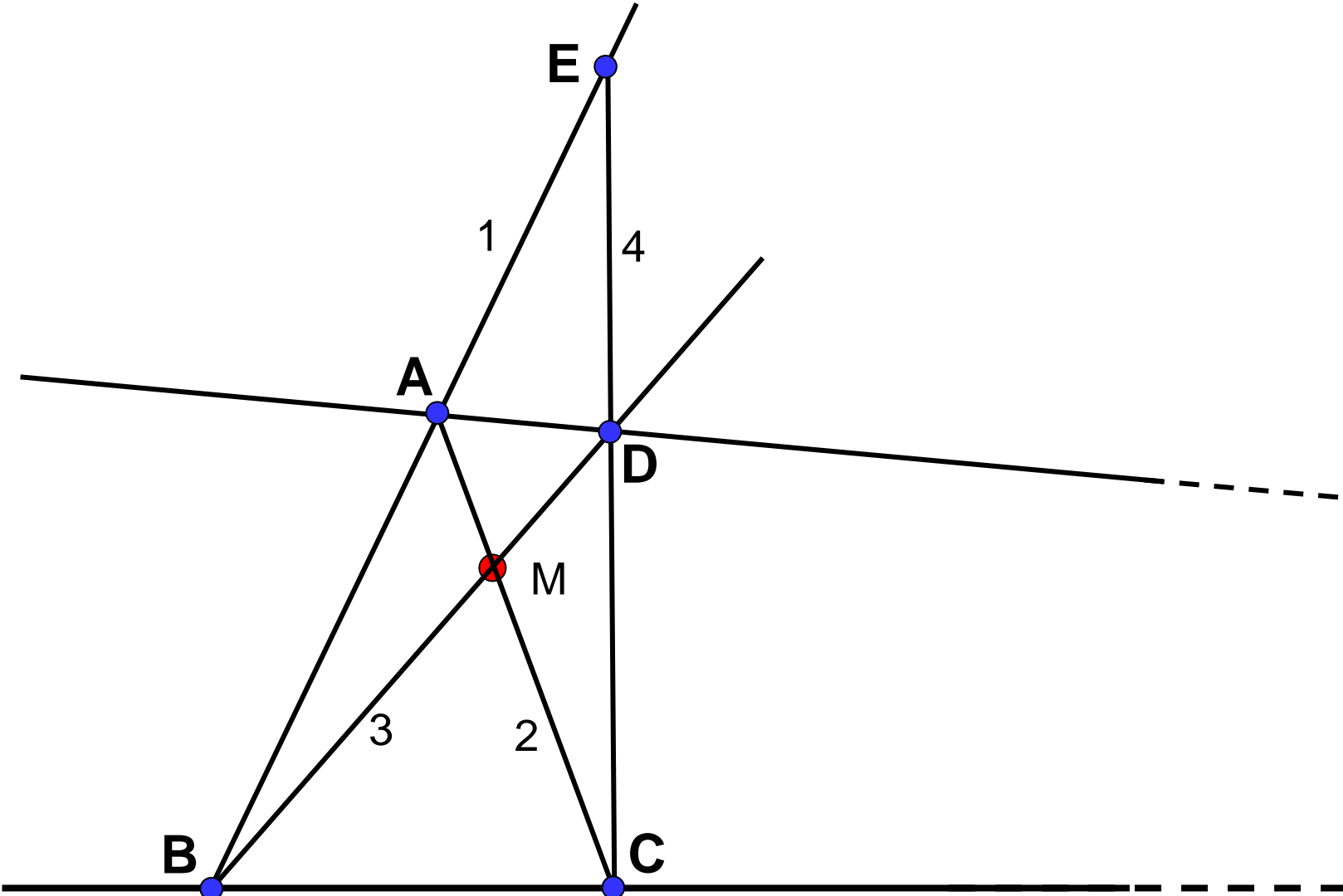


Représentation de l'espace, et non une description

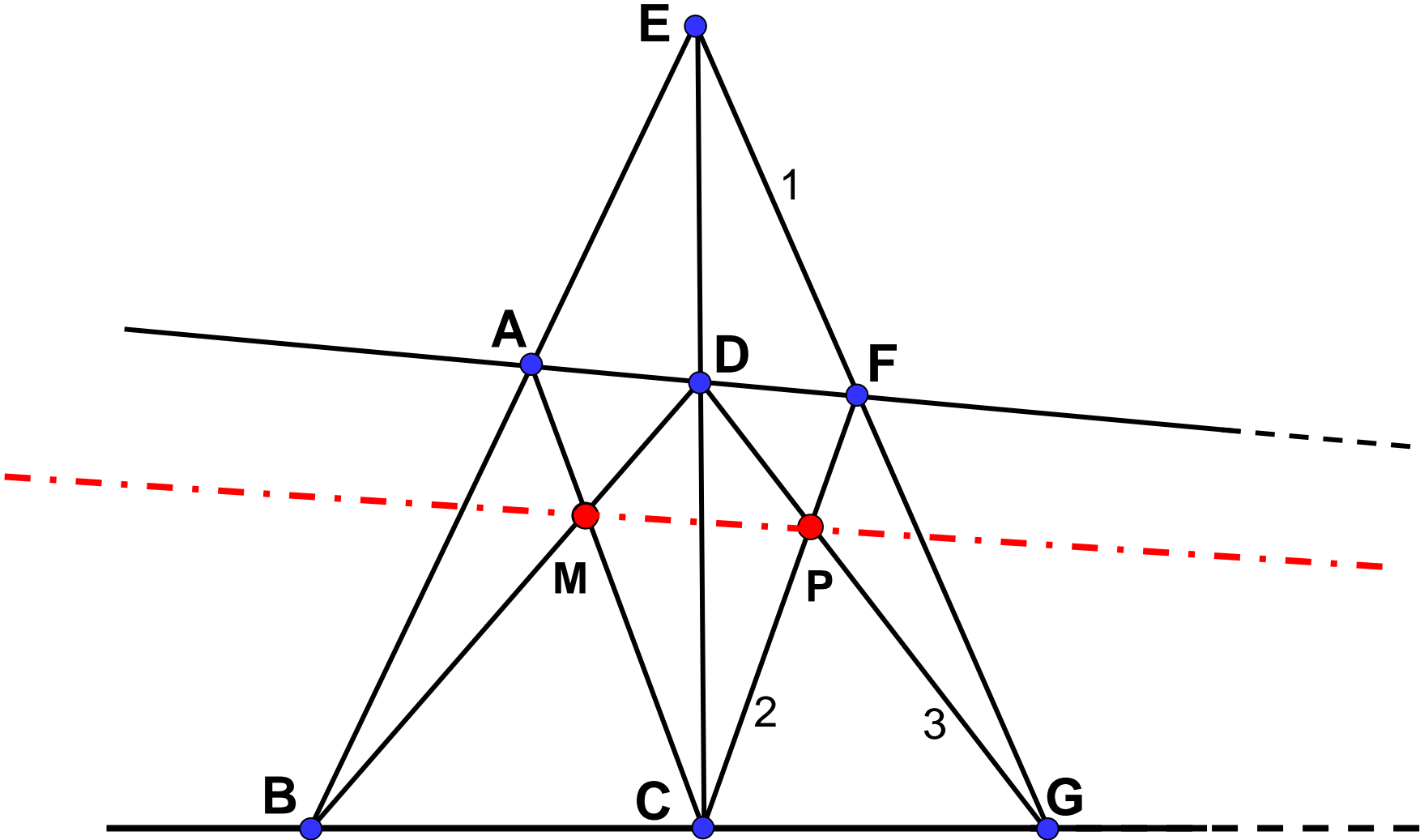
Géométrie projective



Géométrie projective



Géométrie projective



Programme d'Erlangen

Fin XIX^{ème}, succès total de la **théorie des invariants**. Elle permet, *en principe*, d'établir tous les invariants algébriques et leurs relations de façon automatique.

Invariant = correspondance algébrique d'un théorème de géométrie.

Inventaire exhaustif des invariants => fin de la théorie des invariants

=> fin de l'étude de la géométrie élémentaire!

« Mais la situation devient bien plus nette avec les progrès de la théorie des invariants (...); victoire qui, du même coup, marque la mort, comme champ de recherches, de la théorie classique des invariants elle-même et de la géométrie “élémentaire”, qui en est devenue pratiquement un simple dictionnaire. Sans doute, rien ne permet de prévoir a priori, parmi l'infinité de théorèmes que l'on peut ainsi dérouler à volonté, quels seront ceux dont l'énoncé, dans un langage géométrique approprié, aura une simplicité et une élégance comparables aux résultats classiques, et il reste là un domaine restreint où continuent à s'exercer avec bonheur de nombreux amateurs. Mais pour le mathématicien professionnel, la mine est tarie ... ».

Programme d'Erlangen

**La géométrie élémentaire est une science morte,
à bannir des programmes!**

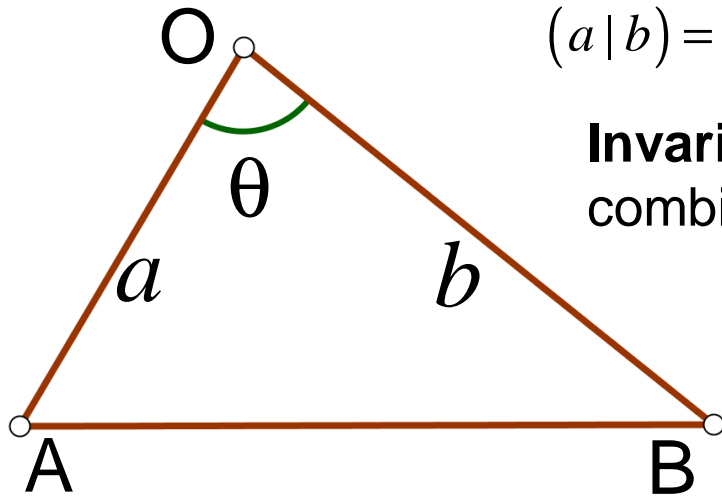
La réforme des maths modernes s'en chargera.

Pourtant, quelques exemples d'utilisation et d'utilité des invariants :

$$(a | b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad (a | a) = a^2 \quad (b | b) = b^2 \quad a \wedge b = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$(a | b) = 0 \Rightarrow a \perp b$$

$$a \wedge b = 0 \Rightarrow a // b$$



Invariants:

combinaisons polynomiales des produits scalaires

$$(a | a) = a^2 \quad (b | b) = b^2 \quad (a | b) = ab \cos(\theta)$$

Théorème de Pythagore

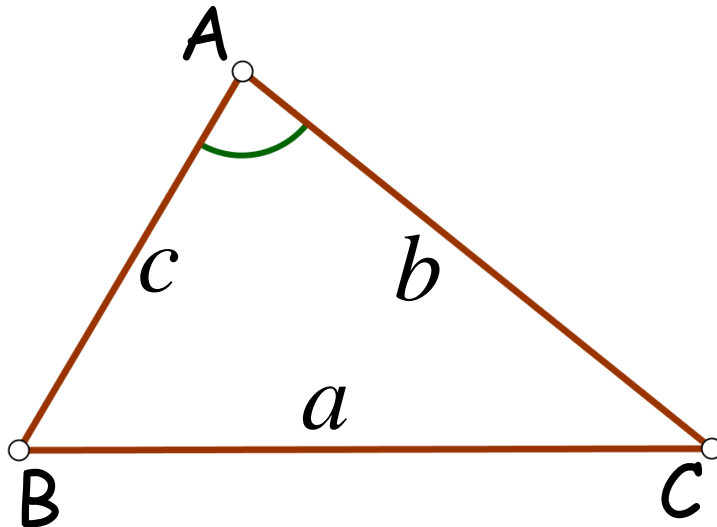
$$(a | b)^2 + (a \wedge b)^2 = (a | a)(b | b)$$

Programme d'Erlangen

Tautologie : $(a|b-c) + (b|c-a) + (c|a-b) = 0$

$$a = \overrightarrow{OA} \quad b - c = \overrightarrow{CB}$$

$$(a|b-c) = (\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{CB}) = 0 \Leftrightarrow O \text{ appartient à la hauteur issue de } A$$



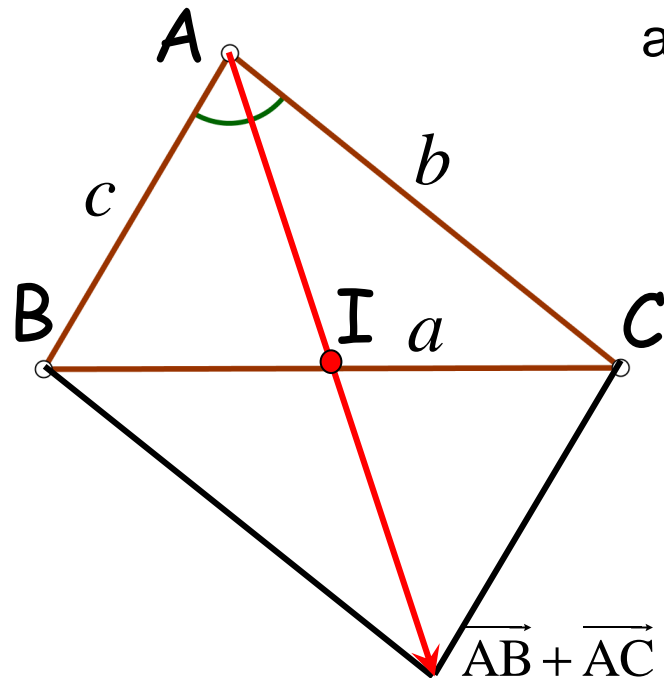
O, point d'intersection de deux hauteurs,
annule deux termes,
donc le troisième :

les hauteurs sont concourantes.

Programme d'Erlangen

Tautologie : $(a \wedge b + b \wedge a = 0) \implies a \wedge (b+c) + b \wedge (c+a) + c \wedge (a+b) = 0$

Une origine O telle que : $a \wedge (b+c) = a \wedge (b+c-2a) = \overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 0$



appartient à la médiane issue de A.

Si O est point d'intersection de deux médianes,
il annule deux termes,
donc le troisième :

les médianes sont concourantes.

Programme d'Erlangen

Mais ne pas négliger les **Transformations = Outils de simplification.**

Problème affine : alignements, concours ou parallélismes de droites, des milieux, des barycentres ou des aires (*tout sauf les notions euclidiennes de longueur, angle et orthogonalité*).

Chercher à effectuer une transformation affine qui simplifie le problème, tout en conservant les données affines initiales.

On transforme par exemple le problème initial en un cas particulier qui présente une caractéristique euclidienne supplémentaire. Ceci est possible grâce à la **transitivité** du groupe des transformations affines, propriété fondamentale qui signifie que deux figures peuvent être mises en correspondance par une transformation.

Il reste à résoudre le problème euclidien simplifié et revenir à notre problème initial par la transformation affine inverse, qui existe puisque l'ensemble de ces transformations affines est un groupe.

Exemple : intersections des médianes.

***Une géométrie ne peut être plus vraie qu'une autre,
elle peut simplement être plus commode.***

Poincaré