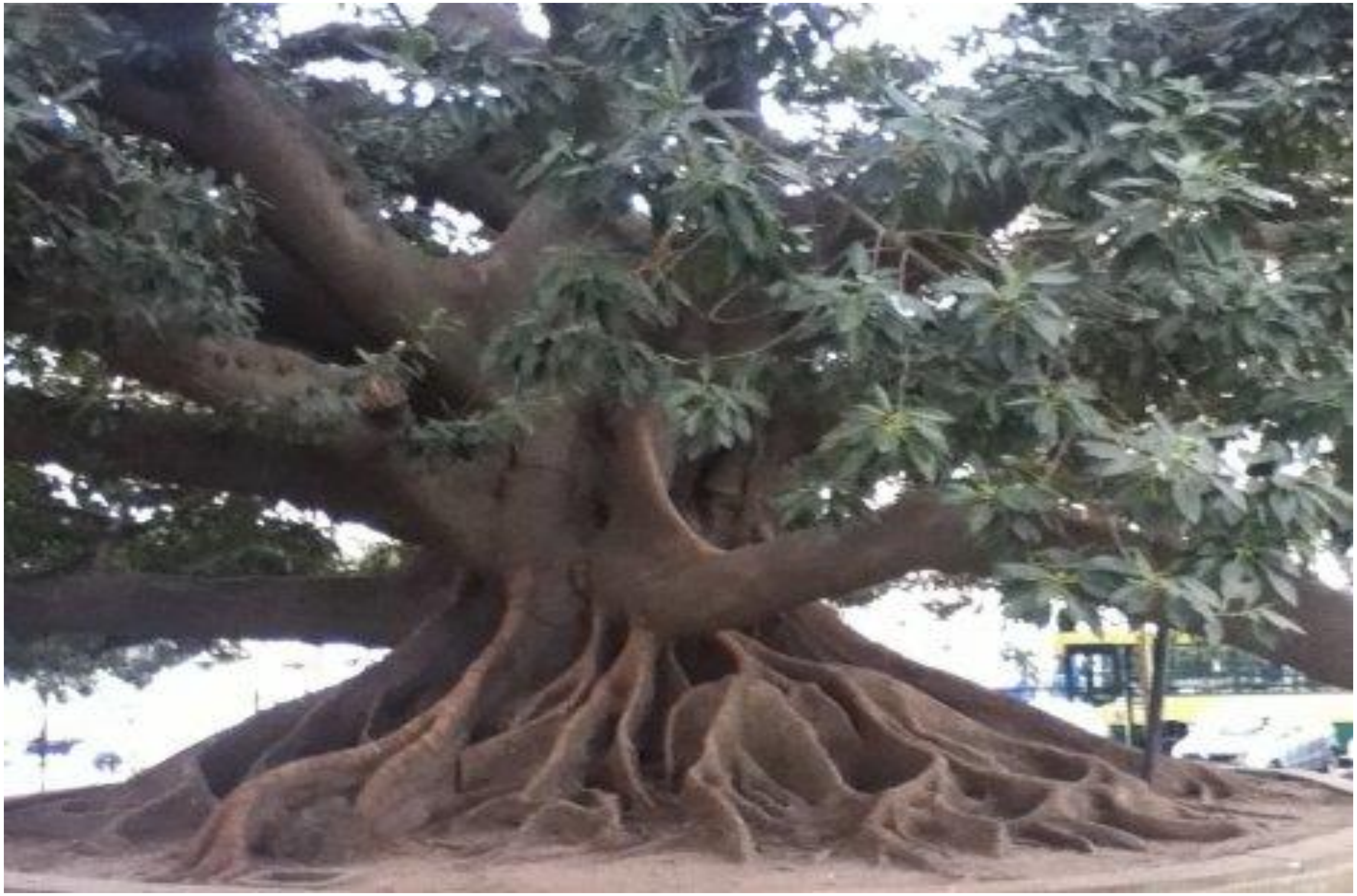
TOUS les ARBRES sont-ils GRACIEUX ?

(bientôt 1/2 siècle de conjecture)

K
A
F
E
M
A
T
H

29-09-2016

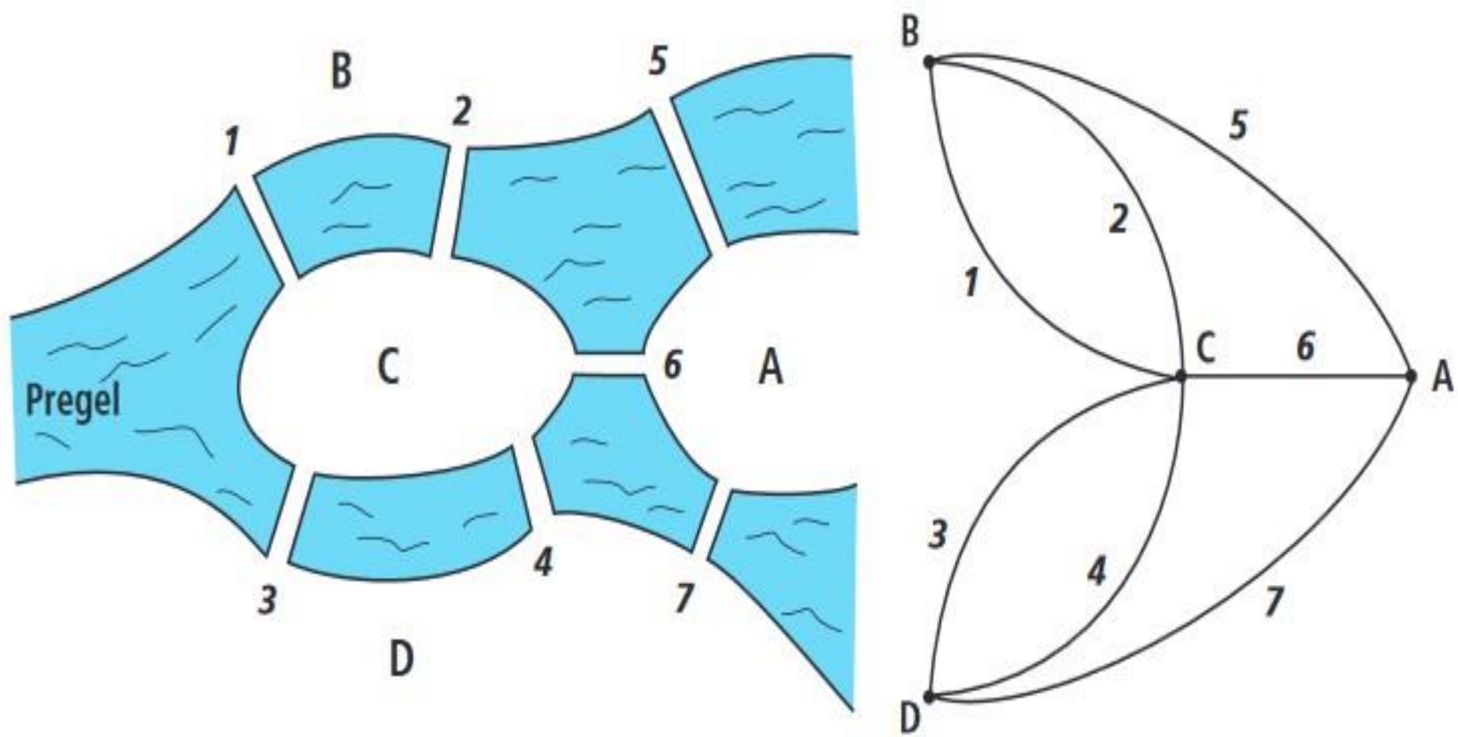


Shalom Eliahou – Le Sudoku arboricole

SOMMAIRE

1 – Des ARBRES PARMI les GRAPHES

- La **Théorie des GRAPHES** a vu le jour à l'époque d'EULER : c'est le fameux <u>problème des ponts de Königsberg</u> :



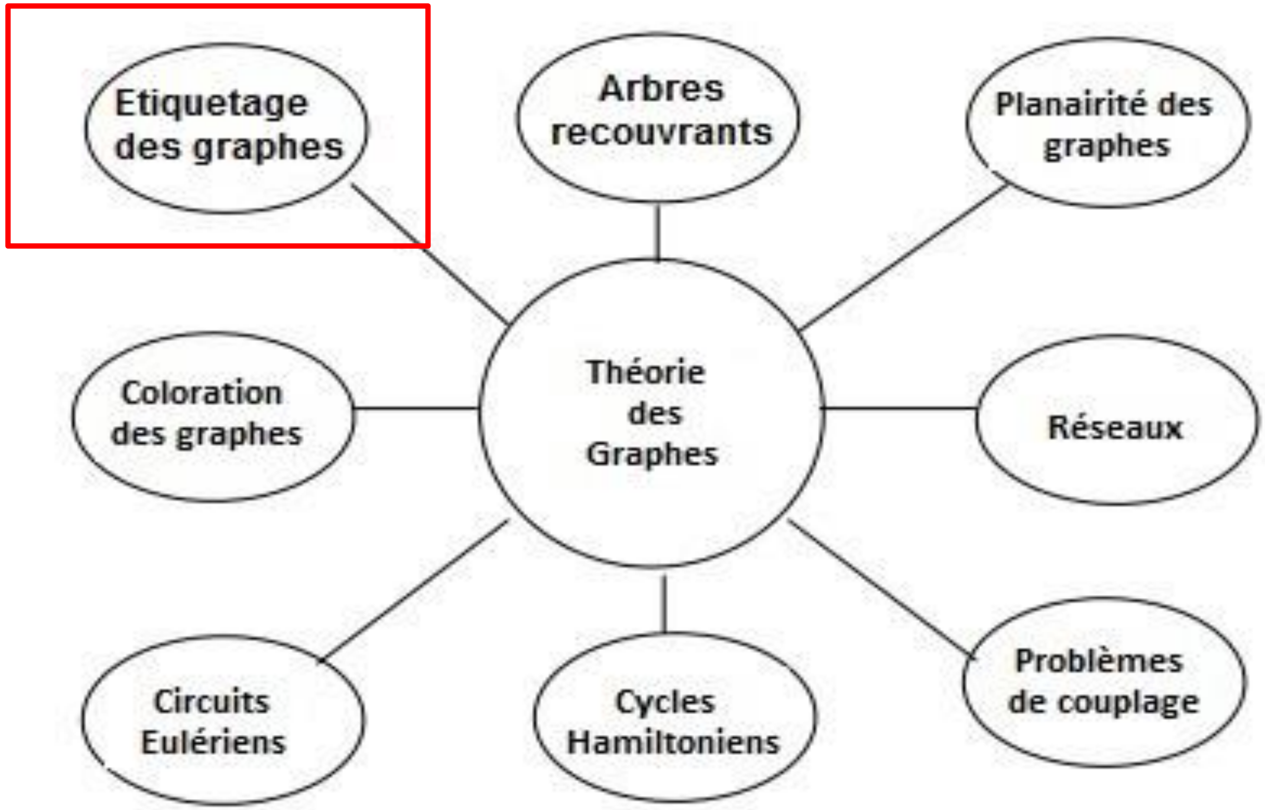
- Revoir : KΦM, Les ponts de Königsberg (06 décembre 2007)

- En France, la théorie des graphes connut un nouvel essor grâce à **Claude Berge** (5 juin 1926-30 juin 2002), mathématicien et artiste.

Claude Berge et Paul Erdős, 1995

• Depuis les années 1950, et surtout avec l'arrivée des ordinateurs, la théorie des graphes est devenue un vaste domaine de recherches mathématiques, pures ou appliquées.
Elle compte de nombreux **problèmes difficiles**, non résolus aujourd'hui.

• Quelques thèmes de recherche de la théorie des graphes.



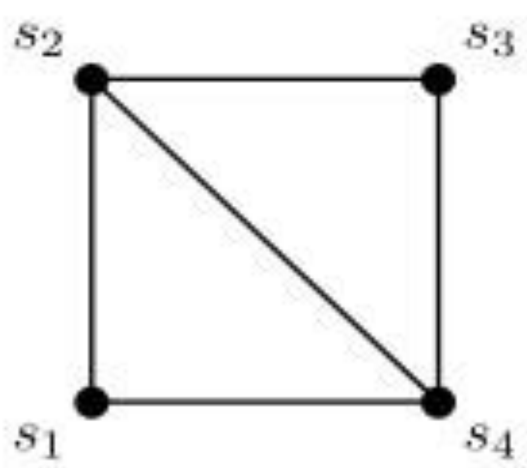
• Parmi les conjectures qui aujourd'hui « résistent » encore, figure la **conjecture des arbres gracieux**.

1-1) Pour commencer : qu'est-ce qu'un Graphe ?

- Un **graphe** est un couple **(S,A)**, où **S** est un ensemble de **sommets** et **A** un ensemble de segments, appelé **arêtes** ou **arcs**, reliant tout ou partie des sommets.
  Deux sommets d'un graphe sont dits **adjacents** s'ils sont reliés par une arête.

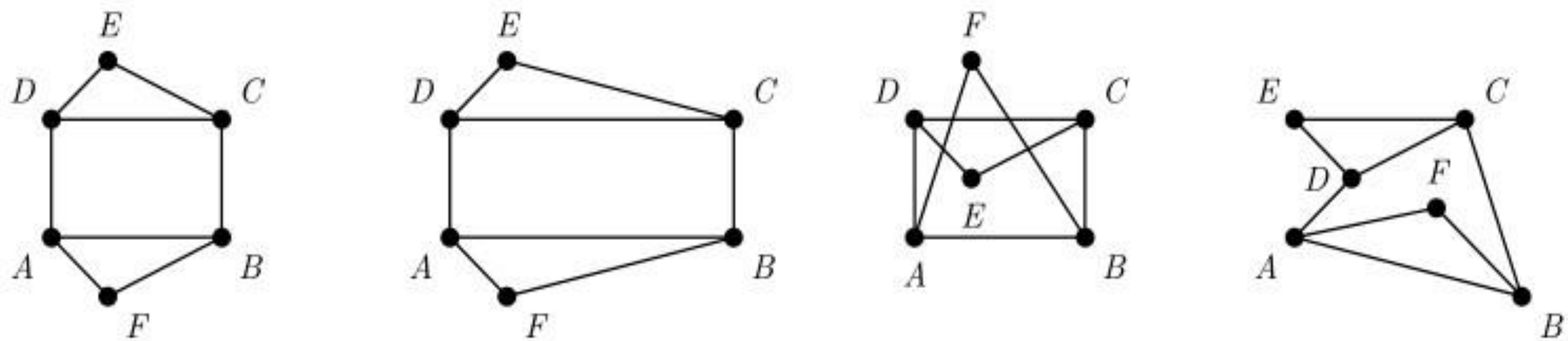
1-2) Représentation d'un Graphe

- Un graphe se représente de diverses façons, notamment par un *dessin* ou *diagramme* ou encore par une *matrice d'adjacence* :

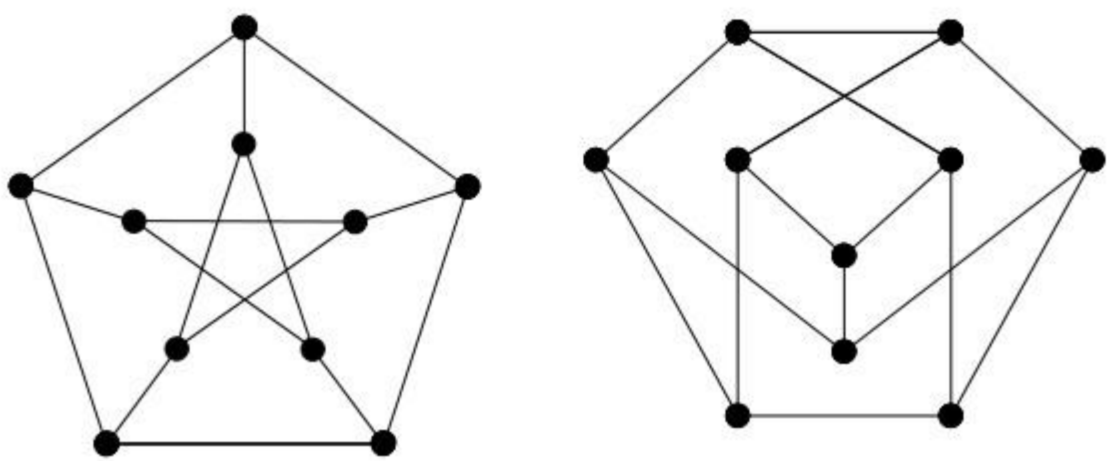


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Il ne faut pas confondre un graphe et son dessin : un même graphe peut être dessiné de plusieurs façons (graphes *isomorphes*) :



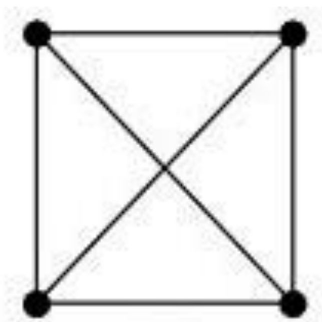
Deux représentations *isomorphes* du **graphe de Petersen** :

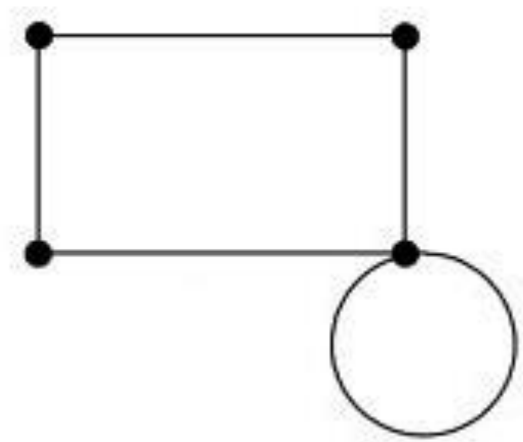


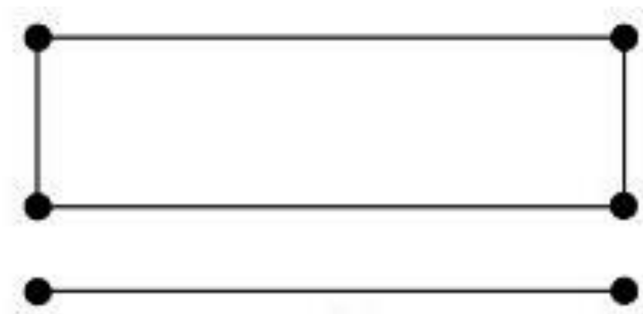
1-3) Un Peu de Vocabulaire sur les Graphes

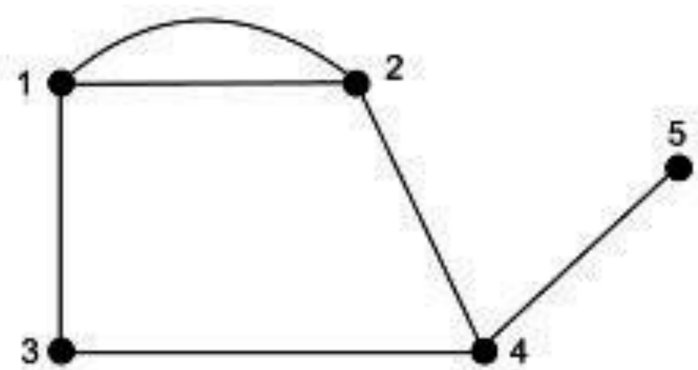
- L'**ordre** d'un graphe est le nombre de ses sommets. La **taille** d'un graphe est le nombre de ses arêtes.
- Un graphe est dit **simple** s'il ne contient ni *boucle*, ni *cycle*, ni *multi-arête*.

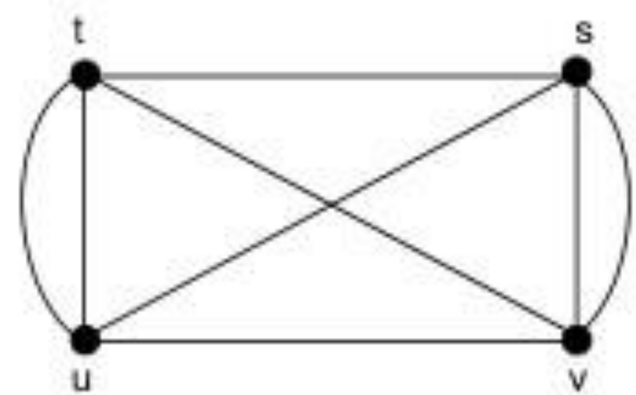
Parmi ces graphes, lesquels ne sont pas simples ?







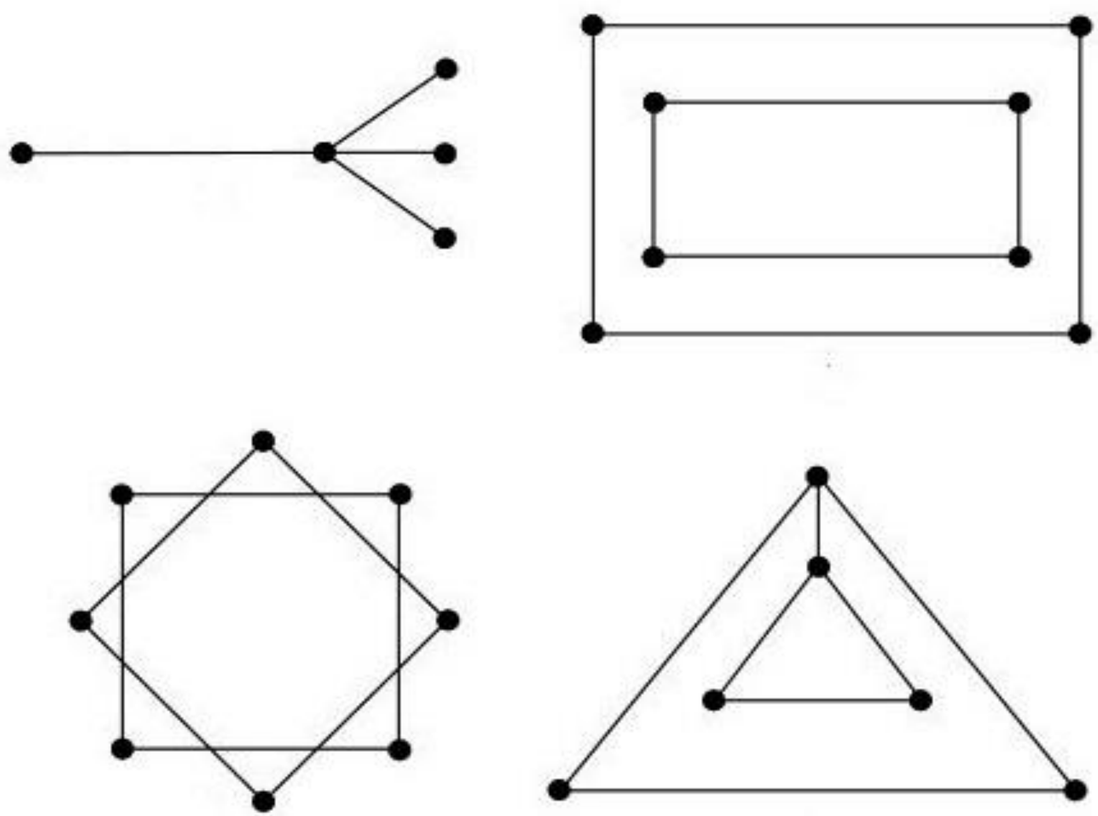




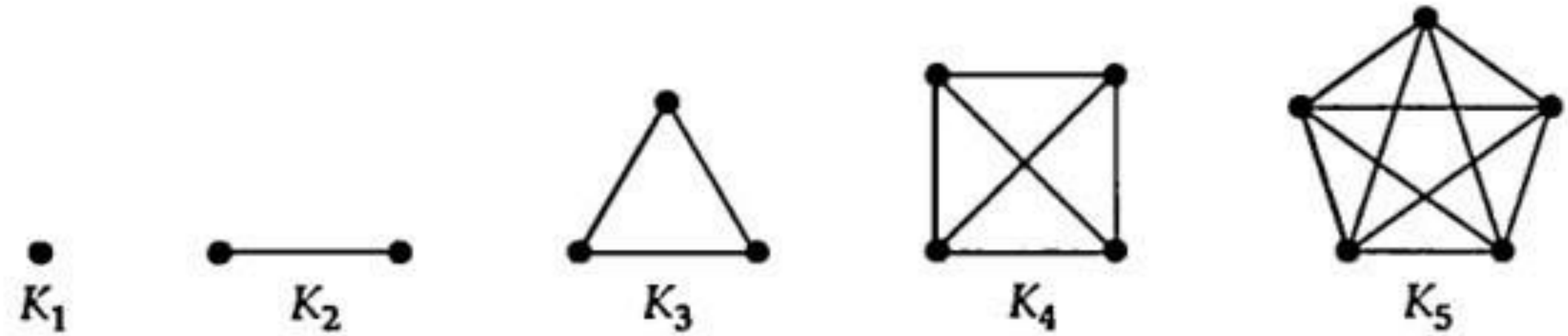
- On appelle **chemin** de **x** à **y** une succession finie d'arêtes d'un graphe G qui permet de joindre un sommet **y** à partir d'un sommet **x** en parcourant sans saut différentes arêtes de G.

- Un graphe est dit **connexe** si, pour toute paire de sommets **(x,y)**, il existe un chemin entre **x** et **y** : on dit alors que les sommets **x** et **y** sont *connectés*.

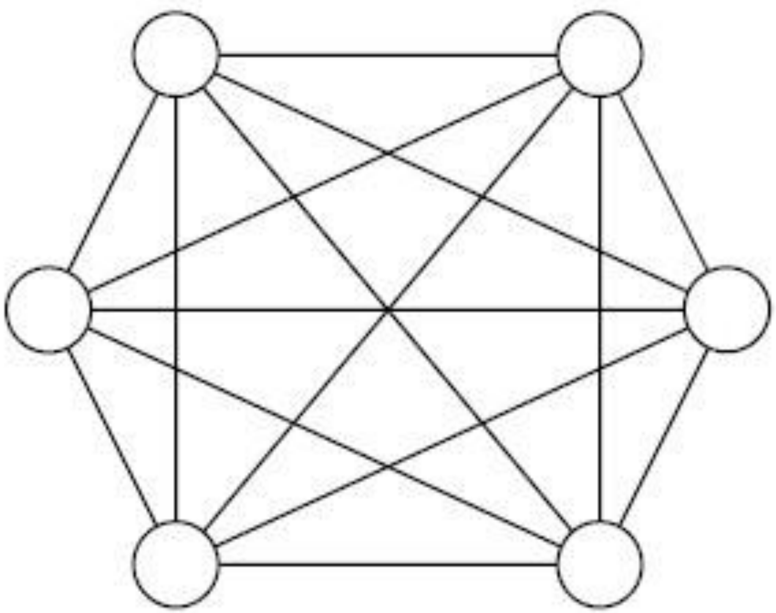
Parmi ces quatre graphes, lesquels ne sont pas connexes ?



- Un graphe est dit **complet**, si chacun de ses sommets est relié aux autres sommets par une seule arête.



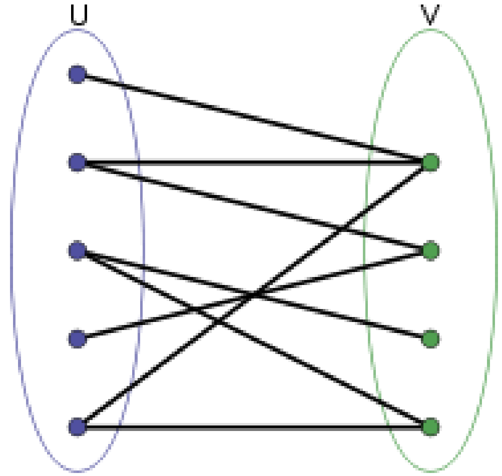
K_6



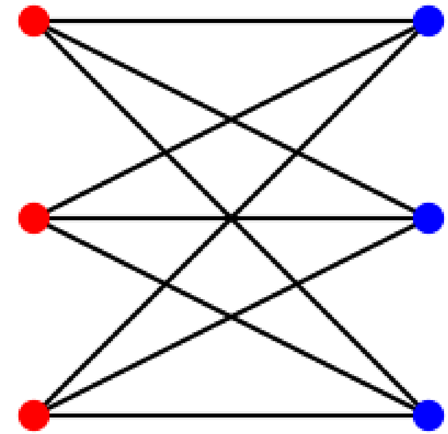
- Un graphe complet de **n** sommets est noté $\mathbf{K_n}$ et a

  ***(n(n*-1))/2** arêtes.

- Un graphe est dit **biparti**, s'il existe une *partition* de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles **U** et **V** telle que chaque arête ait une extrémité dans **U** et l'autre dans **V**.

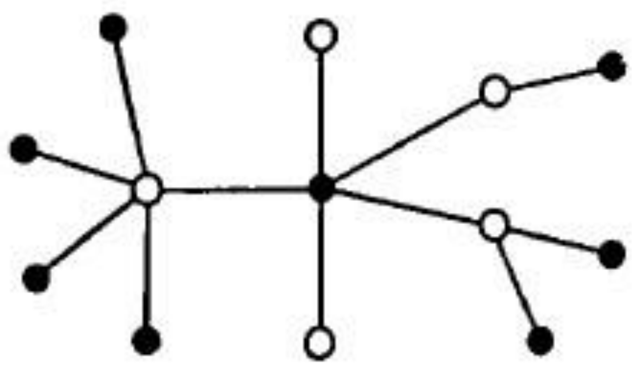


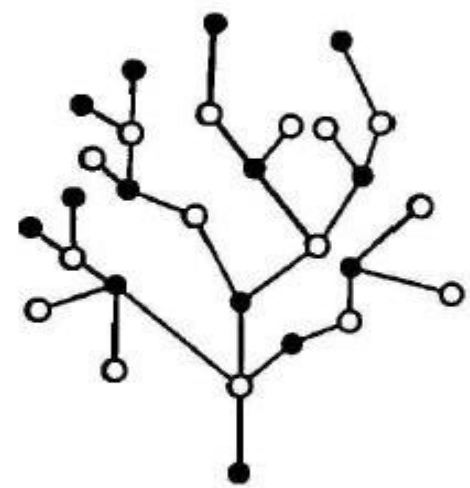
Graphe biparti quelconque



Graphe biparti *complet*

Arbres bipartis :

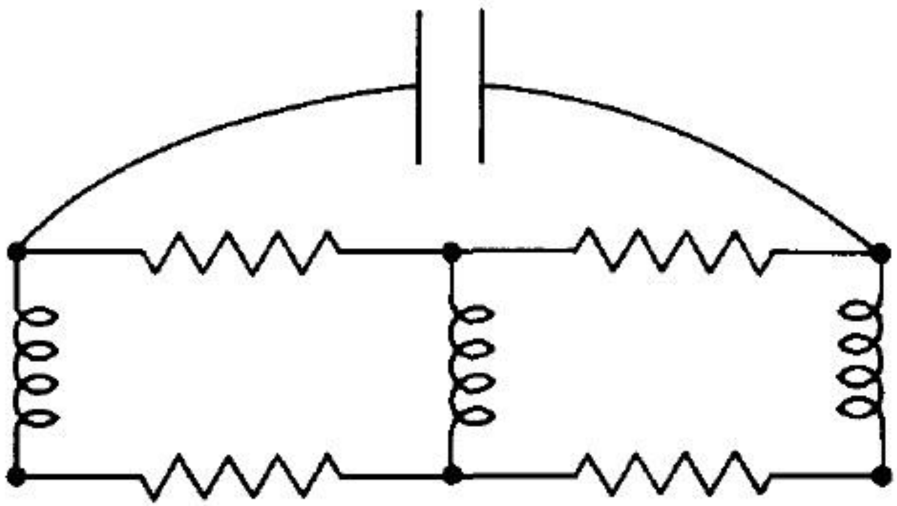




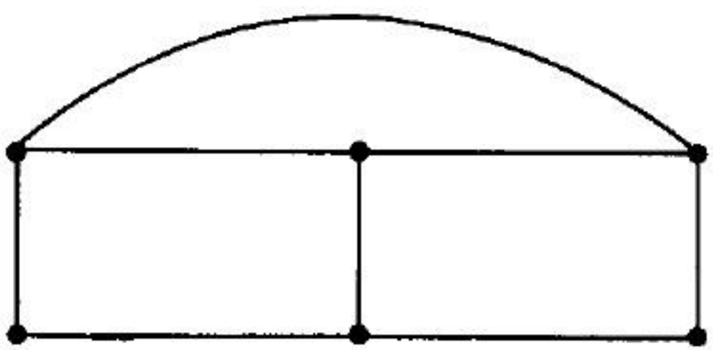
1-4) Les GRAPHES ont de nombreuses APPLICATIONS

- <u>En électricité</u> : Des graphes pour représenter les circuits électriques

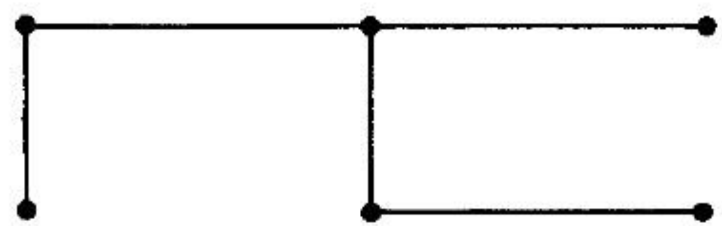
N:



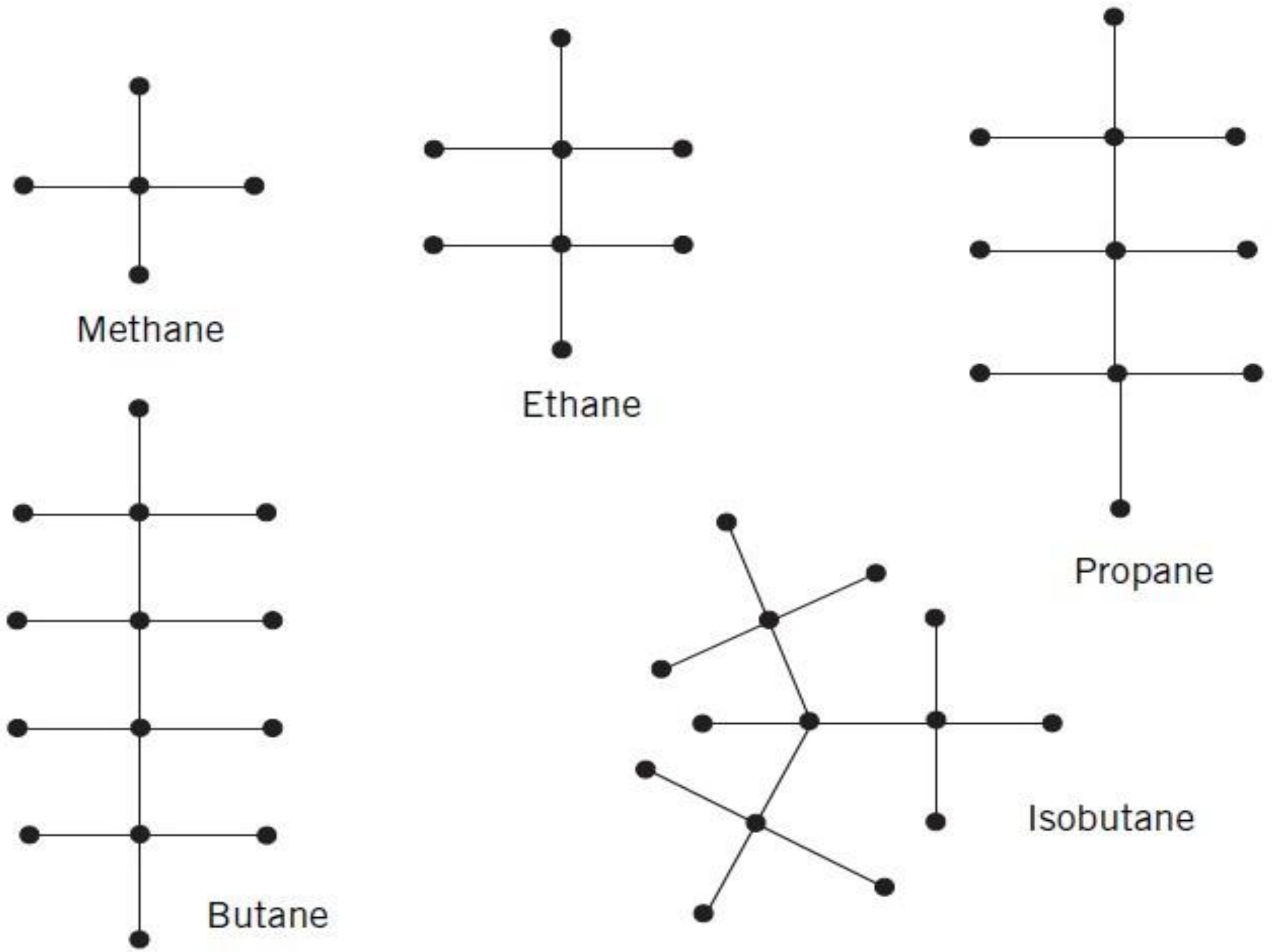
G:



T:



- <u>En chimie</u> : Des arbres pour représenter les molécules



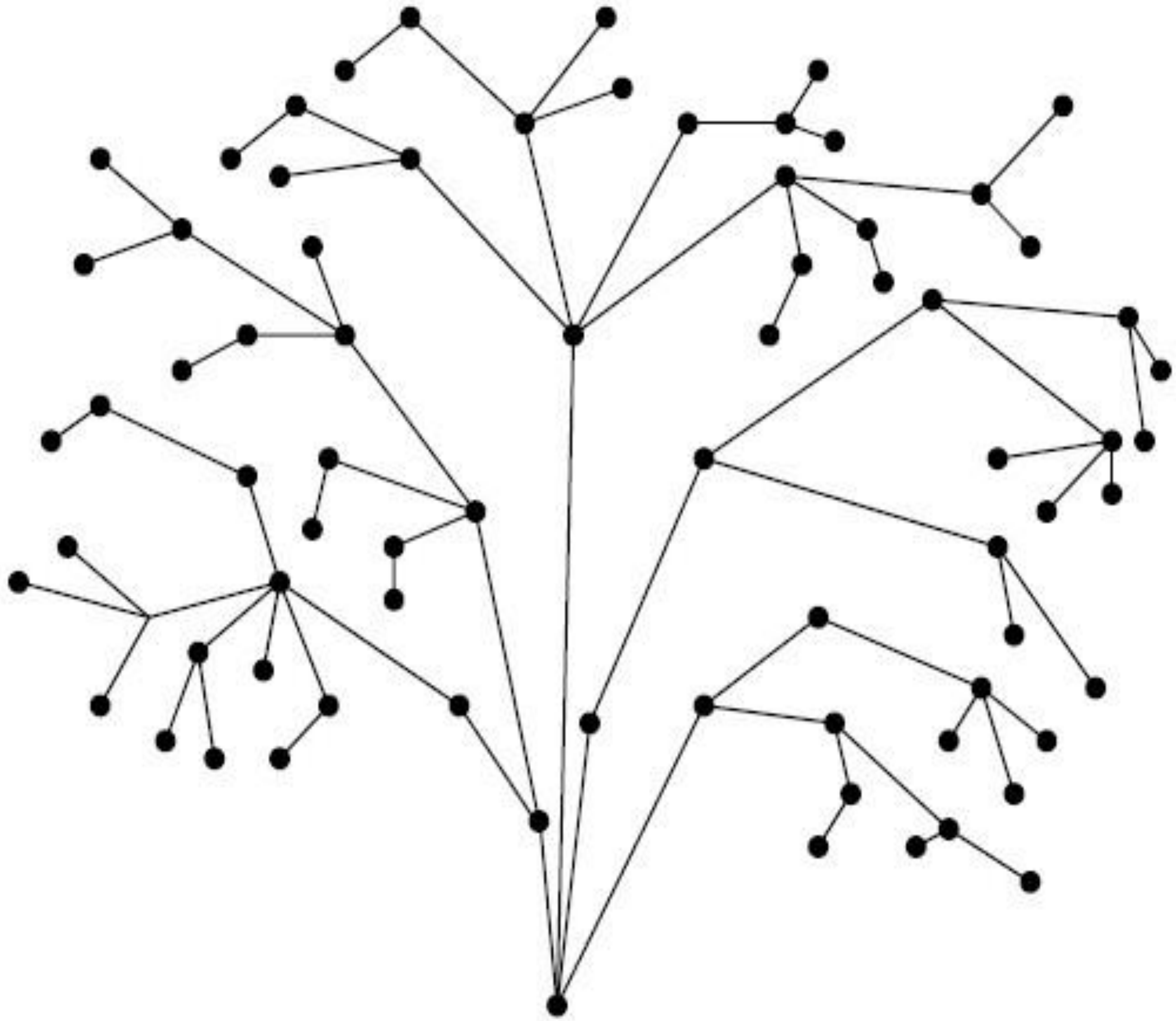
1-5) Les GRAPHES qui nous intéressent : les ARBRES

- Un **arbre** est un graphe **simple** qui est

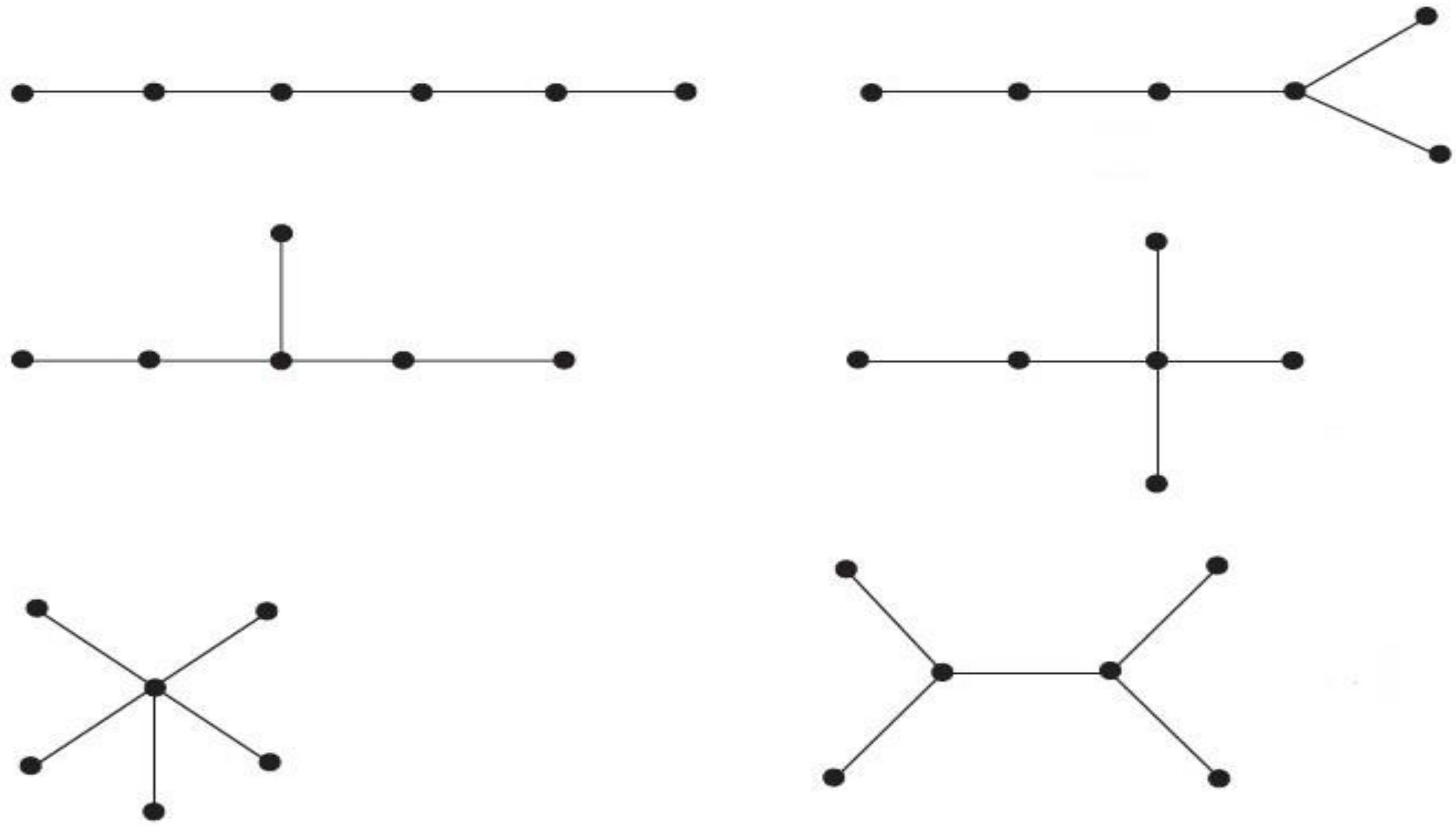
  - **connexe** :
  il y a *toujours un chemin* reliant toute paire de sommets

  et

  - **sans cycle** :
  il n'y a *jamais de chemin* reliant un sommet à lui-même.

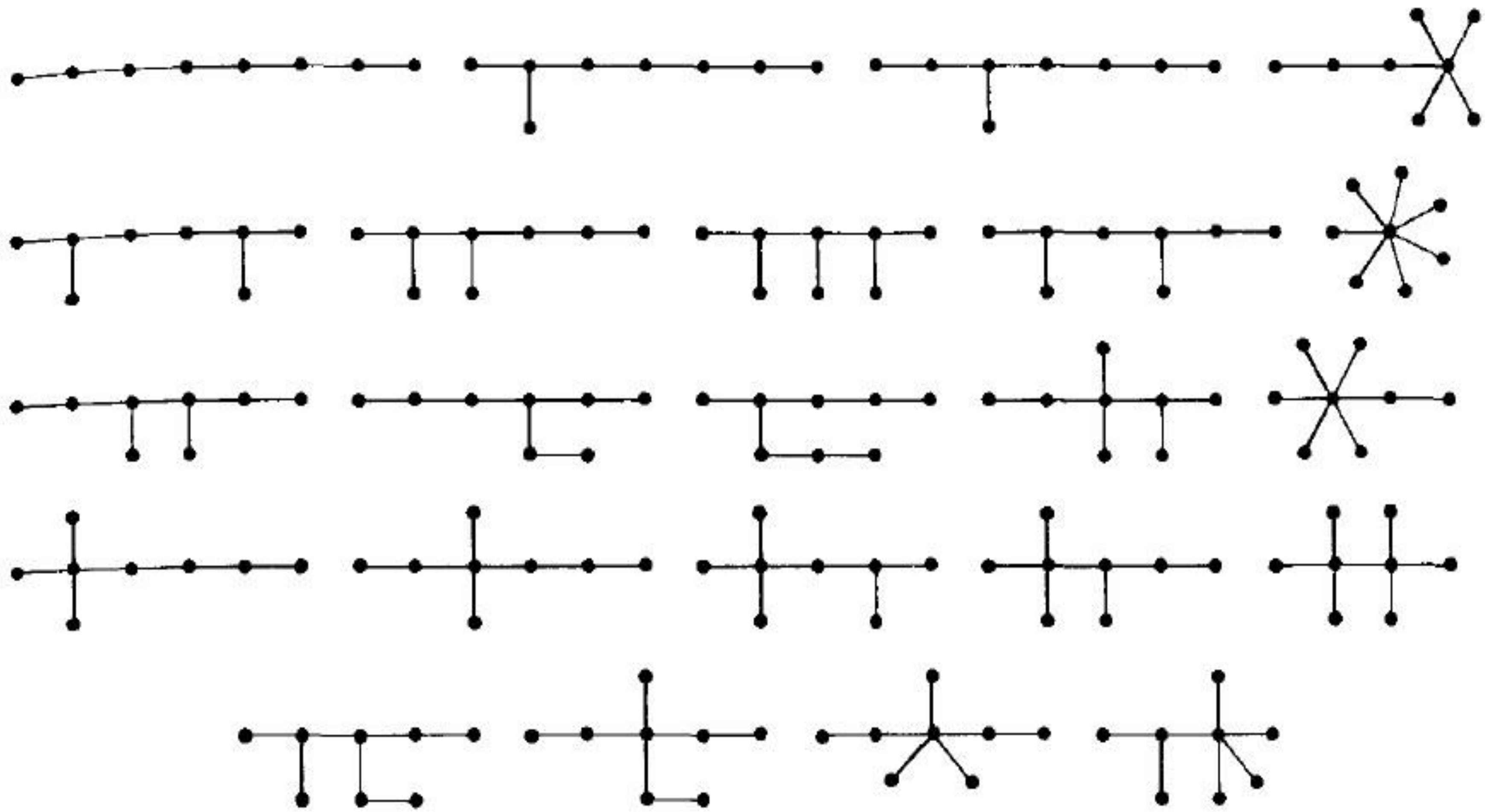


- Quelques arbres simples :

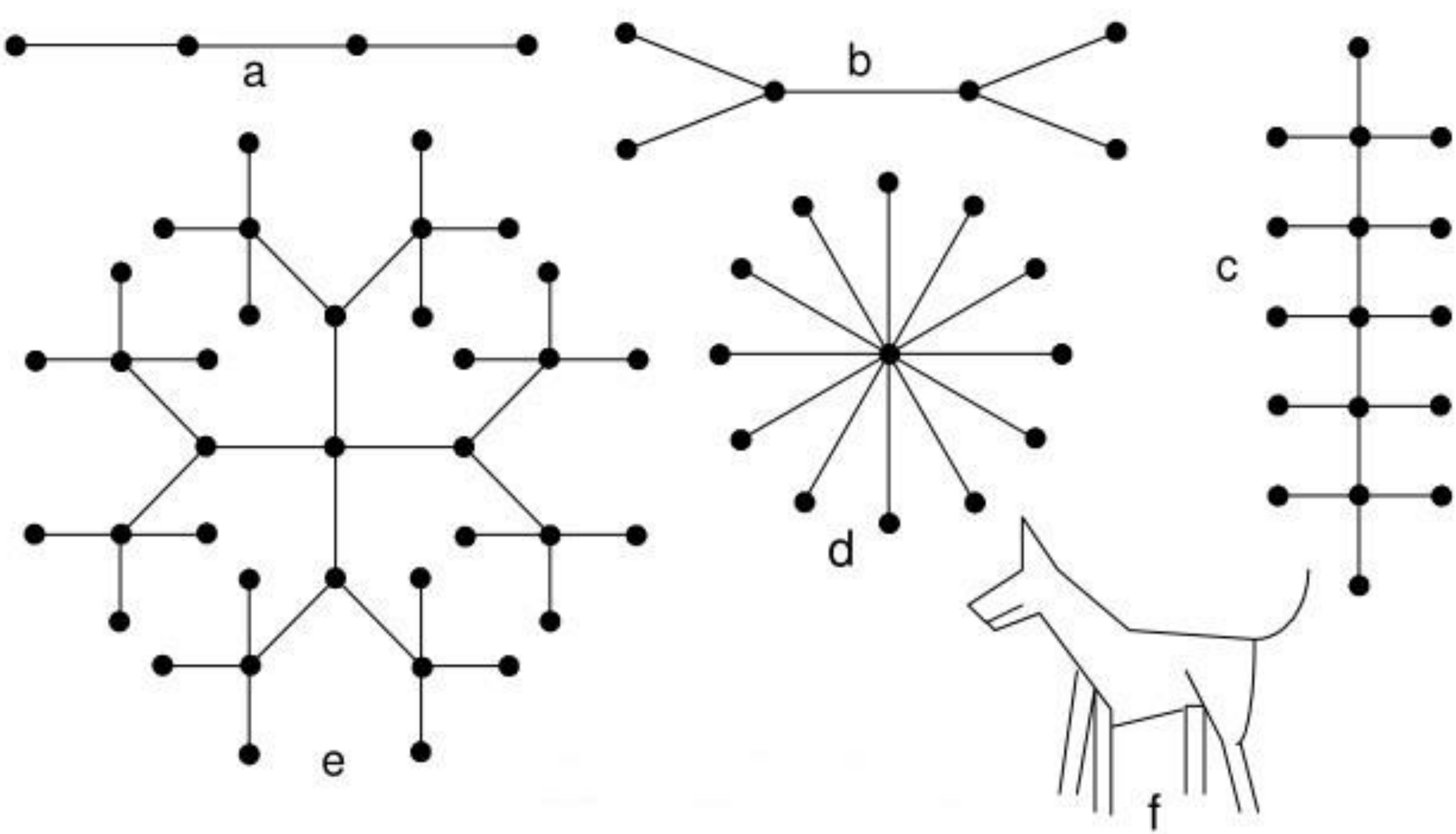


Les 6 arbres d’ordre n=6

- <u>Les 23 arbres de n=8 sommets</u> :



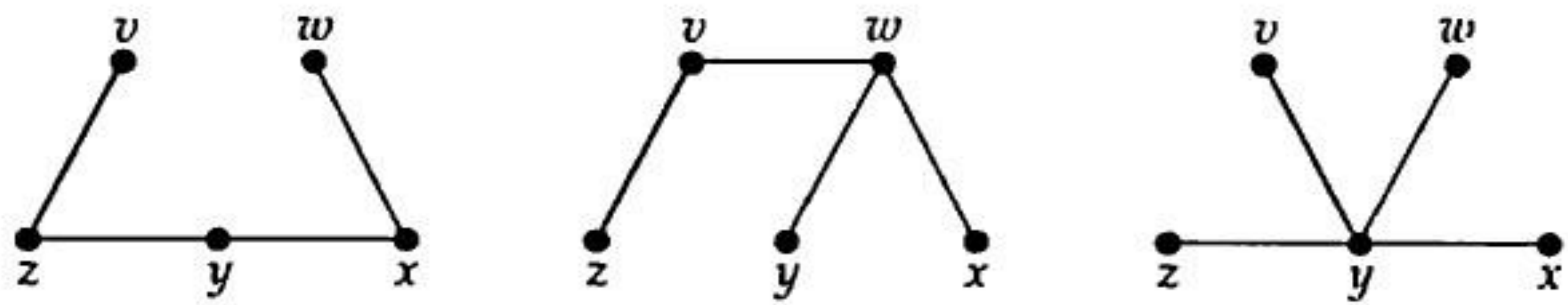
- Eux aussi sont des arbres :



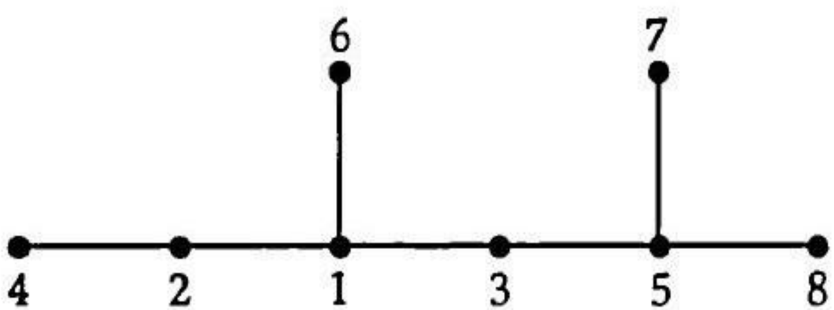
2 – La NUMÉROTATION GRACIEUSE

2-1) Numérotation (Etiquetage) des Graphes et des Arbres

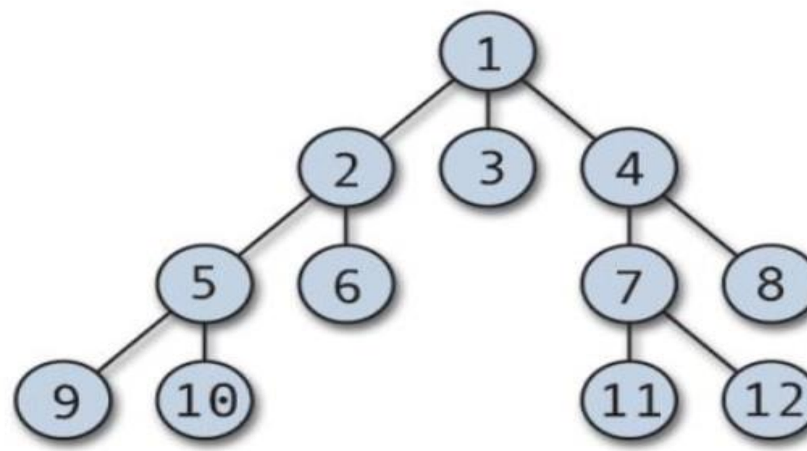
- La **numérotation** (ou : **étiquetage**) des graphes et des arbres s'applique :
  - aux sommets,
  - aux arêtes (arcs)



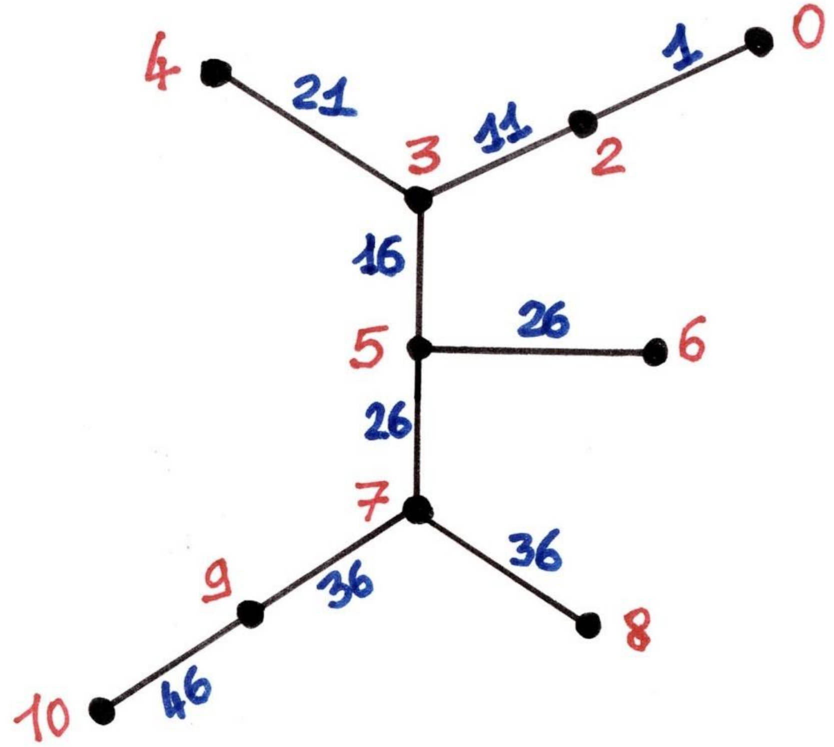
Etiquetage alphabétique des sommets



Etiquetage numérique des sommets



- Etiquetage numérique des sommets et des arêtes



- La numérotation d'un arbre peut être définie par une fonction ; ici, par exemple, on a, pour une certaine orientation de l'arbre :

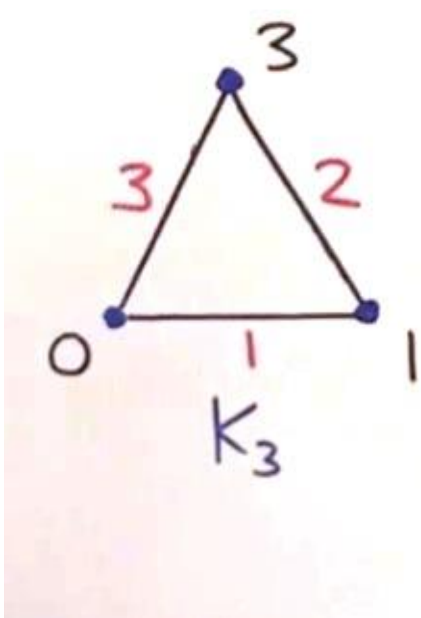
Numéro d'arête = (N° du sommet de départ x 5) + 1

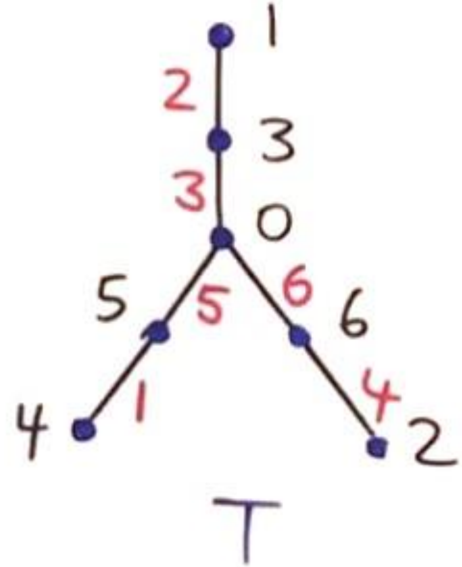
- La numérotation gracieuse des graphes et des arbres, elle aussi, est définie par une fonction entre les sommets et les arêtes.

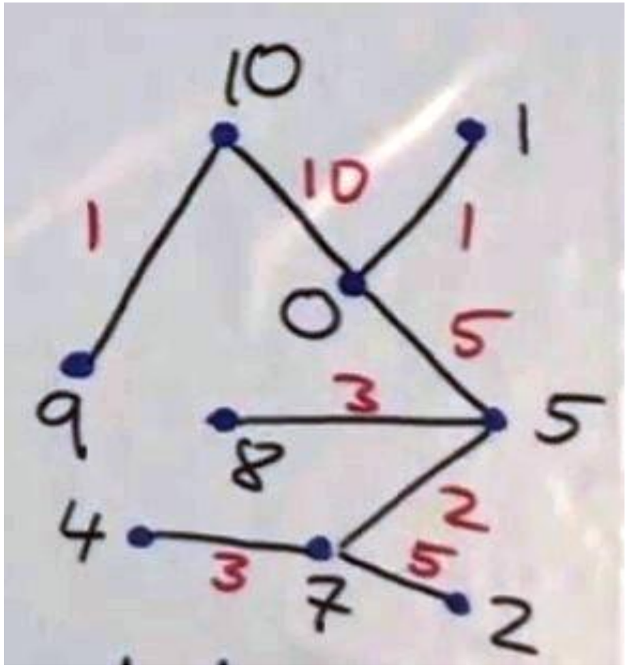
2-2) Définition de la Numérotation Gracieuse

La définition de la numérotation gracieuse concerne TOUT type de graphe, et, en particulier, vaut pour les **arbres** :

Soit A un **arbre** de k sommets, dont les numéros sont pris *sans répétition* dans l'ensemble $\{0, \ldots, n\}$. On donne pour numéro à chaque arc (arête) de A la **valeur absolue de la différence des numéros de ses sommets (initial et final)**. Si tous les numéros d'arc sont **distincts**, on dit que A est un **arbre gracieux** ou que la **numérotation** de A est **gracieuse**.

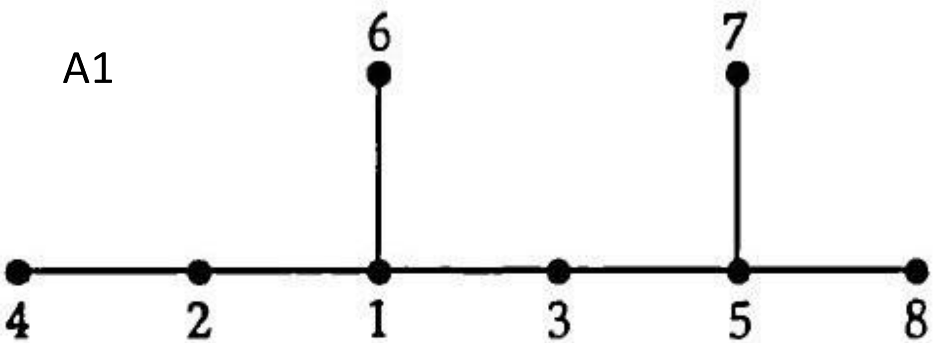


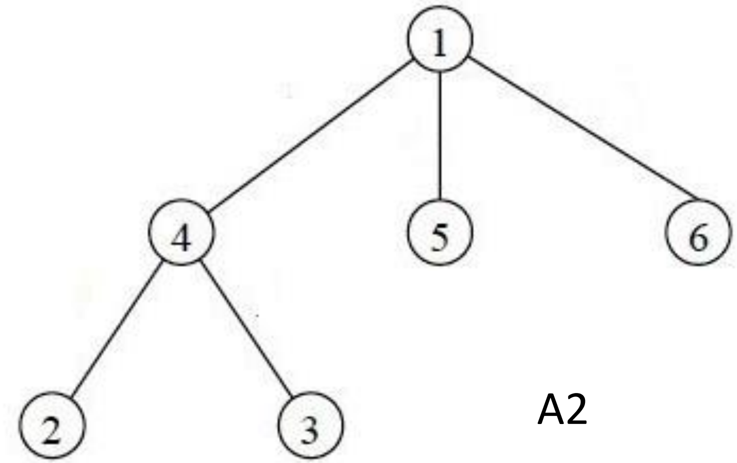




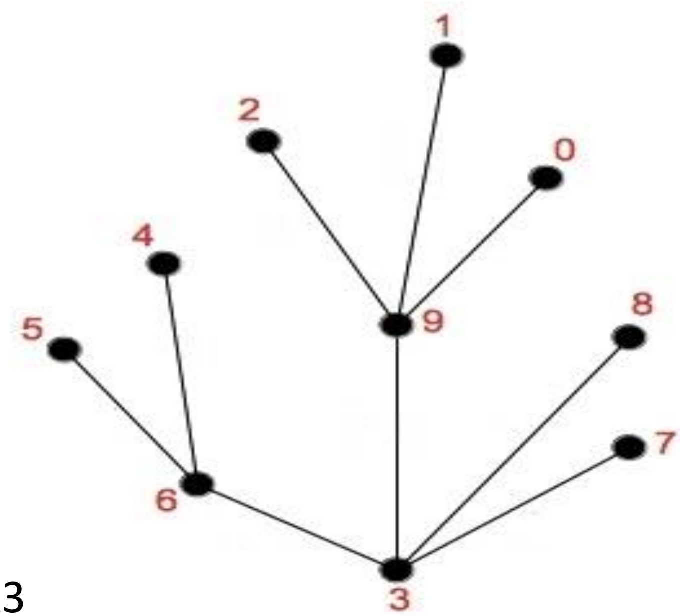
- Vérifions si les arbres suivants sont gracieux :

A1

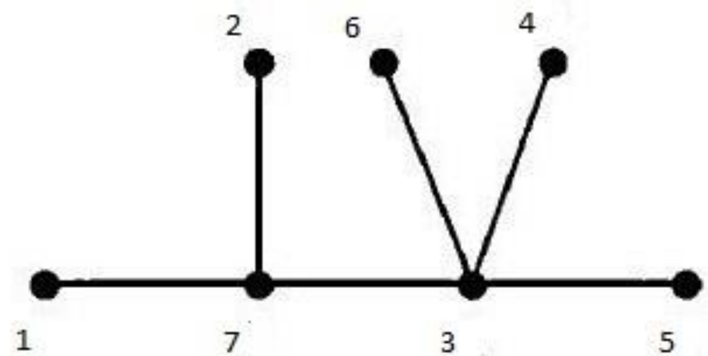




A2



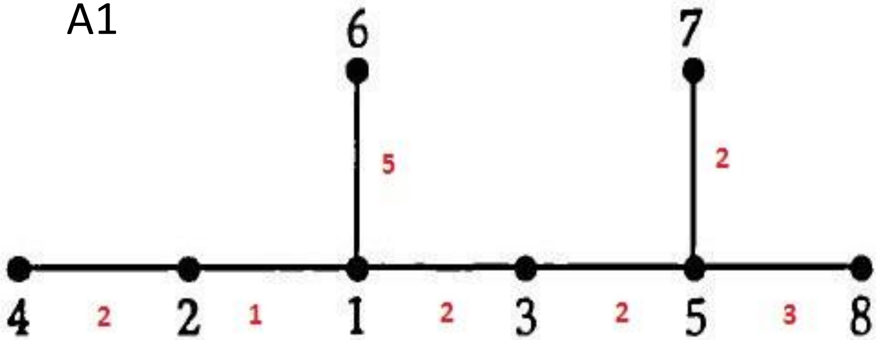
A3

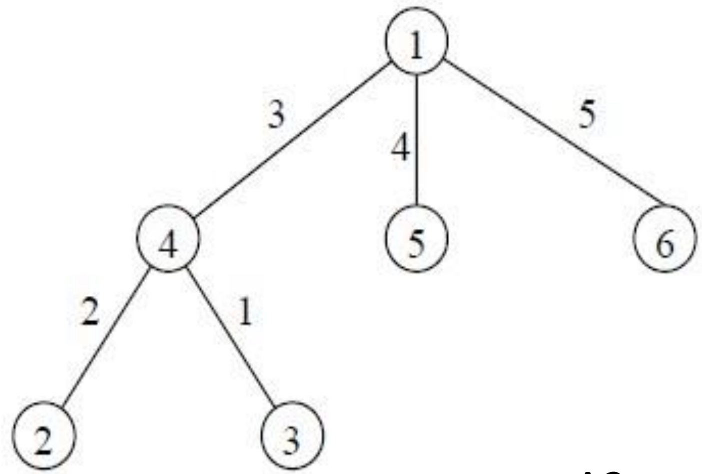


A4

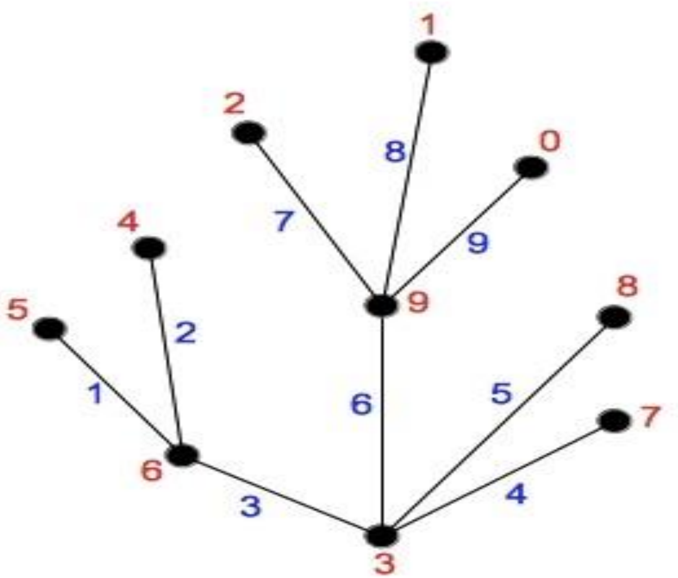
- L’arbre A1 n’est pas gracieux ; les autres arbres le sont :

A1

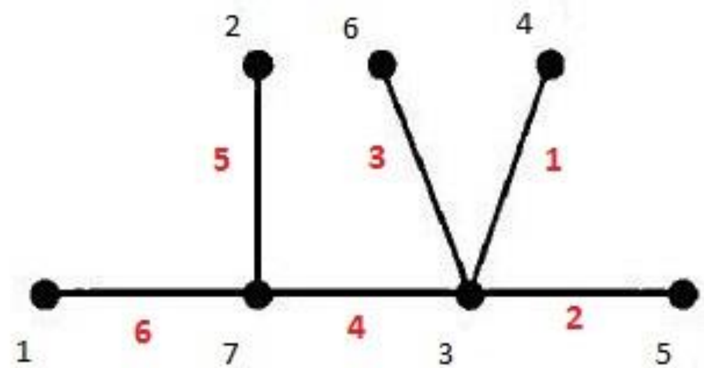




A2



A3



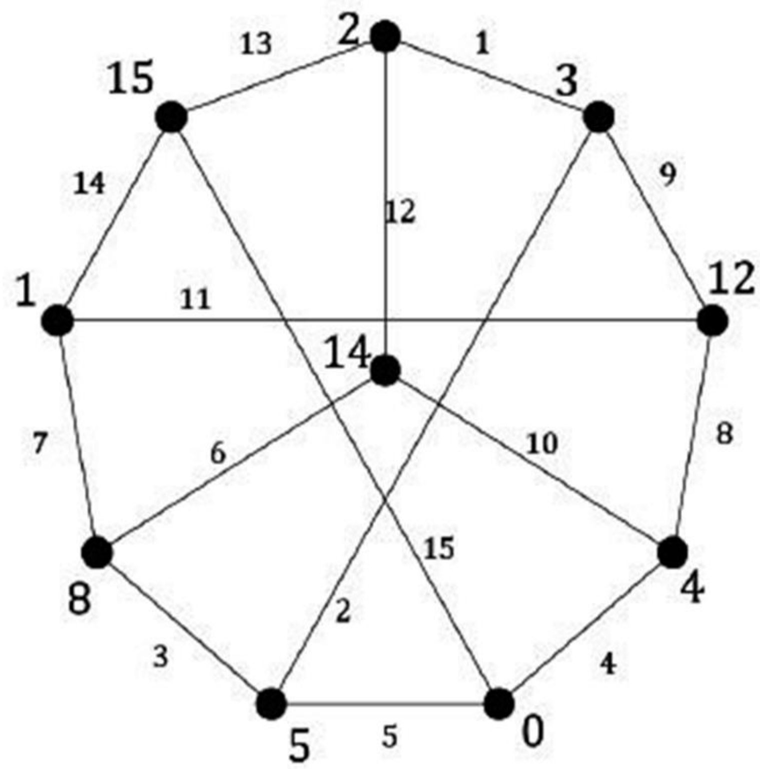
A4

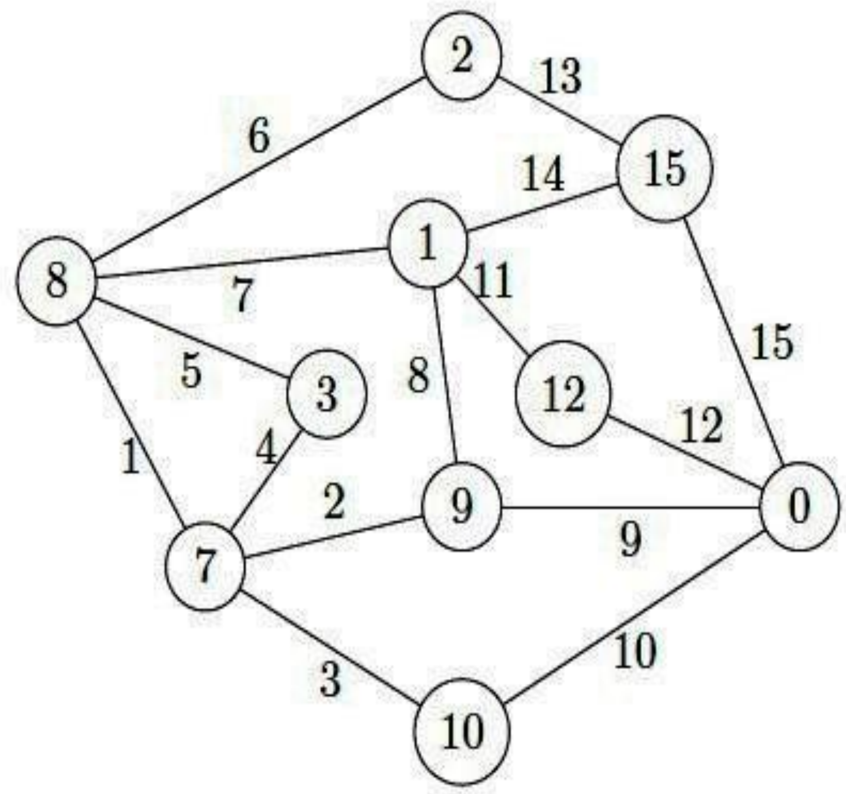
2-3) Origine de la Numérotation Gracieuse : Hommage aux Anciens

- **1967** : Alexander **Rosa** définit plusieurs *fonctions de numérotation* des graphes, notamment celle qu'il appelle la **β-valuation**.

- **Golomb**, Solomon Wolf (1932-mai 2016)
- C'est lui qui, en 1972, nomme « **gracieuse** » la β-valuation de Rosa.

2-4) Quelques Exemples de Graphes Numérotés Gracieusement



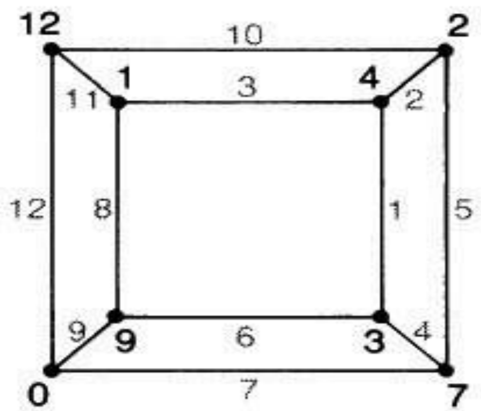


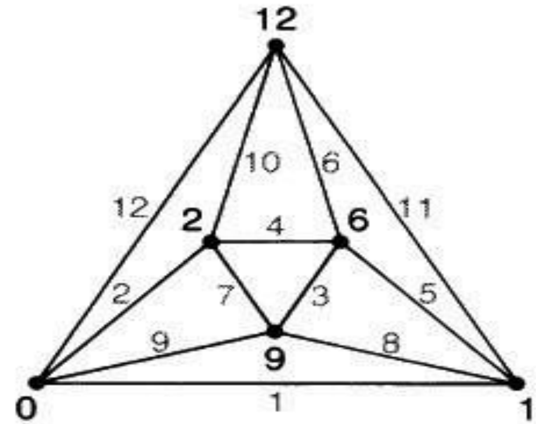
S={**0**,1,2,3,4,5}U{8}U{12}U{14,**15**} et |S|=**10**
A={**1**,2,3,…,13,**15**} et |A|=**15**

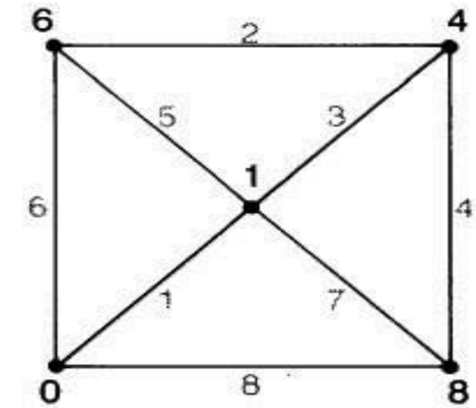
S={**0**,1,2,3,}U{7,8,9,10}U{12,**15**} et |S|=**10**
A={**1**,2,3,…,13,**15**} et |A|=**15**

Les numéros de <u>sommets</u> sont pris, *sans répétition*, dans l'ensemble S= **{0,…,n=15}**.
Les numéros d'<u>arêtes</u> sont *uniques* dans A={**1**,…,**15**} .
Pour toute arête $a_i(s_d,s_f)$, on a : $a_i=|s_d-s_f|$.

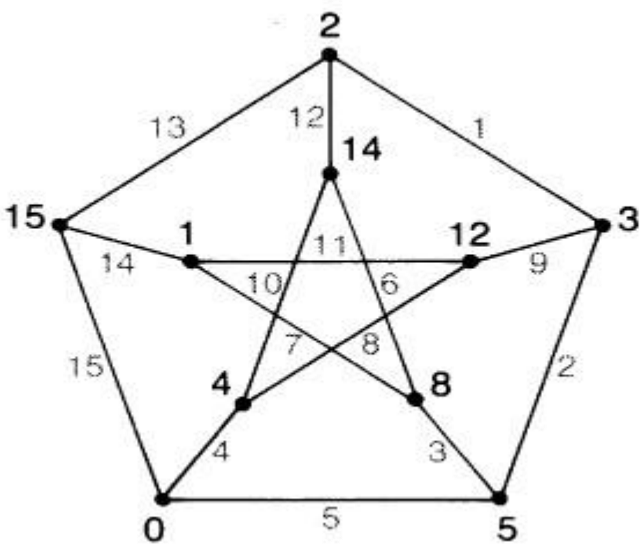
- On a trouvé une <u>numérotation gracieuse pour certains graphes</u> comme :

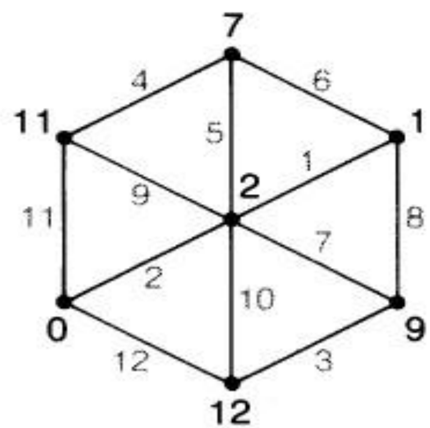


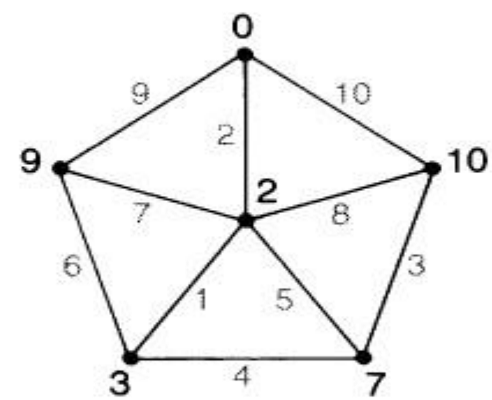




- Ou encore comme :

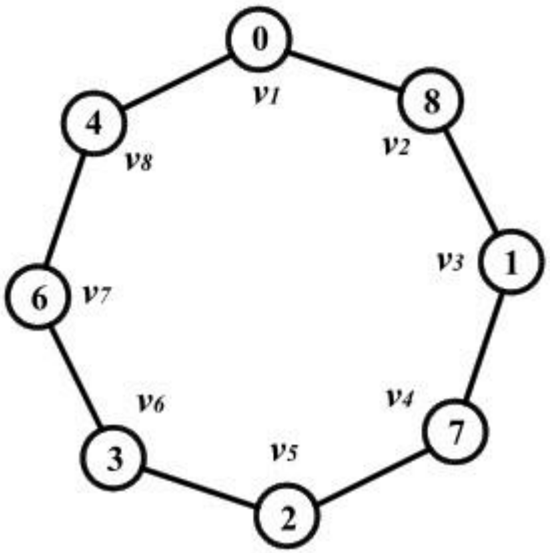




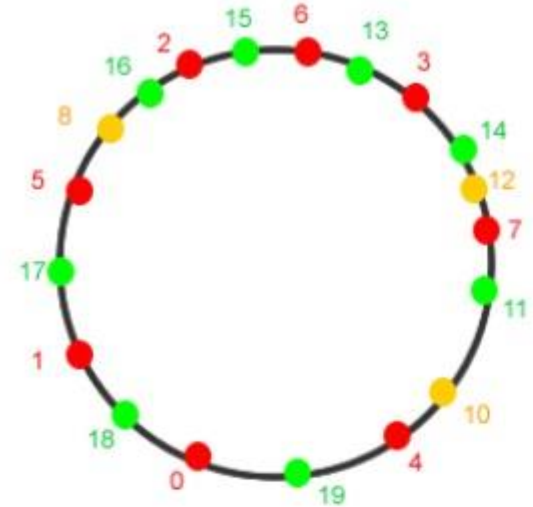


- Il existe même des **cycles** gracieux :

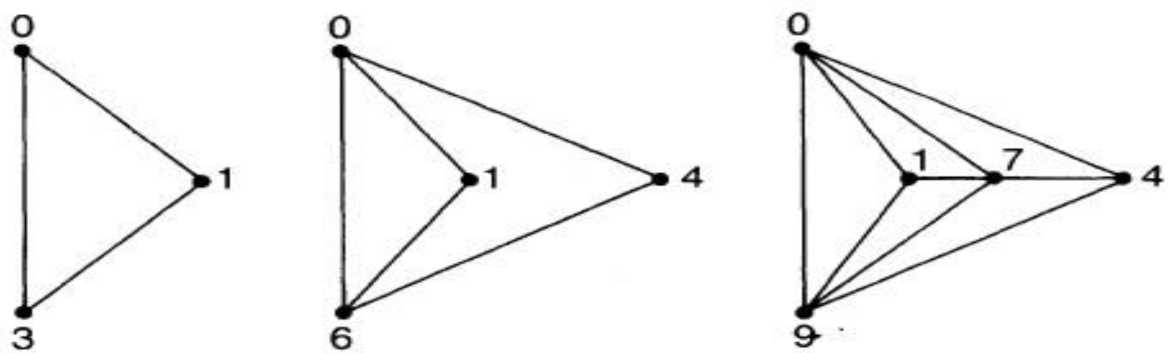
C_8



C_{19}



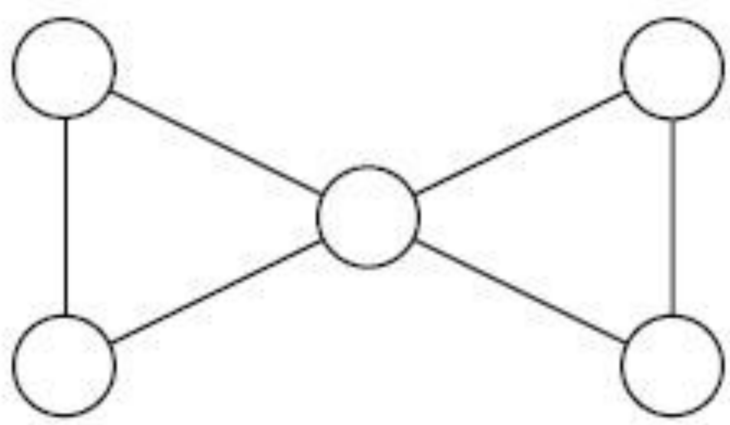
- Ou des graphes gracieux **infinis** :



• Mais … on a montré depuis longtemps que :

✓ **La plupart des Graphes NE SONT PAS GRACIEUX !**

• **Et même que certains graphes ne sont JAMAIS gracieux, comme par exemple :**

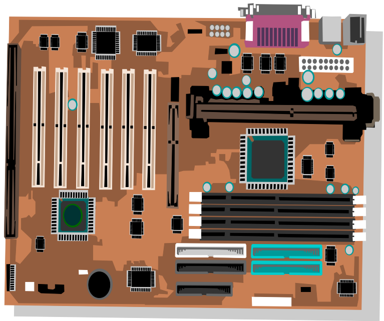


• Rosa a montré que, si, dans un graphe G ayant **n** arêtes, chaque *sommet* est de degré *pair* et que **n mod 4 ε [1,2]**, alors G ne peut jamais être gracieux.

• **La recherche d'un résultat général sur la numérotation gracieuse est donc limitée au cas de la conjecture sur les … ARBRES :**

CONJECTURE :

TOUS les ARBRES sont GRACIEUX.



3 – L'APPROCHE INFORMATIQUE POUR RÉSOUDRE la CONJECTURE

3-1) Complexité algorithmique

- Le *nombre N d'arbres étiquetés* croît très rapidement avec le nombre **n** de sommets de l'arbre :

… suivant la formule de Cayley :

$\mathbf{N=n^{n-2}}$

n=nombre de sommets	Nombre d'arbres non étiquetés	N=Nombre d'arbres étiquetés
1	**1**	**1**
2	**1**	**1**
3	**1**	**3**
4	**2**	**16**
5	**3**	**125**
6	**6**	**1296**
7	**11**	**16807**
8	**23**	**262144**
9	**47**	**4782969**

3-2) Les Résultats de la Vérification Algorithmique

- La vérification algorithmique de la conjecture a progressé lentement.

- En 1998, Aldred et McKay montrent que :

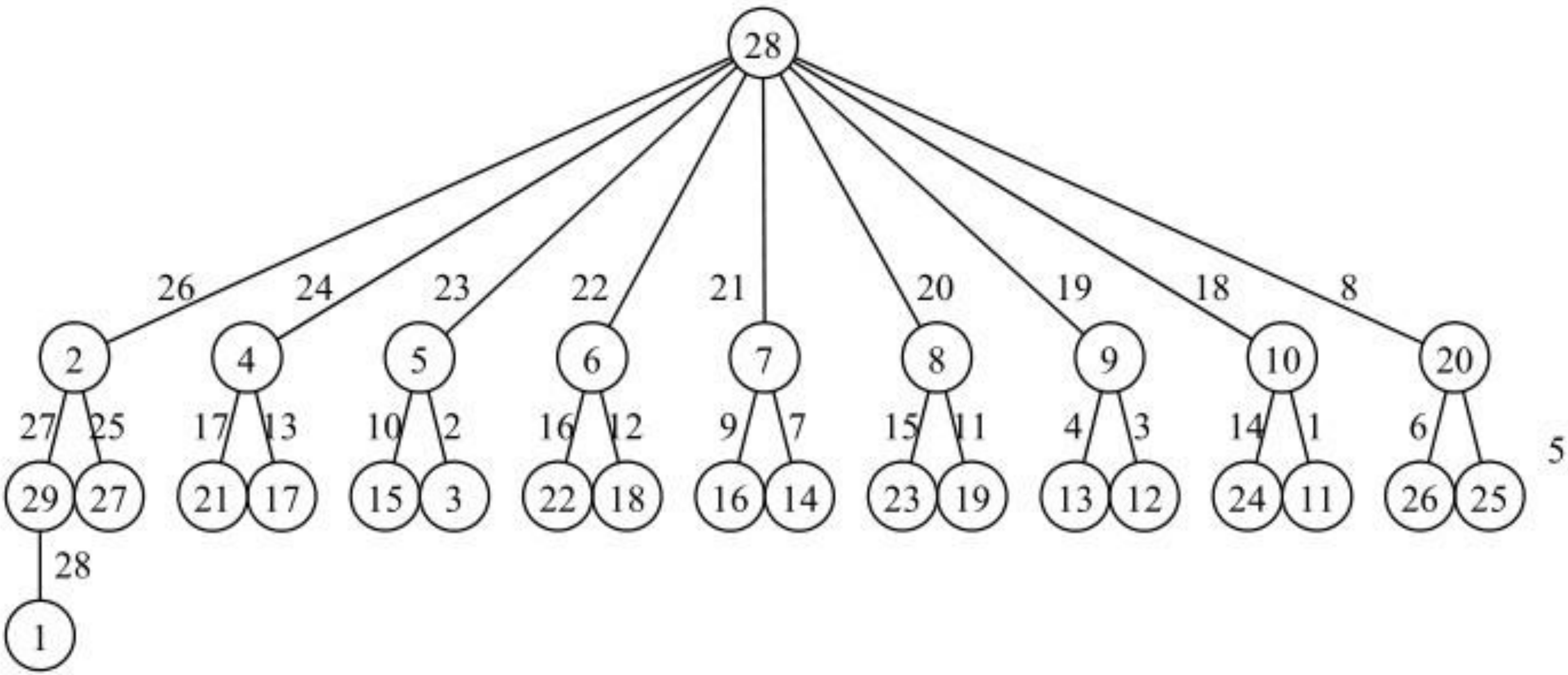
Tous les arbres d'au plus 27 sommets sont gracieux.

- En 2003, Horton établit que :

Tous les arbres d'au plus 29 sommets sont gracieux.

- *Remarque* : les arbres de 27 sommets sont au nombre de **751 065 460** et ceux de 29 sommets au nombre de **5 469 566 585**.

L’arbre gracieux de n=29 sommets :



- *Remarque* : les arbres de 32 sommets sont au nombre de **109 972 410 221**.

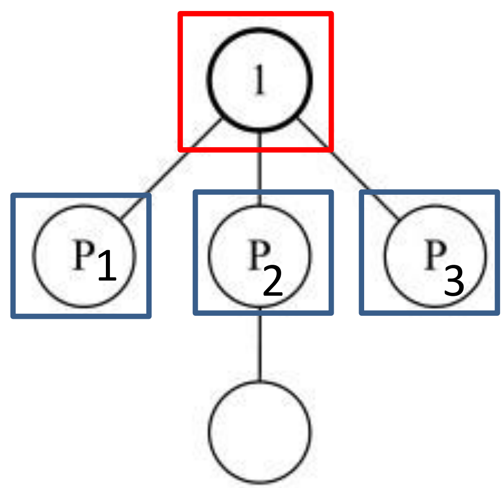
- En 2010, Fang réussit à repousser la limite jusqu’à **n=35** :

Tous les arbres d’au plus 35 sommets sont gracieux.

3-3) Exemple de déroulement d'un algorithme de recherche des numéros d'arêtes (d'après Horton, 2003)

- Soit un arbre de **n=5** sommets, numérotés avec les entiers [1,…,5]; les arêtes sont à numéroter avec les entiers [1,…,n-1=4].

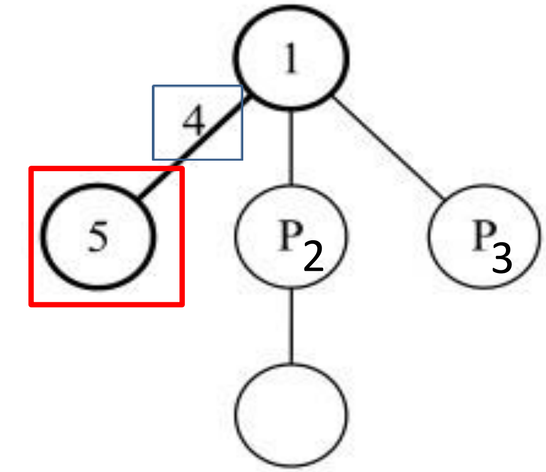
- Etape 1 : L'algorithme numérote le nœud-racine par **1** .
  Il marque ensuite comme *possible* (**P**) chacun des nœuds *adjacents* au nœud **1** : $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$ et $\mathbf{P_3}$.



- On doit placer sur les arêtes de l'arbre les étiquettes 4,3,2 et 1.
  Pour cela, l'algorithme va tenter de numéroter *dans l'ordre* tous les nœuds *possibles* et les arêtes qui les relient au nœud **1**.

- <u>Etape 2</u> : L'algorithme teste **4** pour l'arête reliant le nœud **1** au <u>1er nœud</u> **P_1**.

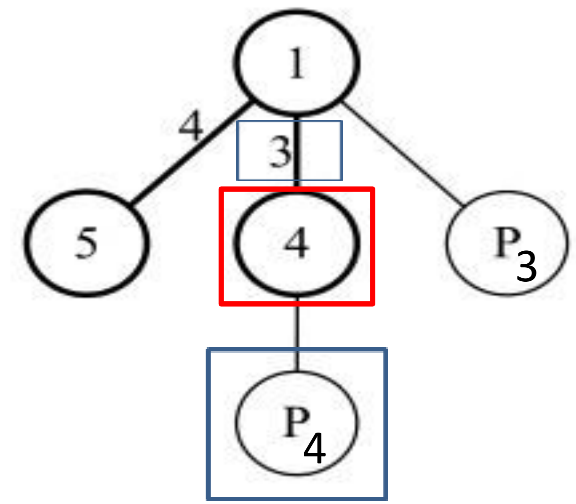
  Selon la définition de la numérotation gracieuse, l'étiquette **5** convient alors pour ce nœud.



- <u>Etape 3</u> : L'algorithme passe au <u>2ème nœud</u> **P_2** et teste si **3** peut être placé sur l'arête le reliant au nœud **1.**

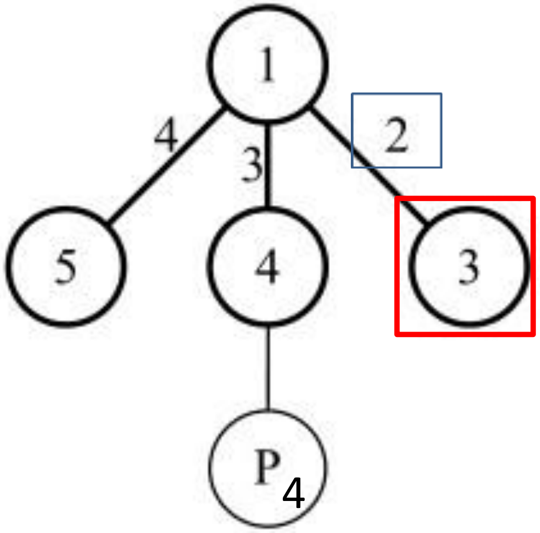
  C'est le cas si l'étiquette **4** est donnée à **P_2**.

  L'algorithme marque ensuite comme *possible* le nœud *adjacent* au nœud **4** : c'est le <u>4ème nœud</u> **P_4**.



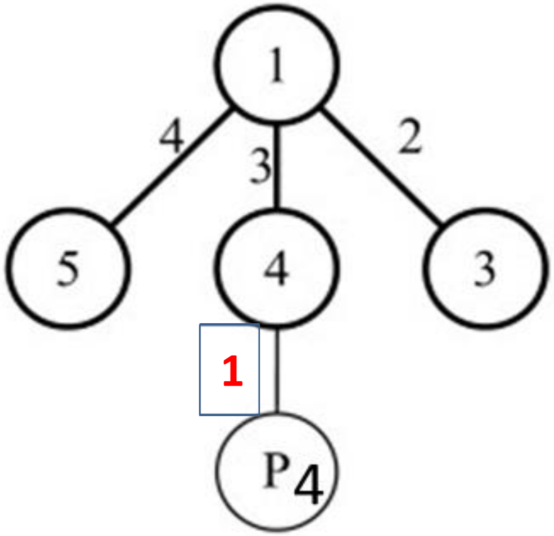
- <u>Etape 4</u> : L'algorithme passe au <u>3ème nœud</u> $\mathbf{P_3}$ adjacent au nœud **1** et teste si l'étiquette **2** peut être placée.

  C'est le cas si l'on attribue l'étiquette **3** au nœud $\mathbf{P_3}$.



- <u>Etape 5</u> : L'algorithme tente de placer la dernière étiquette **1** sur l'arête joignant le nœud **4** au <u>4ème nœud</u> $\mathbf{P_4}$, adjacent au nœud **1**.

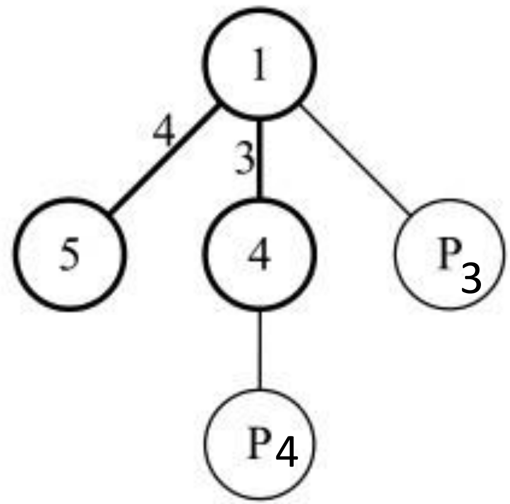
  … C'est ***impossible*** !



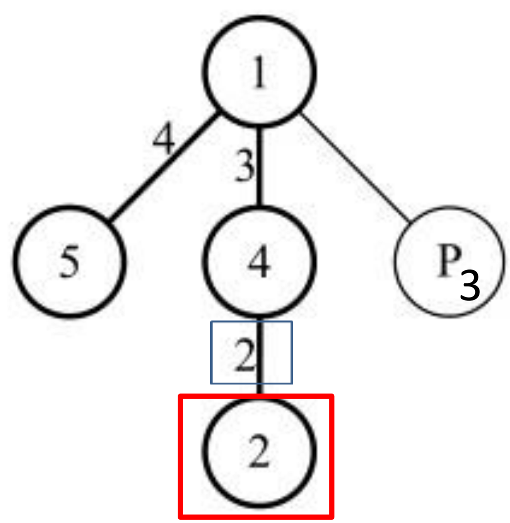
… car la numérotation obtenue ne serait pas gracieuse : le <u>4ème nœud</u> $\mathbf{P_4}$ aurait l'étiquette *3*, qui est déjà attribuée au nœud au $\mathbf{P_3}$.

- <u>Etape 6</u> : L'algorithme effectue une <u>recherche rétrograde</u> :

  - il annule l'étape 4 ;



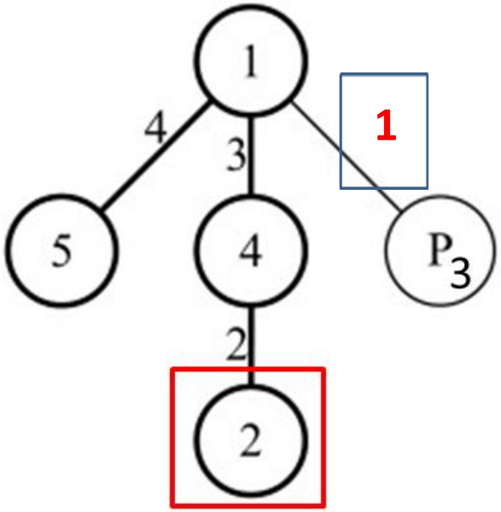
  - il *re*place l'étiquette **2** sur l'arête qui part du nœud **4** : l'étiquette **2** convient donc pour le <u>4ème nœud</u> **P_4**, adjacent au nœud **4**.



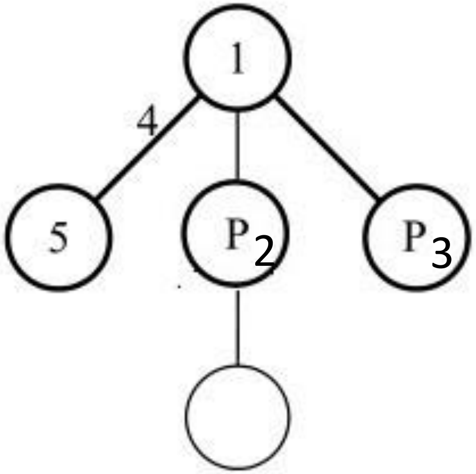
- Etape 7 : L'algorithme échoue ensuite à placer la dernière étiquette **1** sur l'arête reliant le nœud **1** au 3ème nœud $\mathbf{P_3}$ adjacent,

  … car la numérotation obtenue ne serait pas gracieuse : le 3ème nœud $\mathbf{P_3}$ aurait l'étiquette ***2***, seule permise, mais qui est déjà attribuée au nœud au $\mathbf{P_4}$.

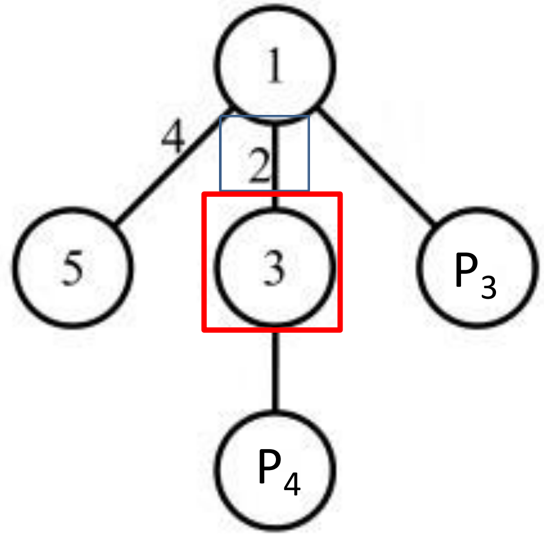
  … L'étape 6 est donc annulée.



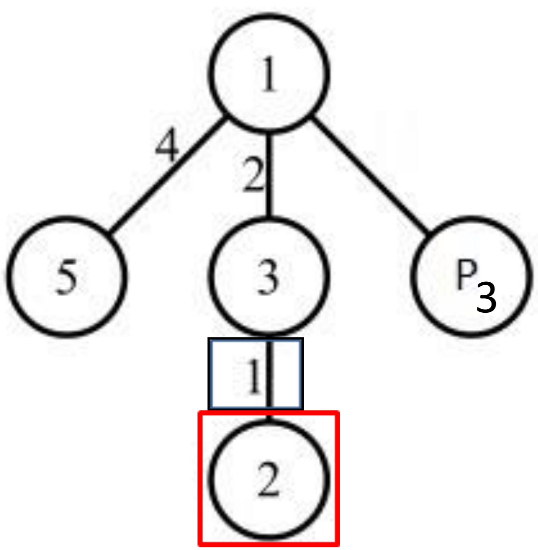
  … La recherche rétrograde va repartir du 2ème nœud $\mathbf{P_2}$ adjacent au nœud **1** : on est revenu en fin d'étape 2.



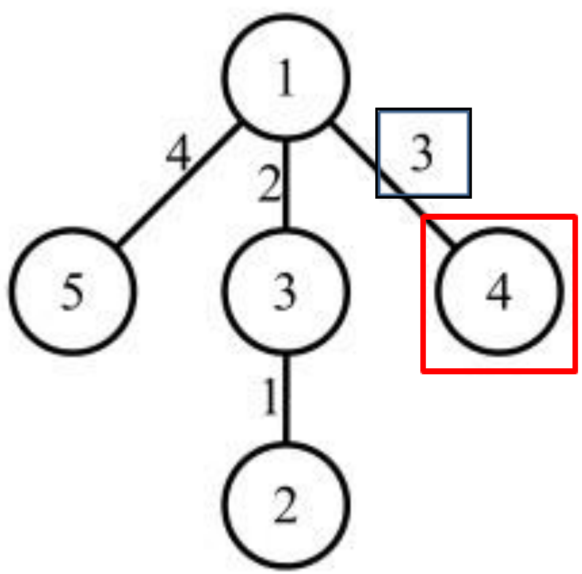
- Etape 8 : L'algorithme place l'étiquette **2** sur l'arête qui part du nœud **1** :
  - l'étiquette **3** convient alors pour le 2ème nœud **P_2**, adjacent au nœud **1**.
  - le 4ème nœud **P_4**, adjacent au nœud **3** est marqué comme possible.



- Etape 9 : L'algorithme place l'étiquette **1** sur l'arête qui part du nœud **3** :
  - l'étiquette **2** convient alors pour le 4ème nœud **P_4**, adjacent au nœud **3**.



- Etape 10 finale : L'algorithme place l'étiquette **3** sur l'arête qui part du nœud **1** :
  - l'étiquette **4** alors convient pour le 3ème nœud **P_3**, adjacent au nœud **1**.



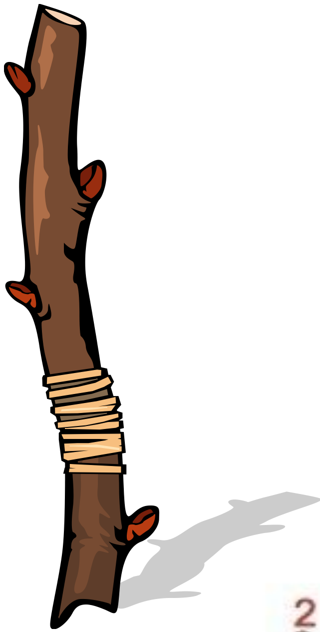
4 – L'APPROCHE MATHEMATIQUE ou … la «JUNGLE» de la NUMEROTATION GRACIEUSE

- Depuis les années 70, faute de trouver une solution générale de la conjecture des arbres gracieux, la recherche s'est orientée vers l'étude par <u>types d'arbres</u>.

  De nombreux résultats partiels ont été établis.

- La recherche « par type d'arbres » est foisonnante, au point qu'on peut se croire dans une sorte de ***jungle***, peuplée, entre autres, d'insectes et de végétaux insolites.
  Certains parlent du « ***zoo*** » de la numérotation gracieuse : chenilles, homards, araignées ; mais aussi : étoiles, bambous, bananiers, cocotiers, oliviers et … pétards.

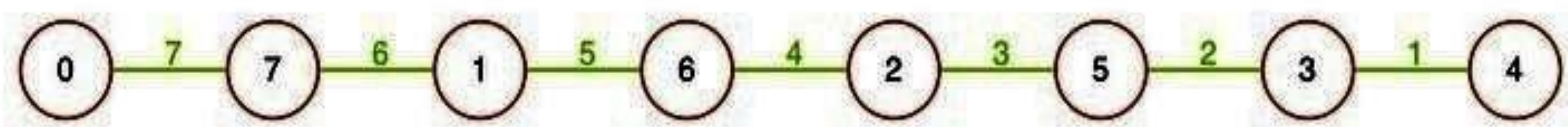
4-1) Les CHEMINS



- Un **chemin** est l'*arbre* le plus simple possible :

  une *ligne* (le **tronc**) sur laquelle on a placé des *points* (les **sommets** ou **nœuds**).

- On numérote les sommets, normalement de **0** à **n** :



- On peut démontrer que :

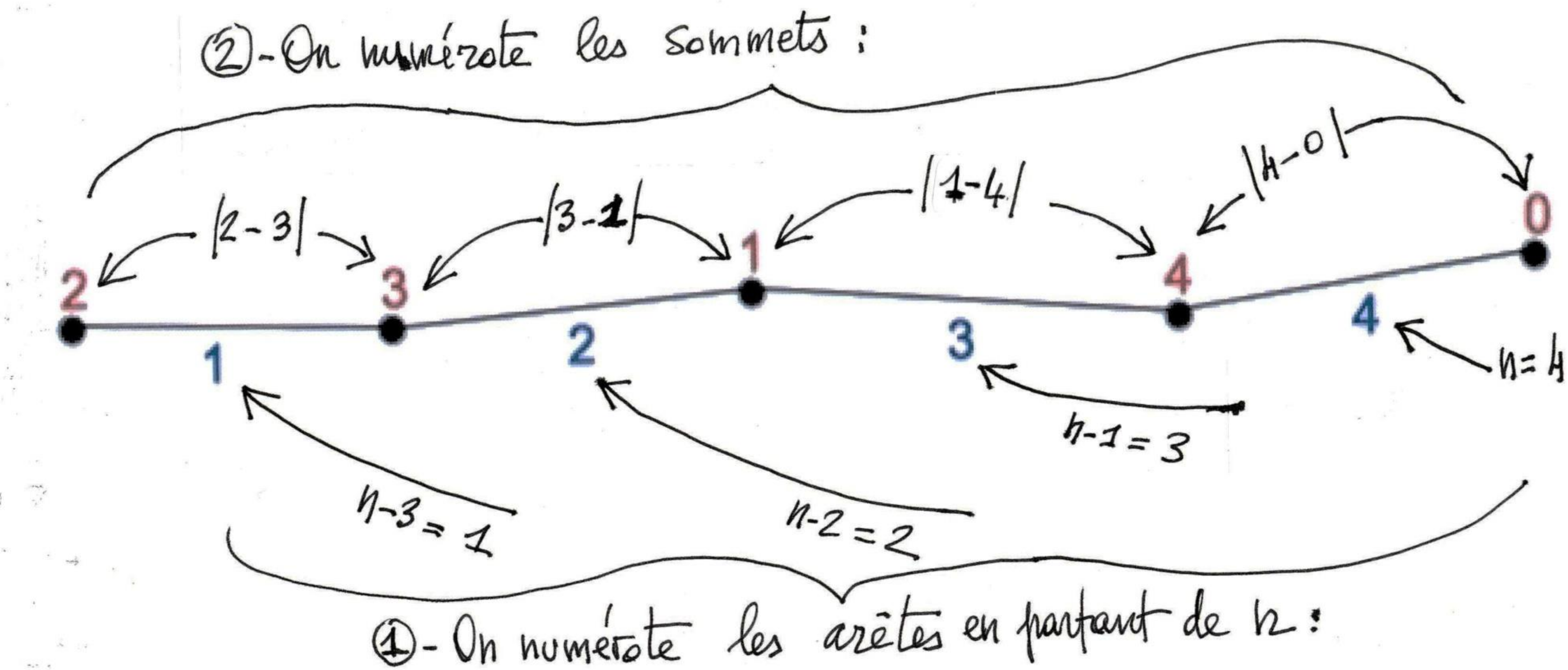
✓ **TOUS les CHEMINS sont GRACIEUX !**

4-1-1) Numéroter Gracieusement un Chemin : Première Façon

• Pour <u>numéroter gracieusement un chemin</u> de **n** arêtes :

i) on numérote toutes les <u>arêtes</u> *successivement* de **n** à **1**, en partant de l'une des extrémités,

ii) on numérote les <u>sommets</u> en partant de l'arête **n** :



- Mais on peut aussi placer parfois l’arête **n** ailleurs qu’à l’extrémité du chemin.
- <u>Question</u> : Ces quelques chemins (à compléter) peuvent-ils être numérotés gracieusement ?

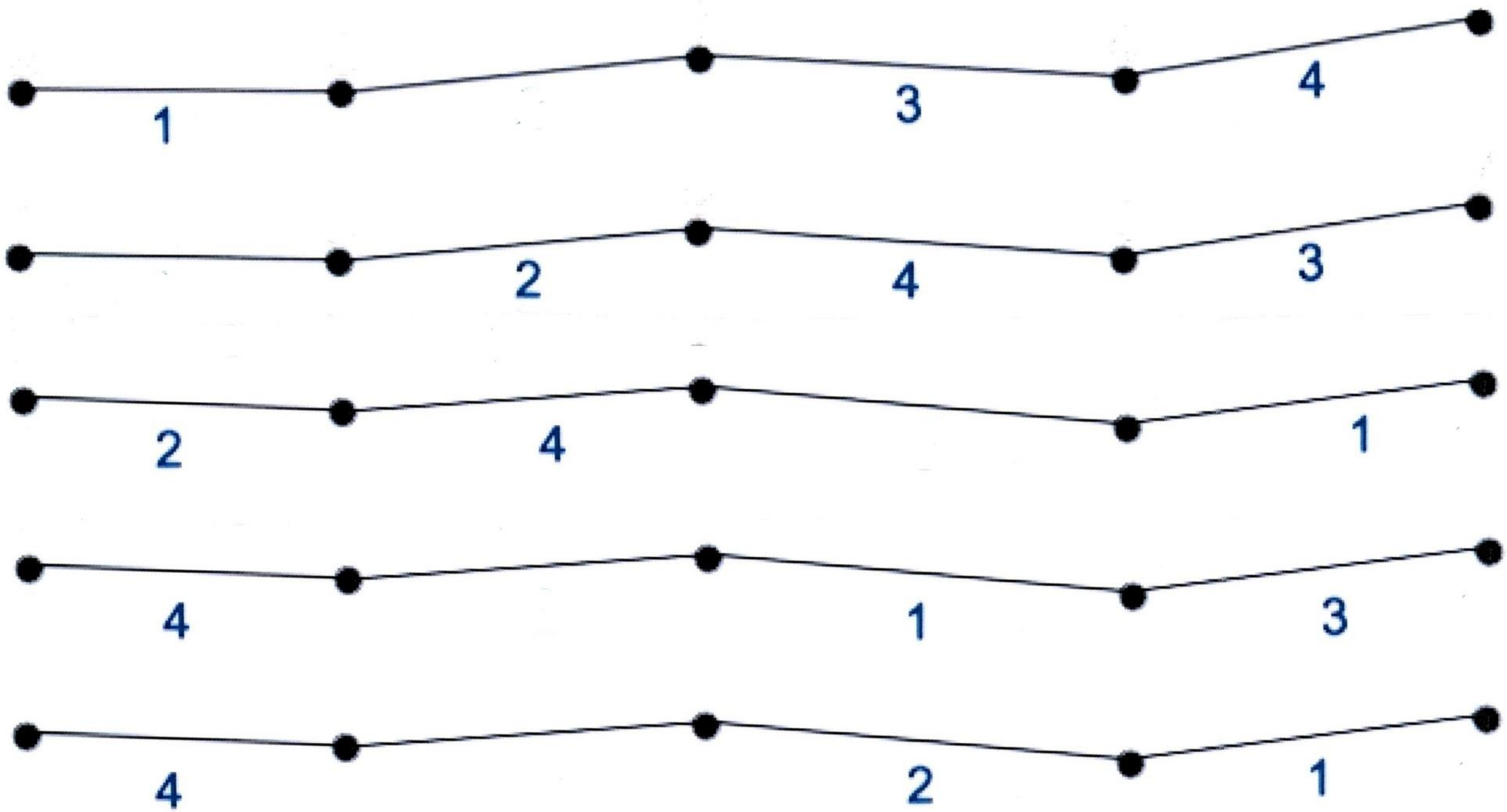
1

2

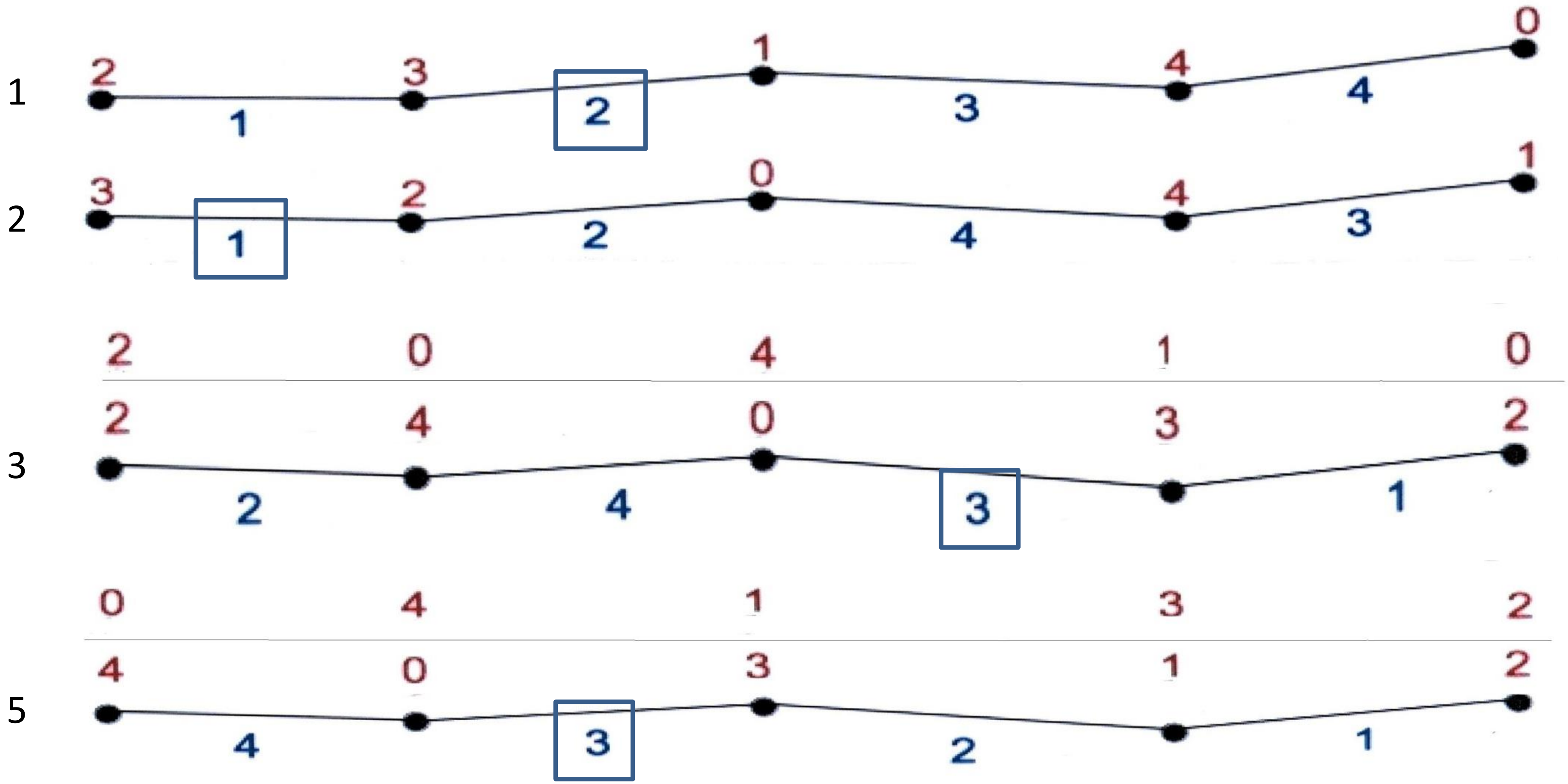
3

4

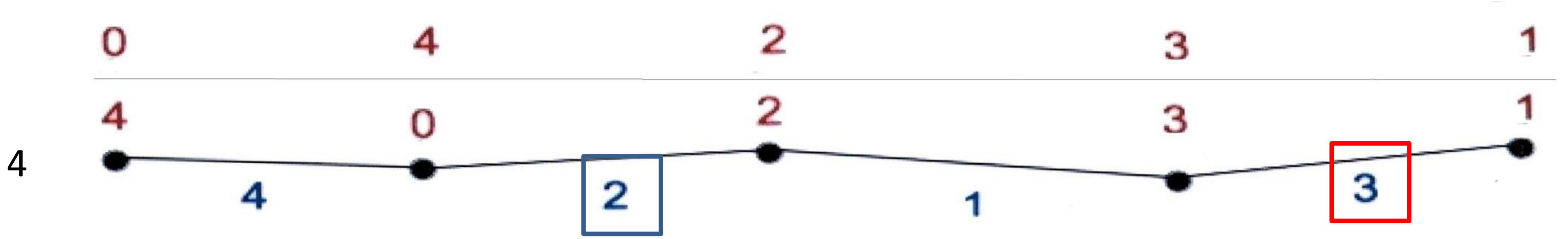
5



- Les chemins suivants sont gracieux :



- Mais les chemins suivants ne le sont pas :



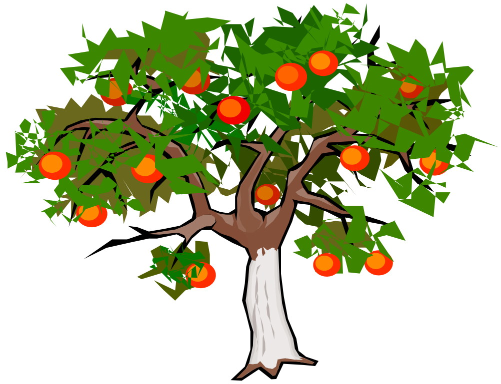
4-1-2) Numéroter Gracieusement un Chemin : Deuxième Façon

- Voici un autre mode de numérotation gracieuse, ici d'un chemin d'ordre **n=9** :

  i) on numérote par **1** le premier des n <u>sommets</u>, par **n** le deuxième, par **2** le troisième, par **n-1** le quatrième, et ainsi de suite ;

  ii) on numérote les <u>arêtes</u> en calculant la différence **d(i) =** $|s_d - s_f|$:

$i \in \{1,\dots,n\}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(i)$	1	9=n	2	8=n-1	3	7=n-2	4	6=n-3	5
$d(i)$	8	7	6	5	4	3	2	1	

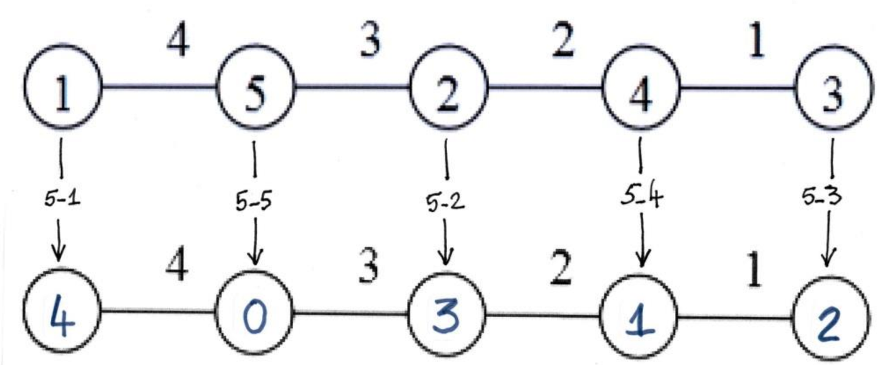


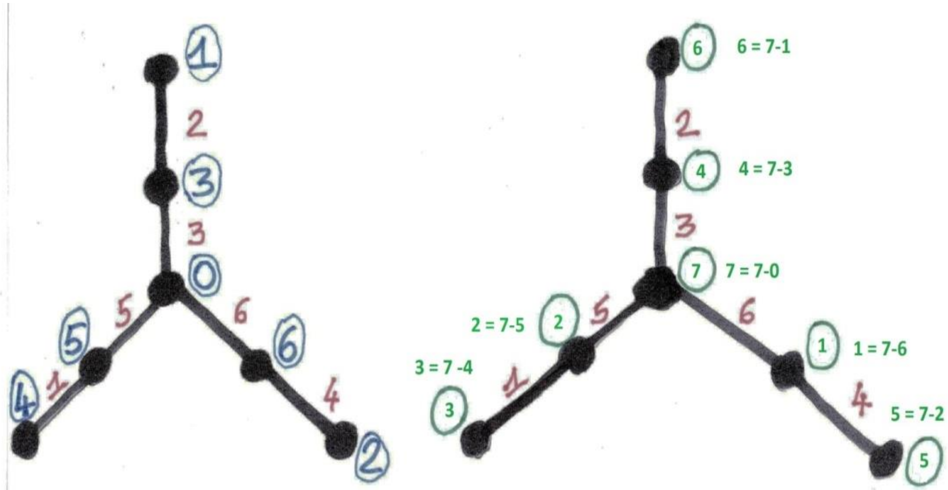
4-2) Les ARBRES

- **Aucune procédure générale n'a été établie pour numéroter gracieusement tous les arbres !**
- Seuls des résultats partiels ont été obtenus !

4-2-1) La numérotation gracieuse des arbres, comme celle des chemins, n'est pas unique !

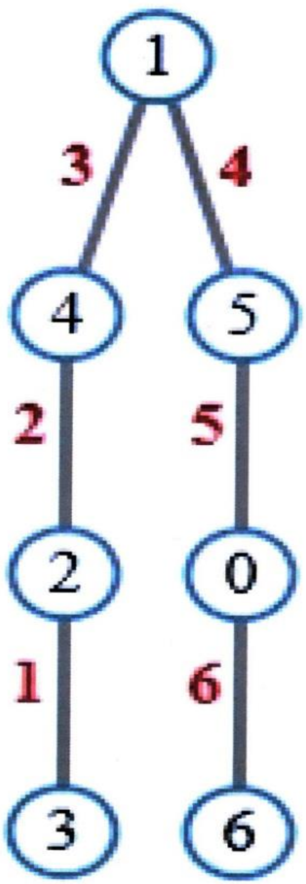
Tout chemin ou arbre gracieux a au moins 2 numérotations gracieuses. Soit un chemin ou un arbre gracieux de $n \geq 2$ sommets. On obtient une numérotation gracieuse complémentaire, si, pour chaque sommet s, on remplace s par $n - s$, en laissant inchangée la numérotation des arêtes.



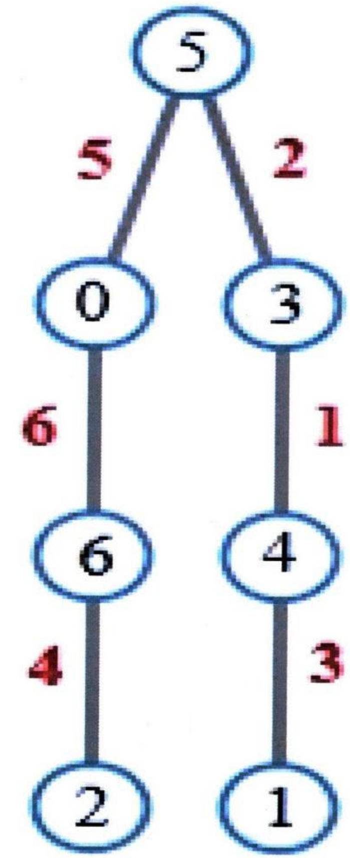


- Dans la numérotation suivante, ce sont les numéros d’arête qui sont d’abord modifiés par *permutation*, puis les numéros de sommet :

> D’un chemin ou d’un arbre gracieux de plus d’une arête, on peut obtenir un autre chemin ou arbre gracieux en renumérotant les sommets à partir d’une *permutation* des numéros d’arête.

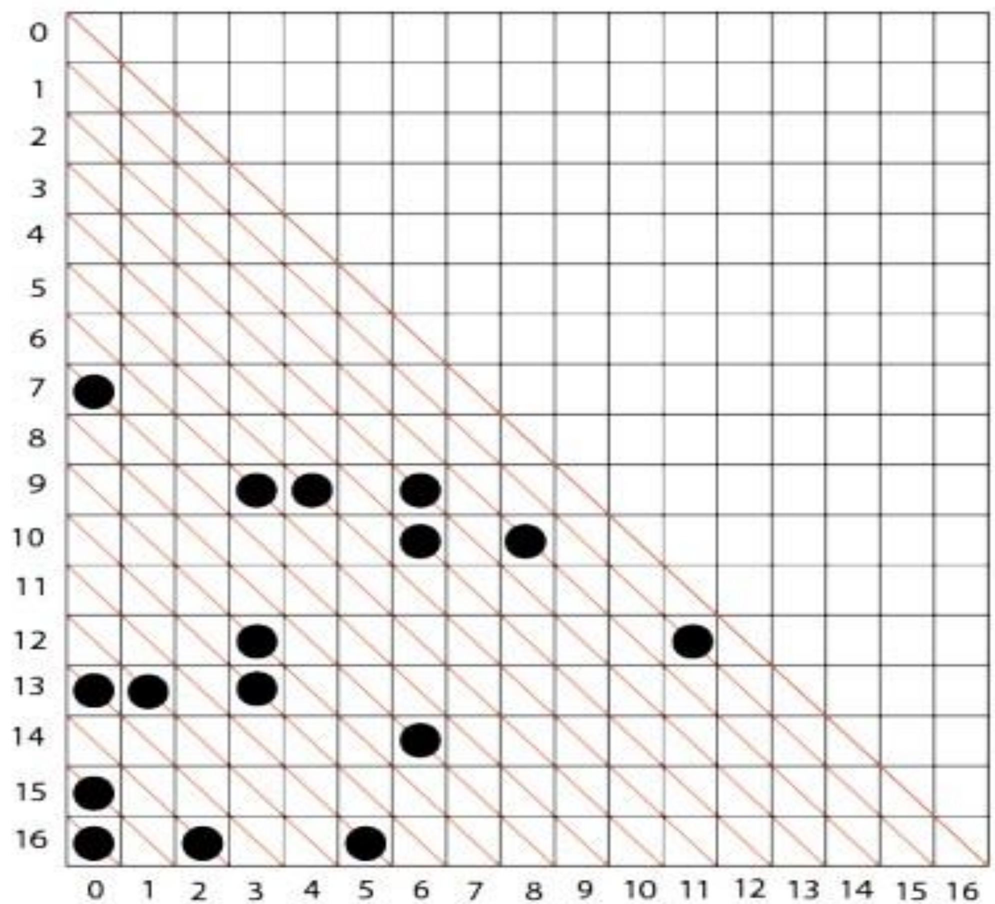


	NUMEROTATIONS GRACIEUSES												
1	3	1	2	2	4	3	1	4	5	5	0	6	6
2	4	3	1	2	3	1	2	4	6	6	0	5	5
3	3	3	6	6	0	5	5	4	1	1	2	2	4
4	2	4	6	6	0	5	5	2	3	1	4	3	1
5	2	4	6	6	0	5	5	1	4	2	1	2	3
6	3	2	5	5	0	6	6	4	2	1	1	3	4
7	1	4	5	5	0	6	6	3	3	1	2	2	4
8	1	4	5	5	0	6	6	3	3	1	4	2	2

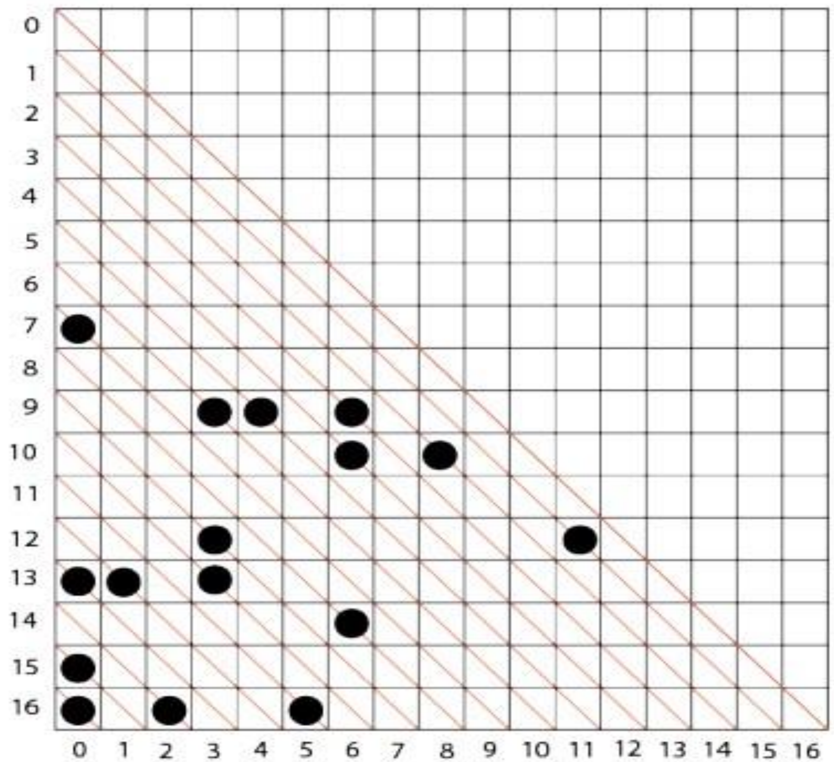


4-2-2) Matrice d'adjacence d'un arbre gracieux

- Un arbre gracieux a une matrice d'adjacence particulière, dite **gracieuse** :
  - sa diagonale principale est vide,
  - il y a un seul et unique point sur chacune des lignes diagonales du triangle inférieur.



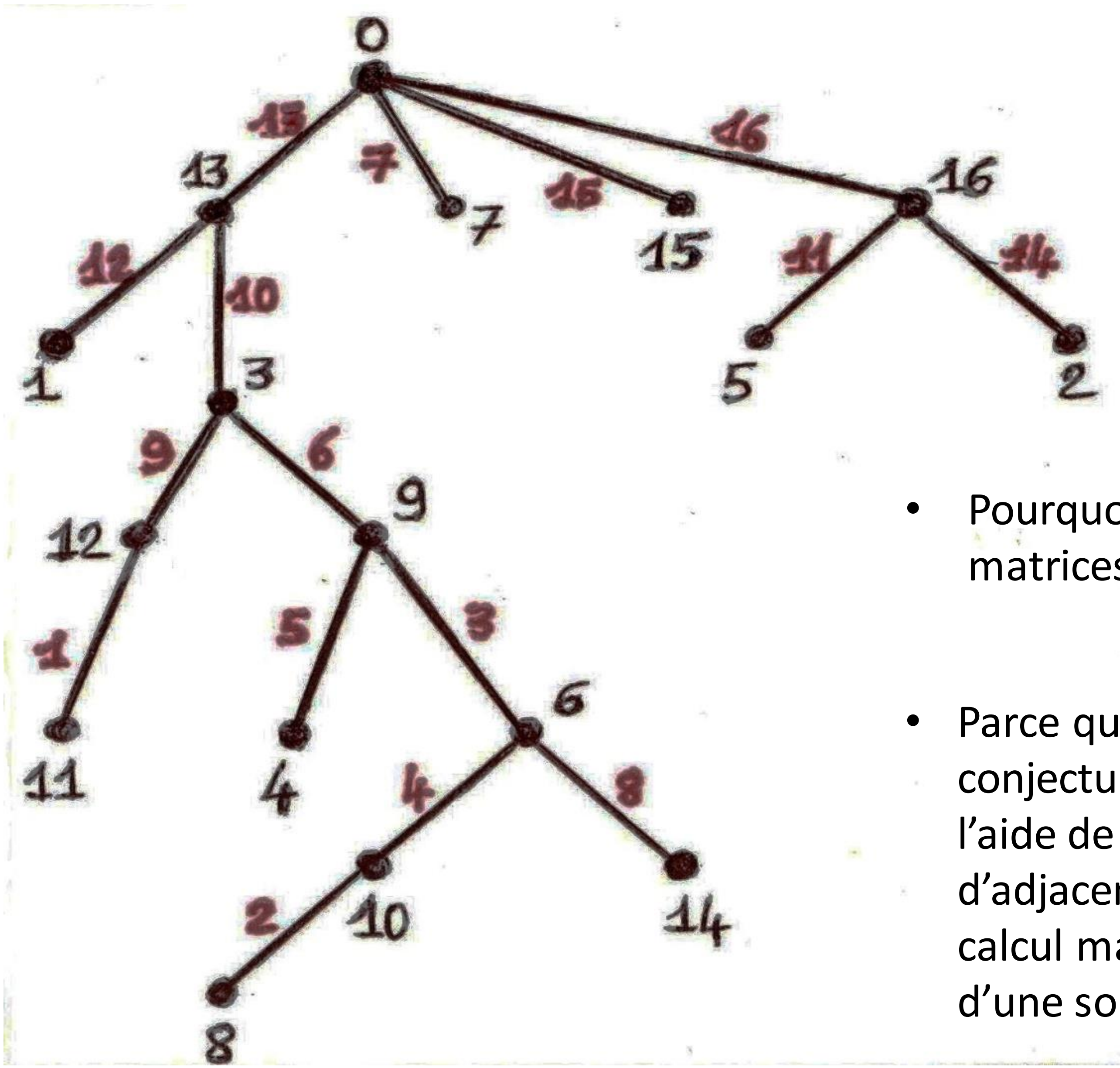
- Petit exercice : à partir de la matrice d'adjacence gracieuse ci-dessous, tracez un arbre correspondant et vérifiez qu'il est effectivement gracieux :



- Sur la matrice d'adjacence gracieuse, on lit les couples correspondant aux arêtes de l'arbre qu'on veut tracer :

(0,7), (0,13), (0,15), (0,16), (1,13), (2,16), (3,9), (3,12), (3,13), (4,9), (5,16), (6,9), (6,10), (6,14), (8,10) et (11,12).

- On obtient par exemple l’arbre gracieux suivant :

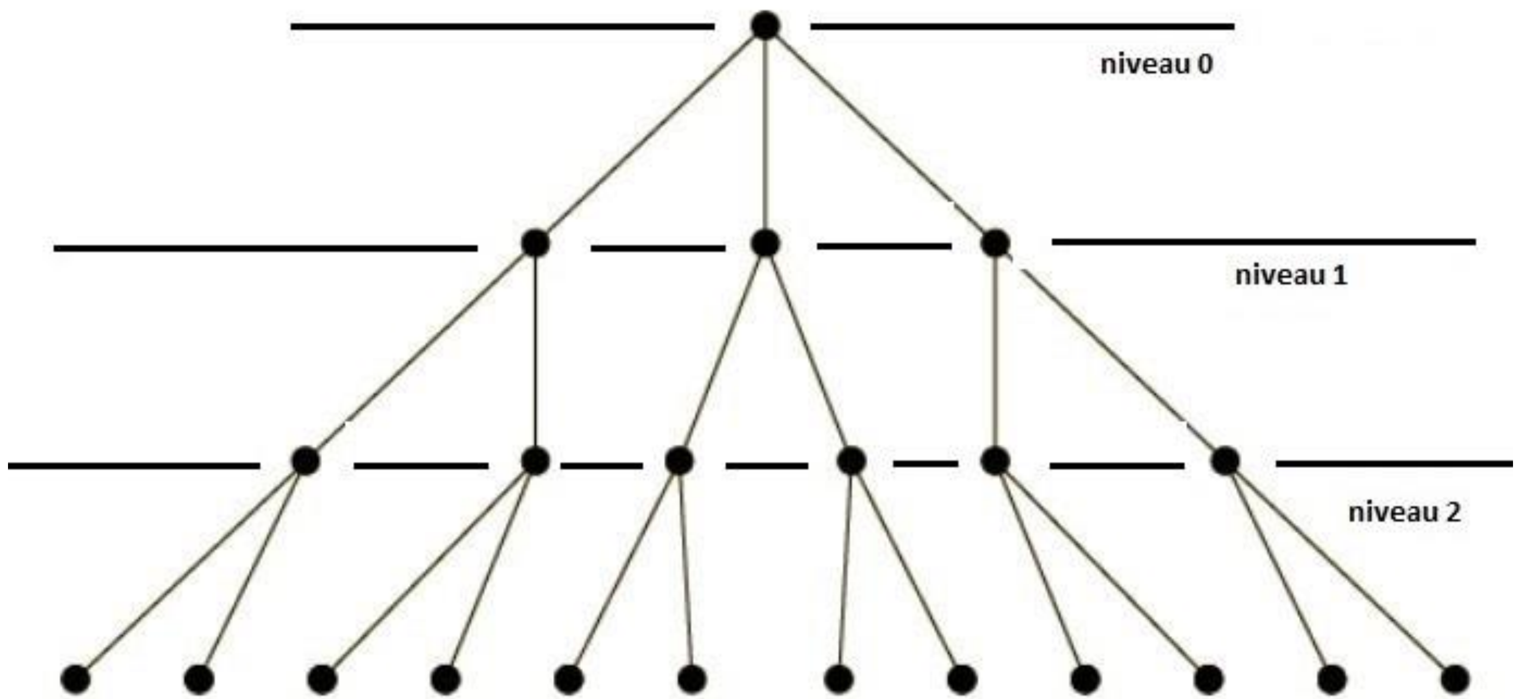


- Pourquoi s’intéresser aux matrices d’adjacence gracieuses ?

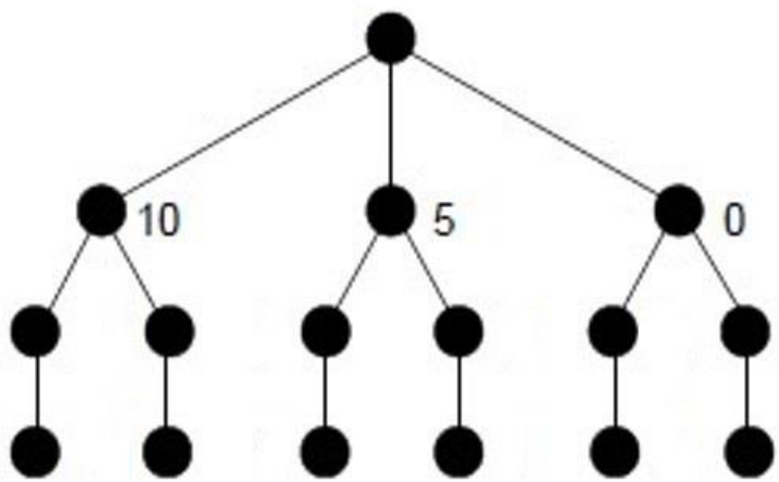
- Parce qu’on peut reformuler la conjecture des arbres gracieux à l’aide de la notion de matrice d’adjacence, afin d’utiliser le calcul matriciel dans la recherche d’une solution à la conjecture.

4-2-3) *Construire* un arbre gracieux symétrique

- Un **arbre symétrique** est un arbre *enraciné* dans lequel chaque *niveau* contient des sommets ayant même *degré* (= même nombre d'arêtes reliées).

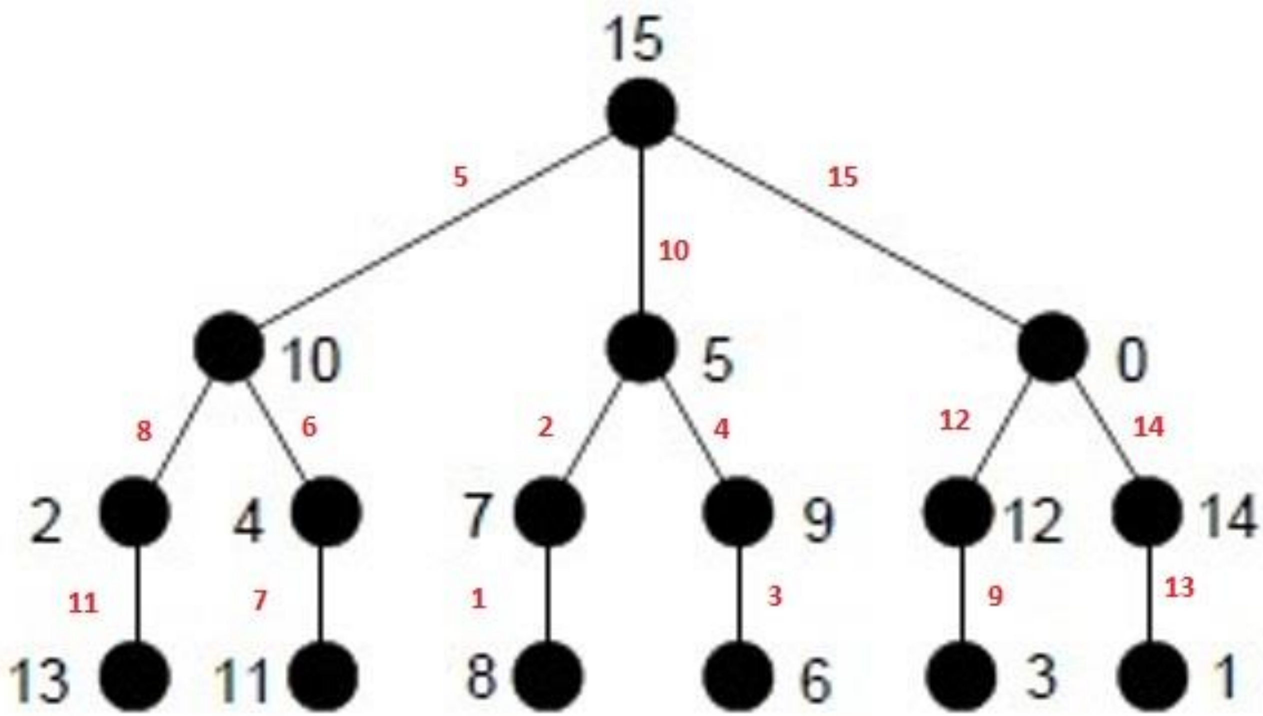


Petit exercice : à l'aide de la matrice d'adjacence présentée, compléter la numérotation gracieuse de l'arbre ci-dessous :



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0																1
1															1	
2											1					
3													1			
4											1					
5																1
6										1						
7						1										
8								1								
9						1										
10																1
11					1											
12	1															
13			1													
14	1															
15																

- On obtient l'arbre symétrique gracieux ci-dessous :

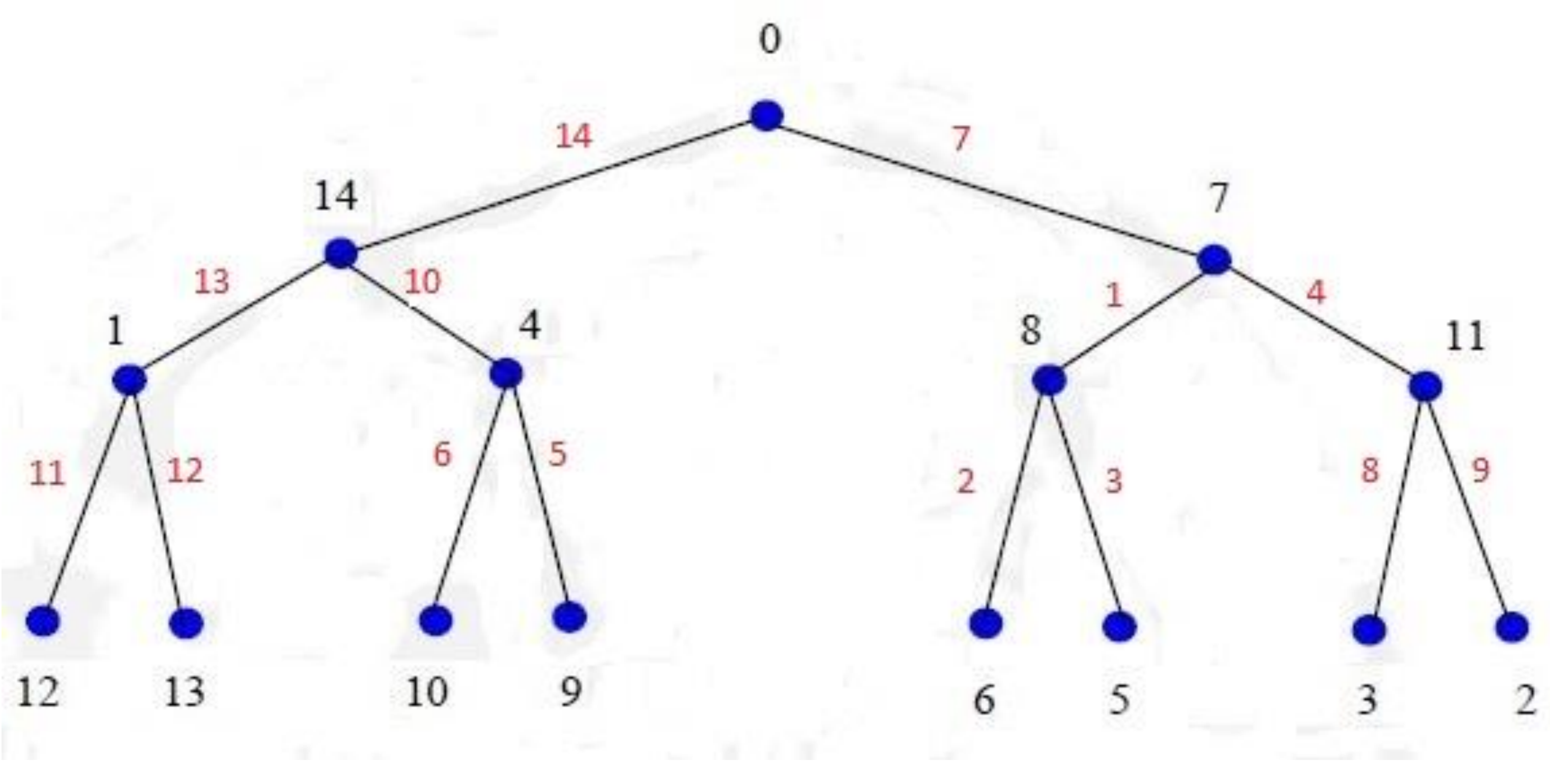


On a pu démontrer que :

✓ **TOUS les ARBRES SYMETRIQUES sont GRACIEUX !**

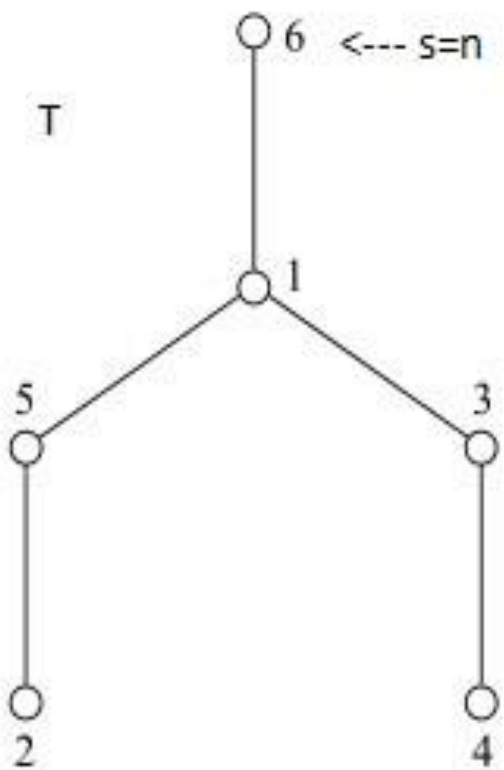
- En particulier :

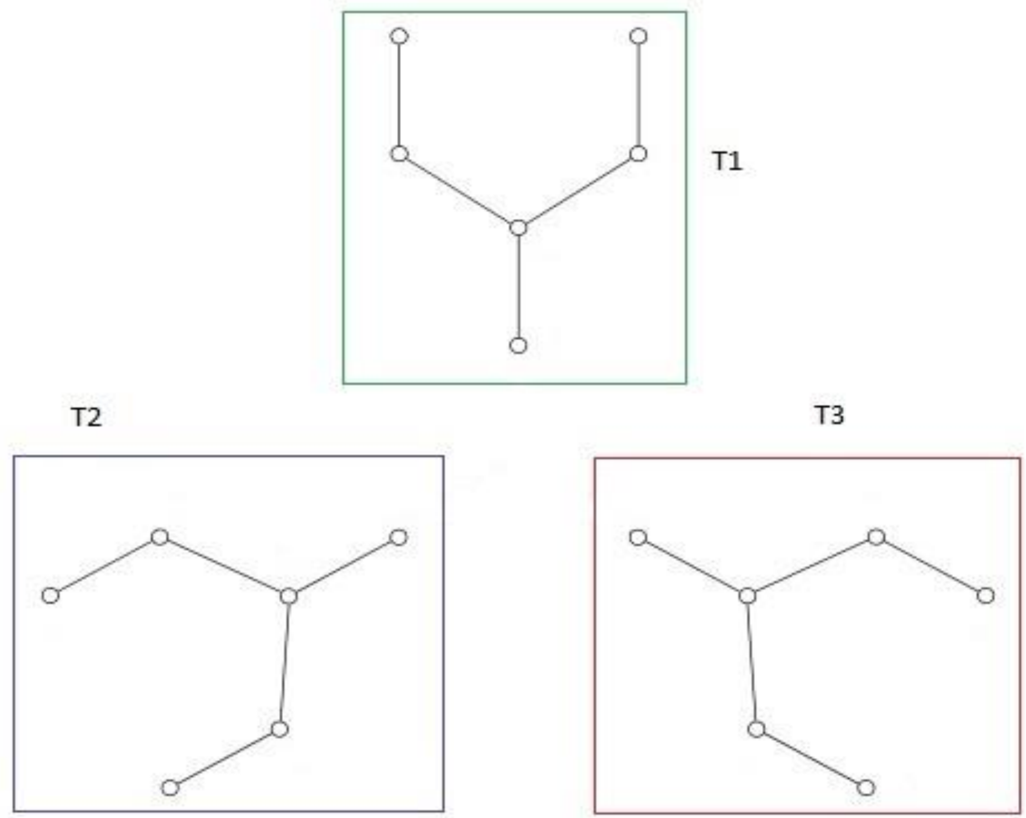
  ✓ **TOUS les ARBRES BINAIRES sont GRACIEUX !**



4-2-4) Exemple de fonction de numérotation gracieuse : *Construire* un arbre gracieux par *union disjointe*

- Soit un arbre gracieux **T** d'ordre **n**, dont un sommet **s** a pour étiquette **n**. On se donne **p** arbres $\mathbf{T_1, T_2, \ldots, T_p}$, tous isomorphes à T.

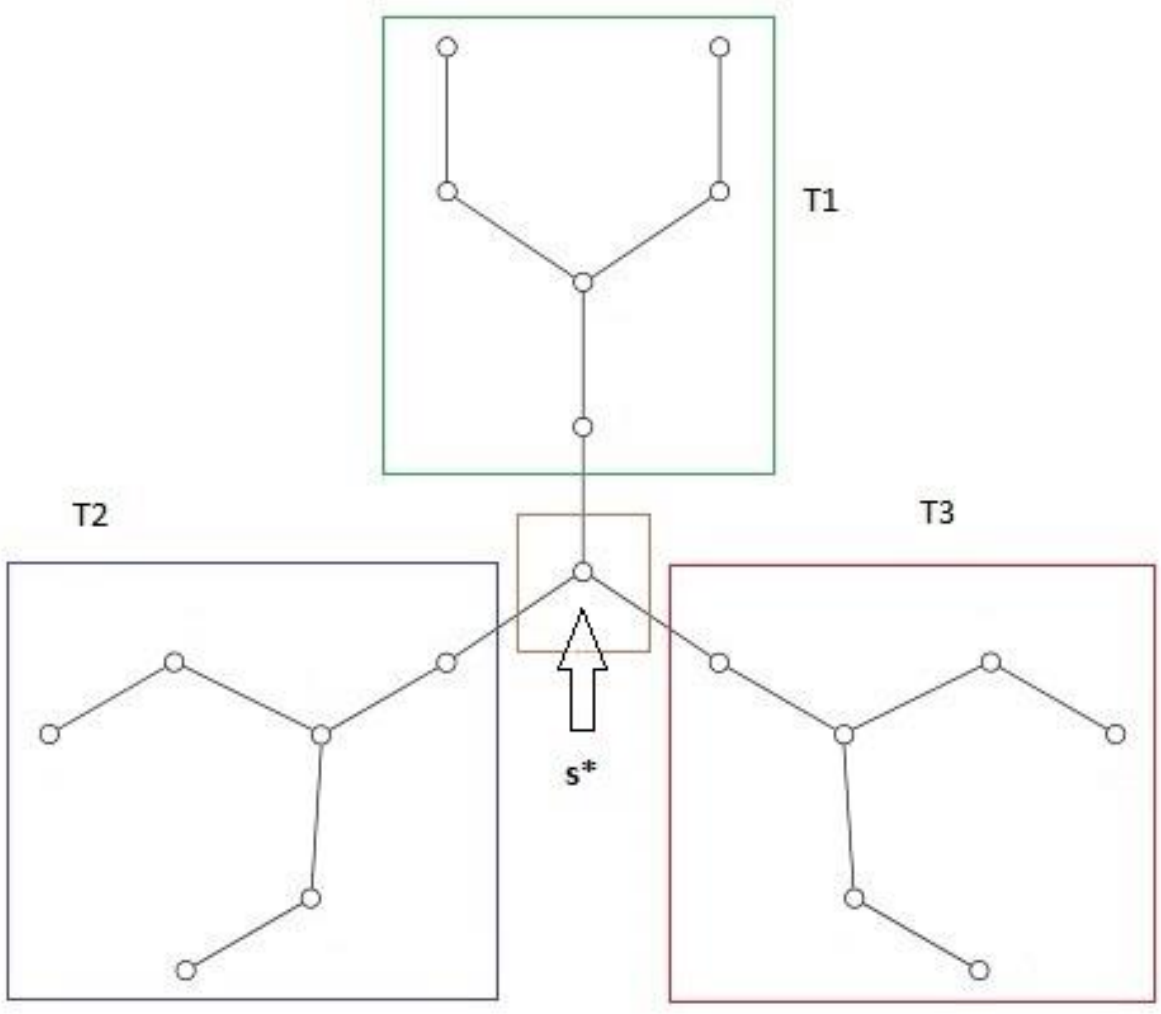




- Ici, l'arbre gracieux **T** d'ordre **n=6**, dont un sommet **s** a pour étiquette **n=6**, a pour copies isomorphes les **p=3** arbres $\mathbf{T_1, T_2, T_3}$.

- On ajoute :
  - un sommet **s***,
  - p=3 arêtes (s_i,s*),

qui permettent de construire l'arbre ci-dessous T_{ps} :



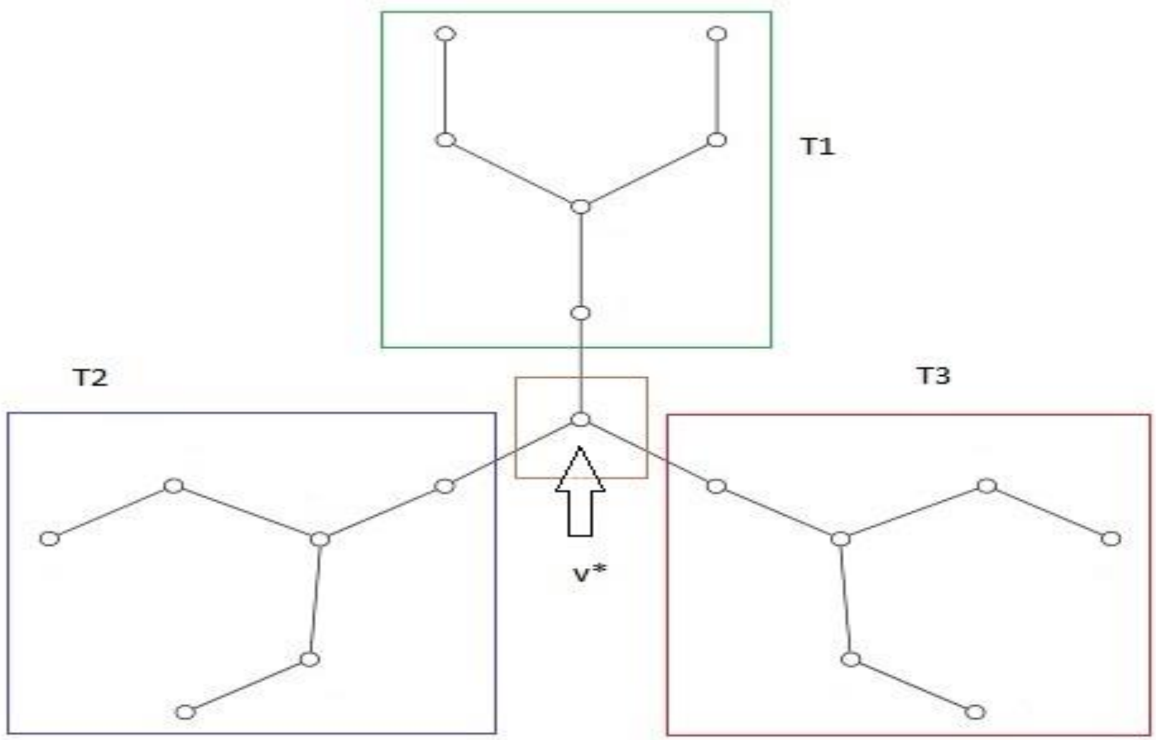
- Pour rendre gracieux l'arbre T_{ps} , on définit une fonction de numérotation **f*** :

(1) $f^*(s^*)=pn+1$,

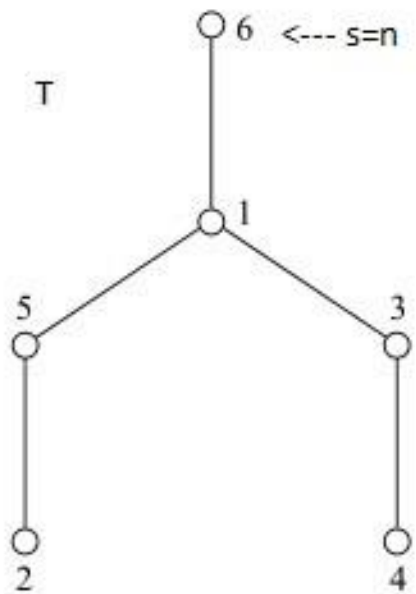
(2) Pour chaque T_i, $i=1,\ldots,p$, on pose :

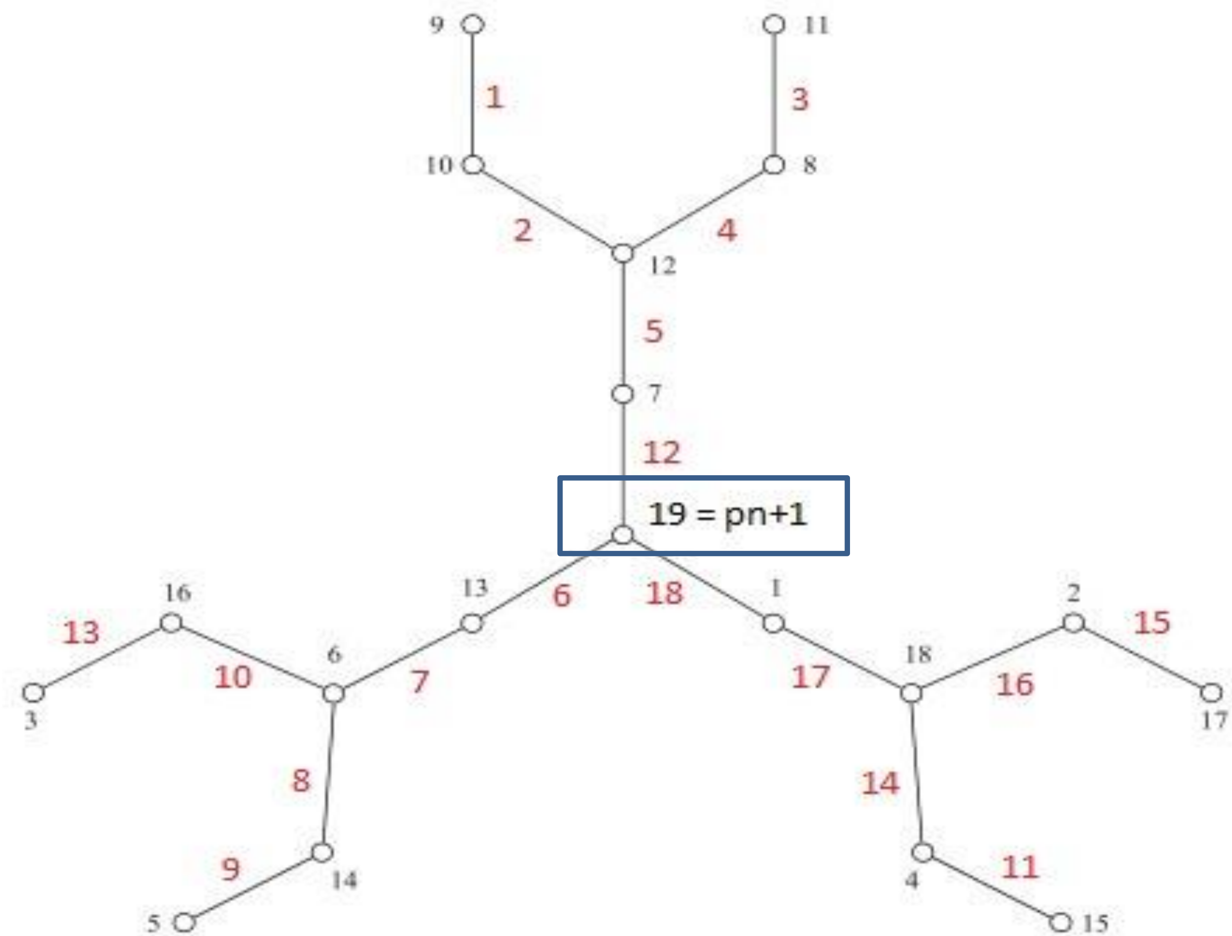
$f^*(w)=i.n+1-f(w)$, si $d(w)$ est *pair* dans T,

$f^*(w)=(p+1-i)n+1-f(w)$, si $d(w)$ est *impair* dans T



- En appliquant cette fonction, on obtient l’arbre gracieux suivant :

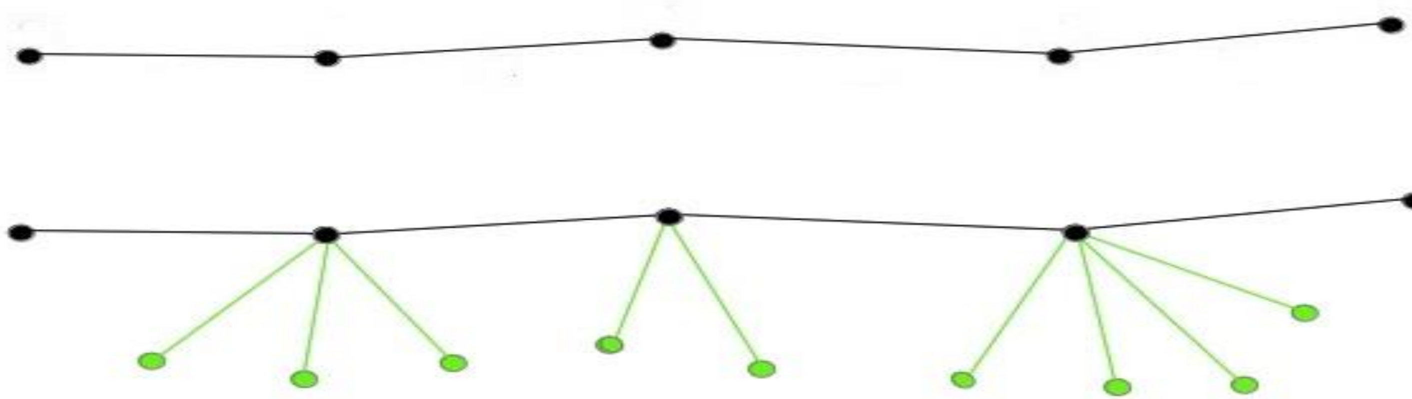




- Conclusion : on peut engendrer un arbre gracieux à partir d’un autre arbre gracieux plus petit par union disjointe de copies isomorphes.

4-3) Les CHENILLES

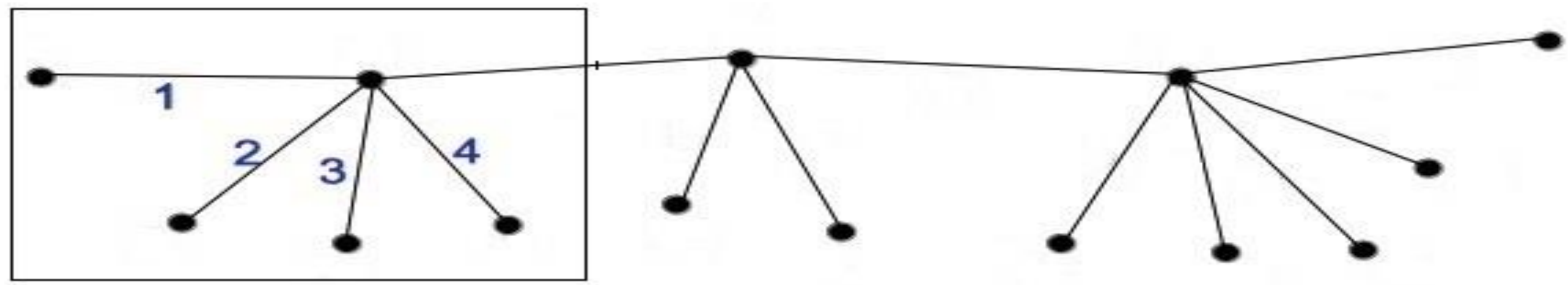
- Une **chenille** est un arbre obtenu à partir d'un *chemin* aux sommets duquel on a rajouté quelques *brindilles*.



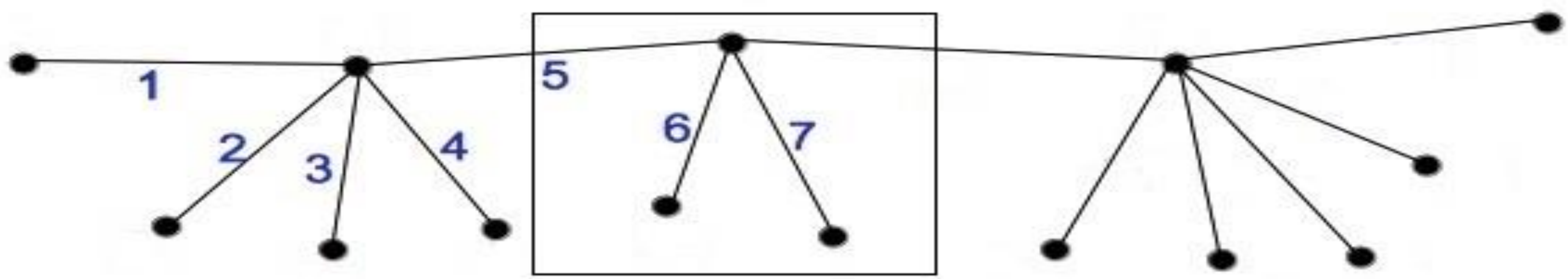
4-3-1) Comment Numéroter Gracieusement une Chenille

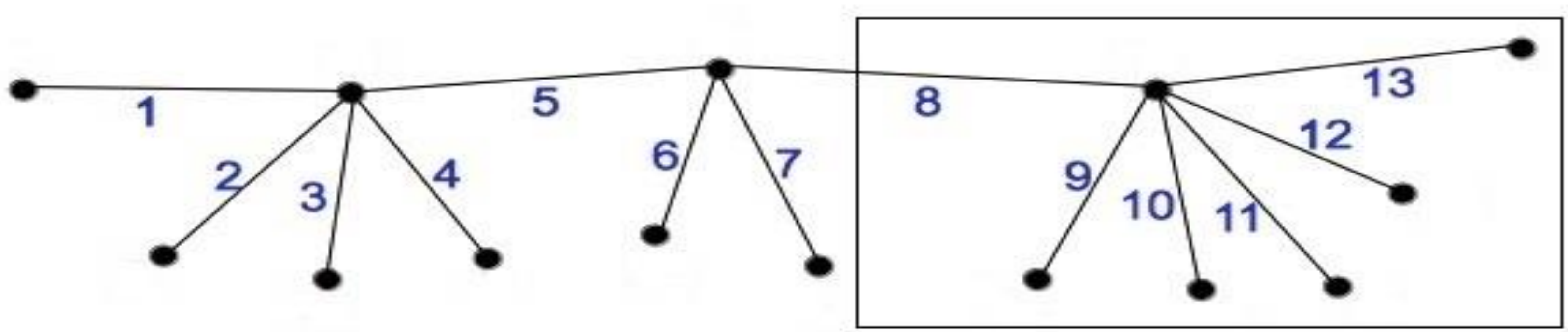
- Pour <u>numéroter gracieusement une chenille</u> de **n** arêtes, on procède en deux étapes :
  i) on numérote les <u>arêtes</u> en partant de **n** et en commençant par la <u>1ère arête</u> du chemin principal ; si un sommet de ce chemin possède des *brindilles*, on les numérote avant de passer au sommet suivant du chemin principal ;

- On numérote par **1** la <u>1ère arête</u>, puis de **2** à **4** les <u>brindilles</u> partant du 2ème sommet :



- On poursuit la numérotation des <u>arêtes restantes</u> :





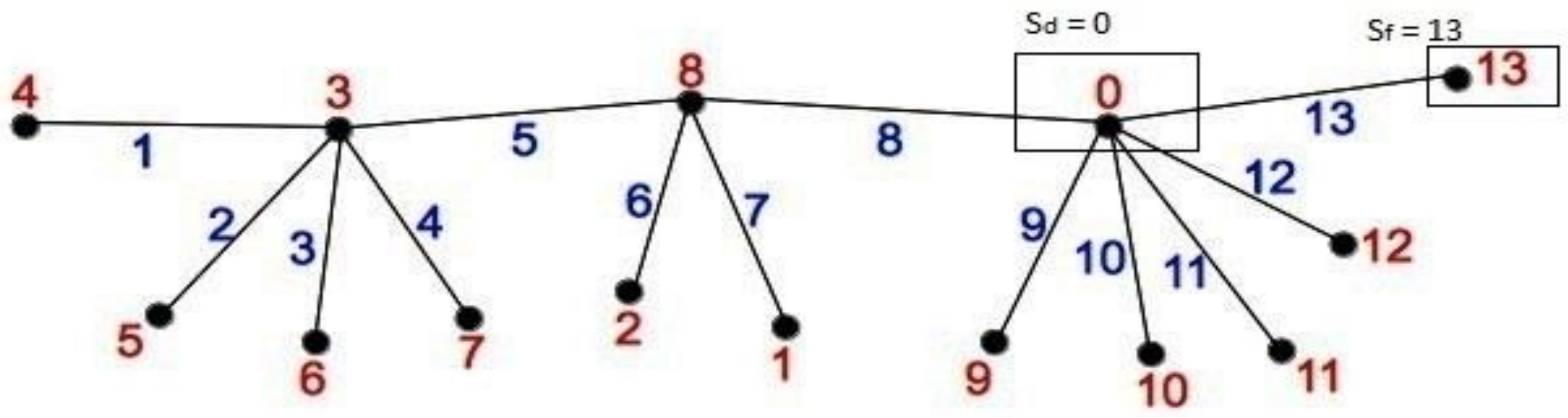
ii) On numérote les <u>sommets</u>, d'après la définition de la numérotation gracieuse, en partant du sommet $\mathbf{s_f}$ tel que $\mathbf{d_{max}=|s_d-s_f|}$ soit maximum.

Ici, on a : $\mathbf{d_{max}=|s_d-s_f|=13}$; on en déduit le choix des sommets ayant les numéros $\mathbf{s_d}=\mathbf{0}$ et $\mathbf{s_f=13}$.

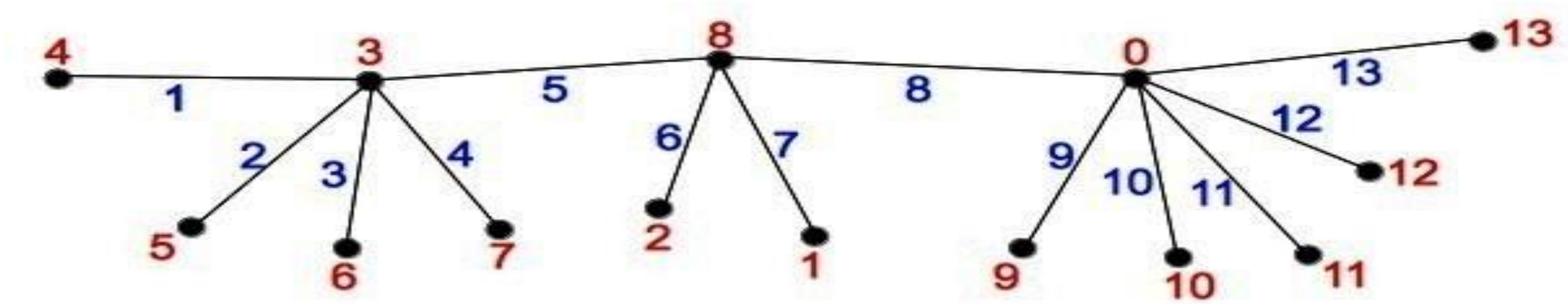
On complète de proche en proche la numérotation gracieuse des sommets :

12=|0-12|, 11=|0-11|, 10=|0-10|, 9=|0-9, |, 8=|0-8|, 1=|8-7| …

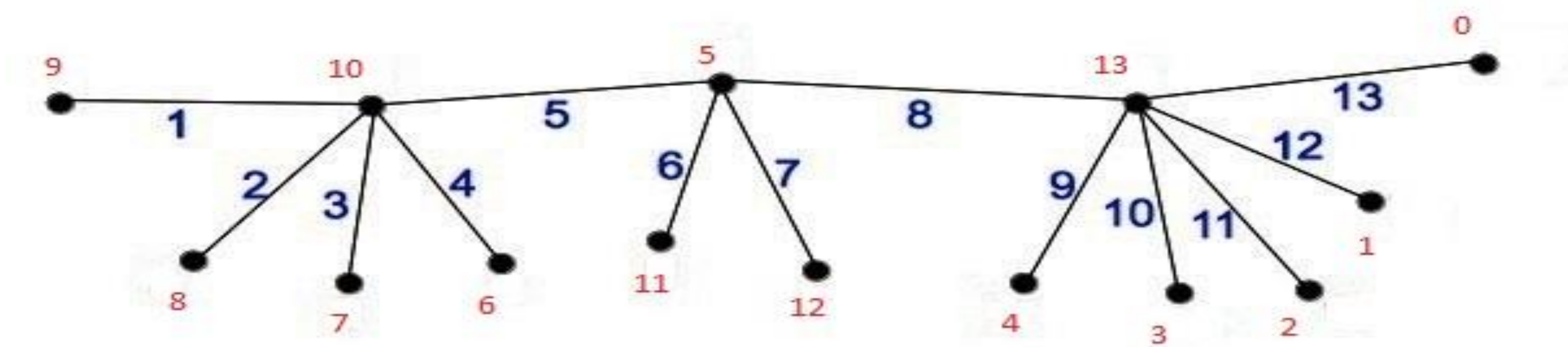
et ainsi de suite :



- Comme pour les arbres simples, la numérotation gracieuse n’est pas unique. A partir d’une certaine numérotation gracieuse :



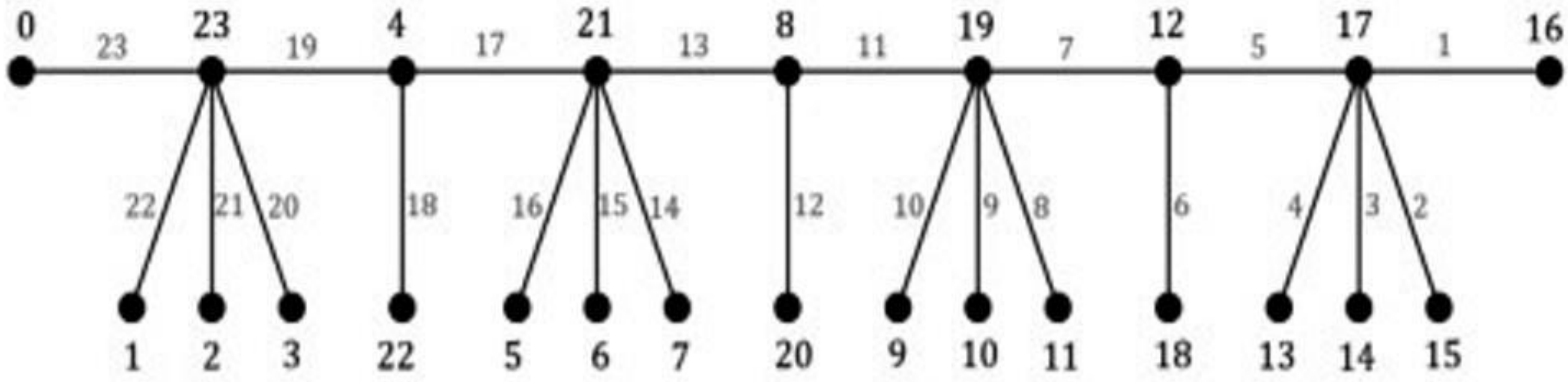
- On obtient la *complémentaire*, gracieuse elle aussi, où **s’=n-s** :



4-3-2) On a pu démontrer que :

✓ **TOUTES les CHENILLES sont GRACIEUSES !**

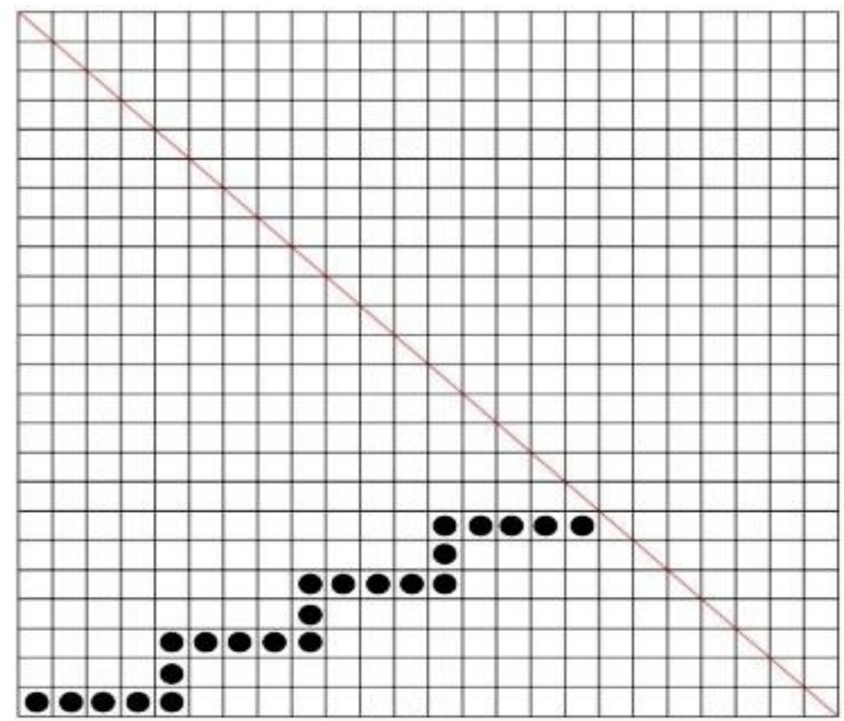
4-3-3) Matrice d'une Chenille



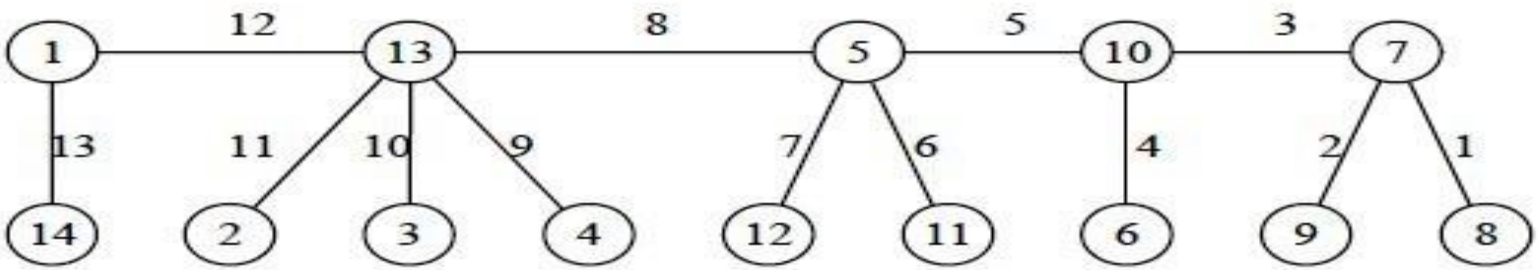
- Une chenille a une <u>matrice d'adjacence</u> particulière :

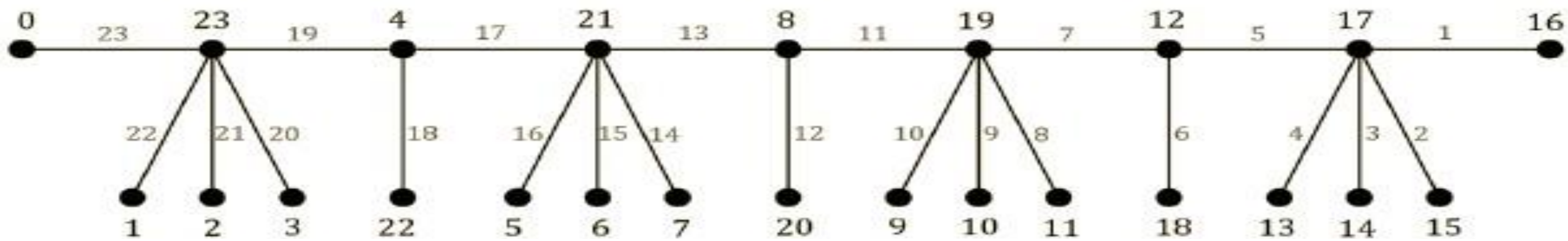
  - la diagonale principale est *vide*,

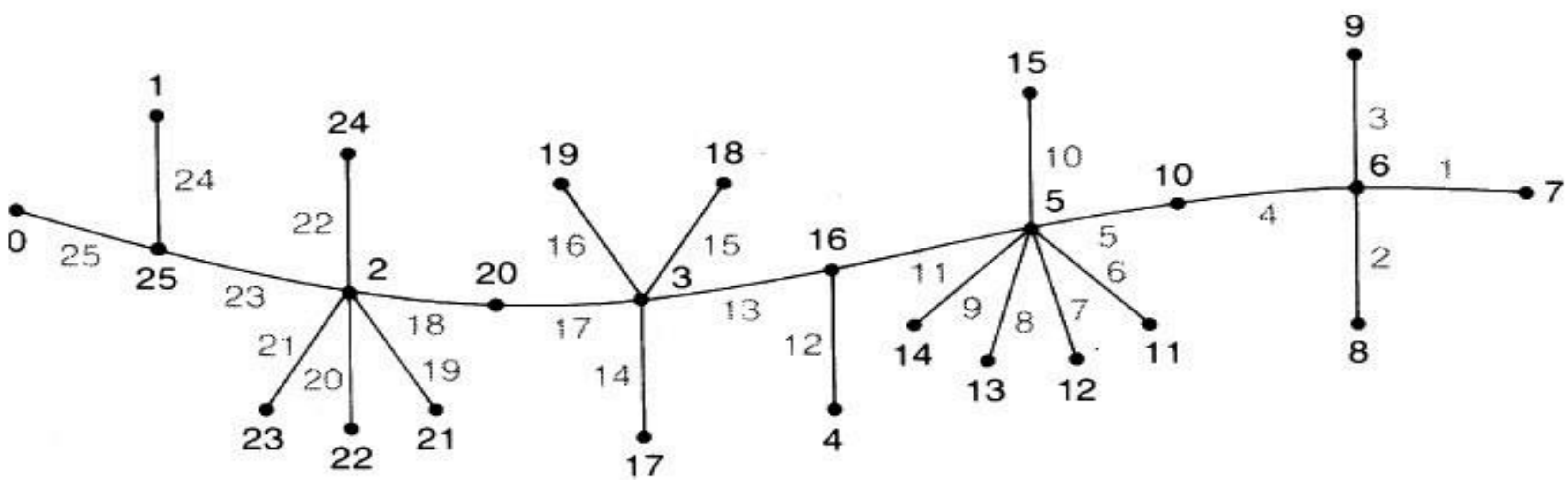
  - les ● sont tous placés dans le triangle inférieur et forment une *ligne brisée* qui change de direction à chaque sommet du *chemin principal* de la chenille : (**0**,23), (4,**23**), (**4**,21), (8,**21**), etc

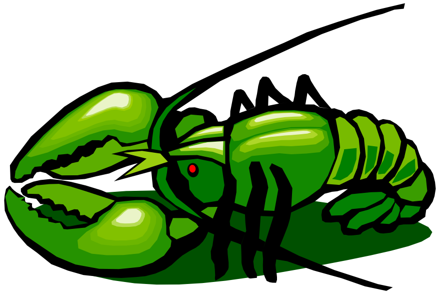


4-3-4) Quelques belles chenilles gracieuses !



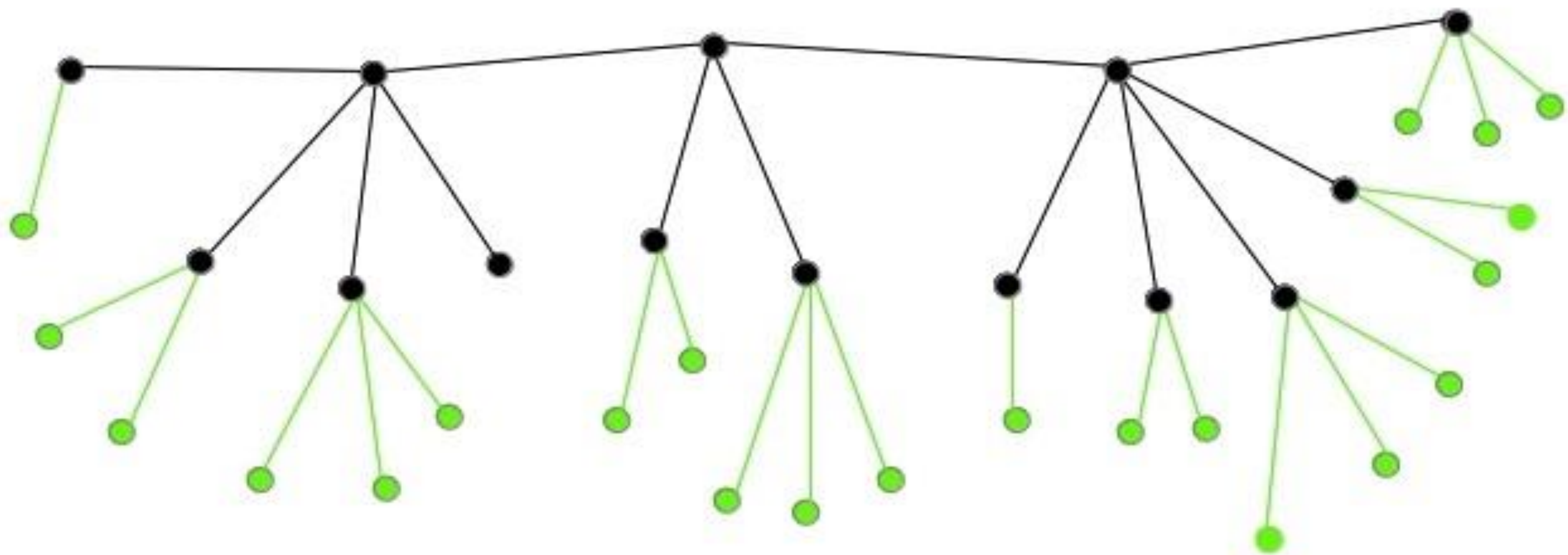






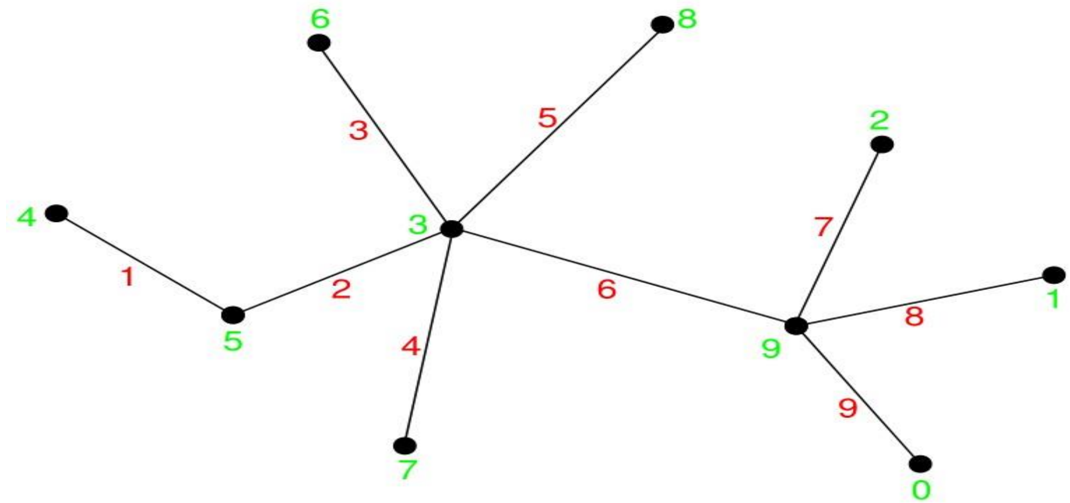
4-4) Les HOMARDS

- Un **homard** est une *chenille* à laquelle on a ‘’accroché’’ quelques *brindilles* supplémentaires à ses sommets.

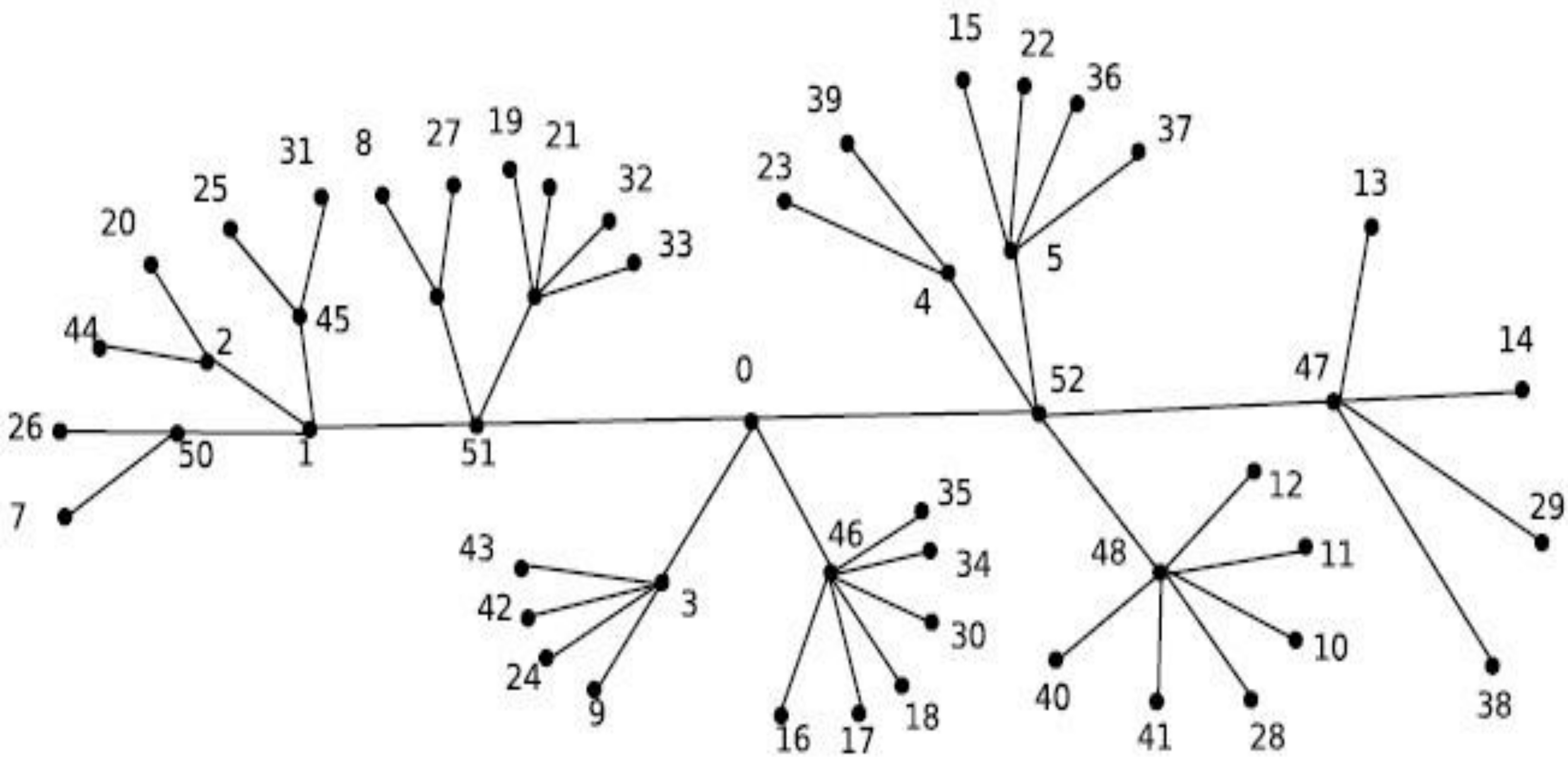


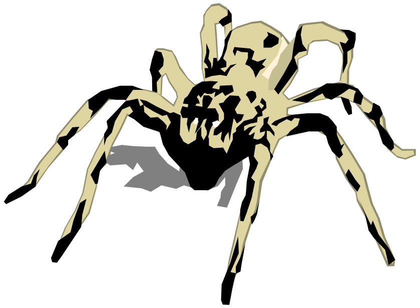
- « On ne connaît aucune méthode systématique pour numéroter gracieusement un homard, ou en démontrer abstraitement la faisabilité. » (S. Eliahou)
- On trouve quand même des homards gracieux … Par exemple :

- … d’assez simple :



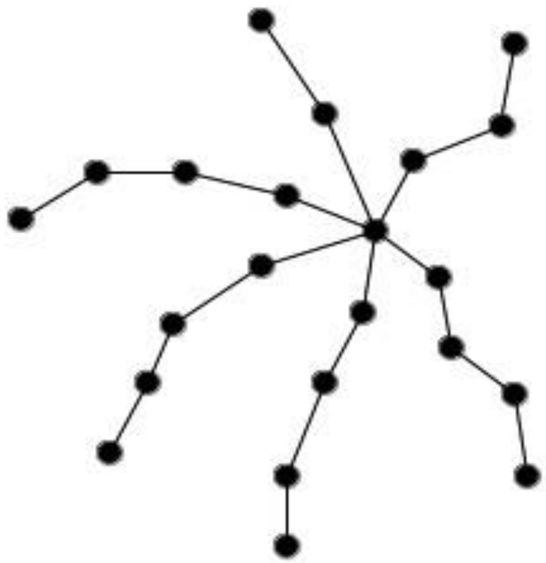
- … à plus compliqué :





4-5) Les ARAIGNEES

- Une **araignée** est un *arbre* avec un sommet d'où partent plusieurs *chemins*, ou *pattes*, de longueur variable.



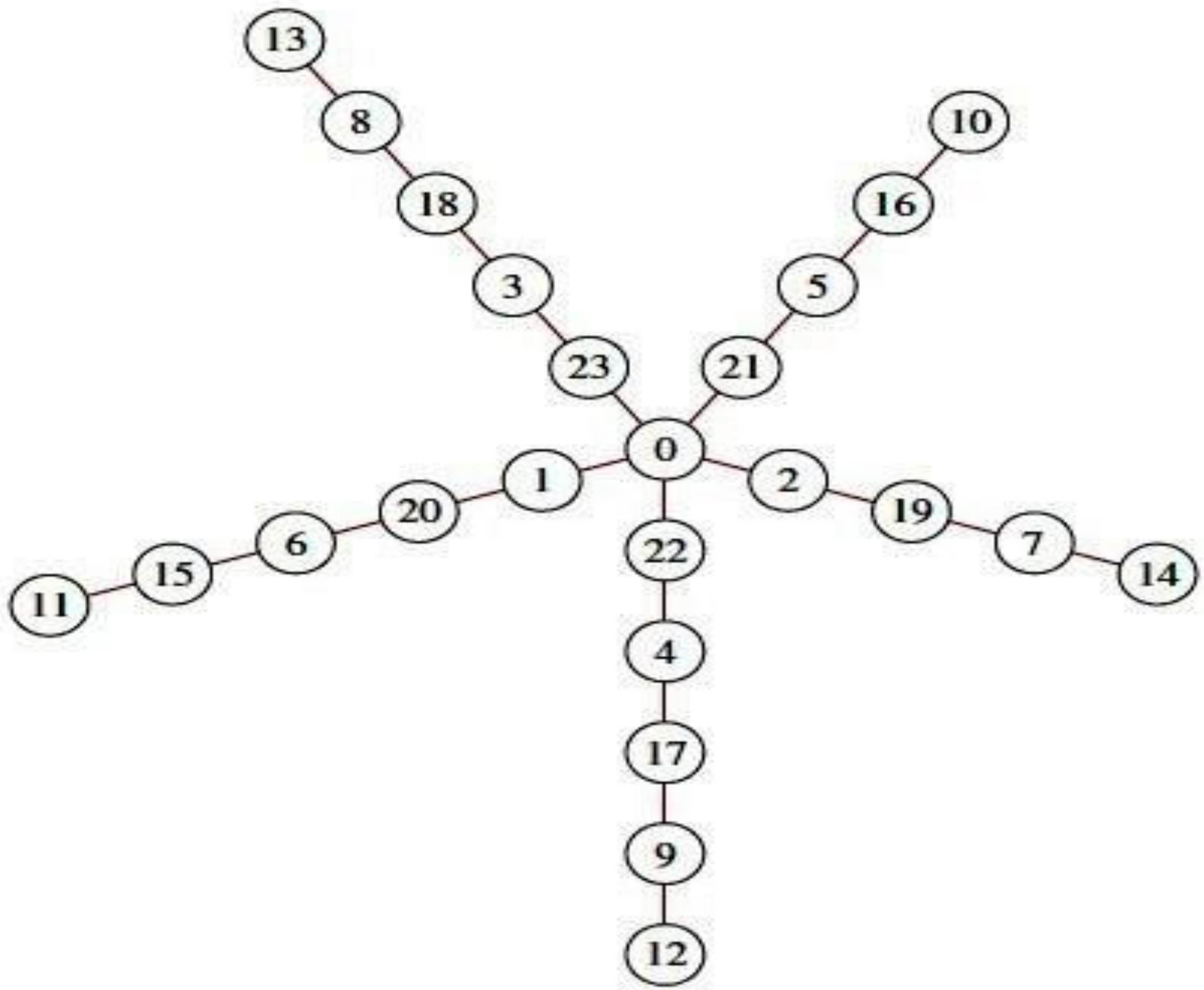
- On sait numéroter gracieusement une araignée à 3 ou 4 pattes.

  Pour celles qui ont 5 pattes et plus, on ne connaît aucune procédure générale.

- Dans certains cas, on démontre que les araignées sont gracieuses :

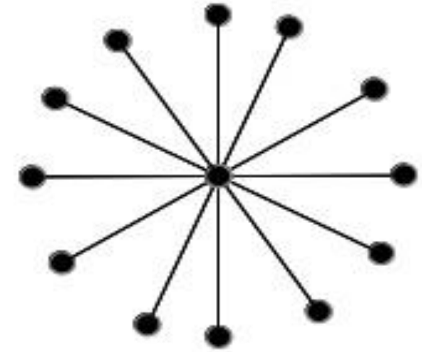
Soit A une araignée ayant L pattes, chacune d'elles de longueur $l \in \{m, m+1\}$, pour $m \geq 1$. Alors A est gracieuse.

- Un exemple d’araignée gracieuse ayant L=5 pattes de longueur m=4 ou m=5 :



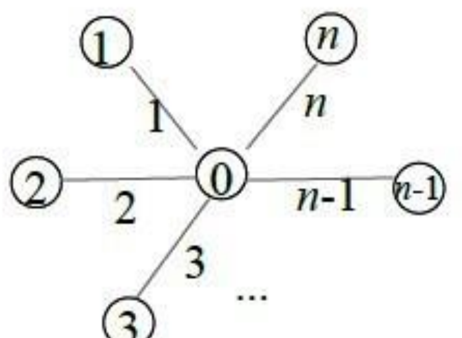
4-6) Les ETOILES

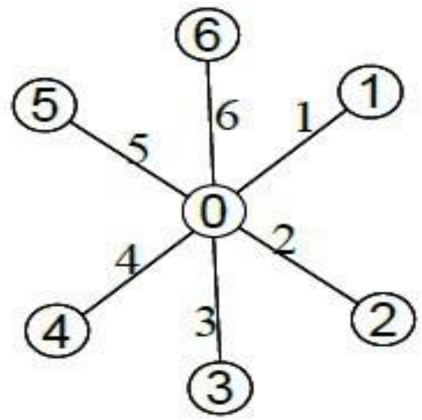
- Une **étoile** est un cas particulier d'*araignée*, celle dont toutes les *pattes* sont de longueur **1**.

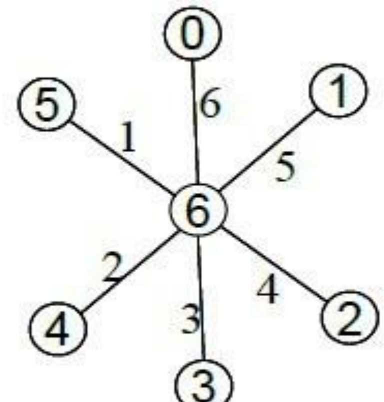


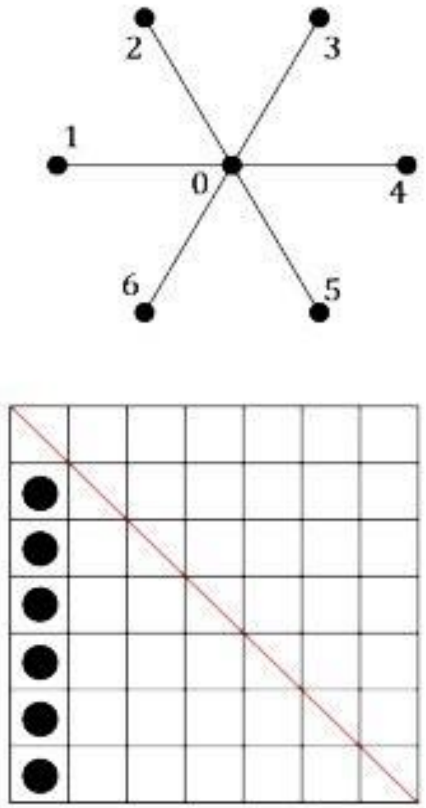
4-6-1) Comment Numéroter Gracieusement une Etoile

- On donne le numéro **0** au « centre » de l'étoile, puis on numérote de **1** à **n** les autres sommets ; chaque $\mathbf{a_k}$ arête a alors le même numéro que le sommet $\mathbf{s_k}$.
  Mais on peut aussi donner au « centre » de l'étoile le numéro **n**.





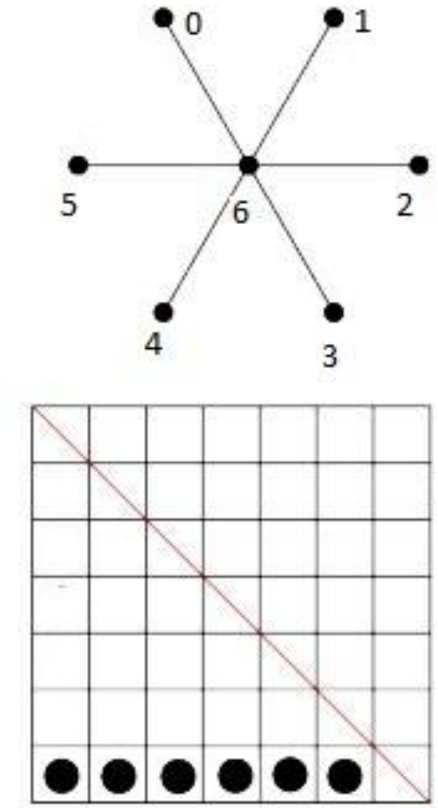




- Dans la représentation matricielle d’une étoile :

  - la 1ère colonne (ou la dernière ligne) est entièrement remplie

  - la diagonale principale est vide.

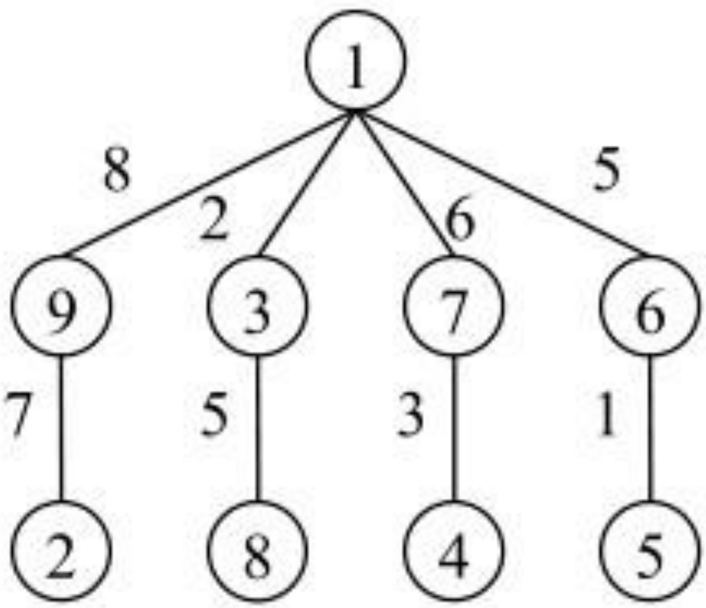


4-6-2) On a pu démontrer que :

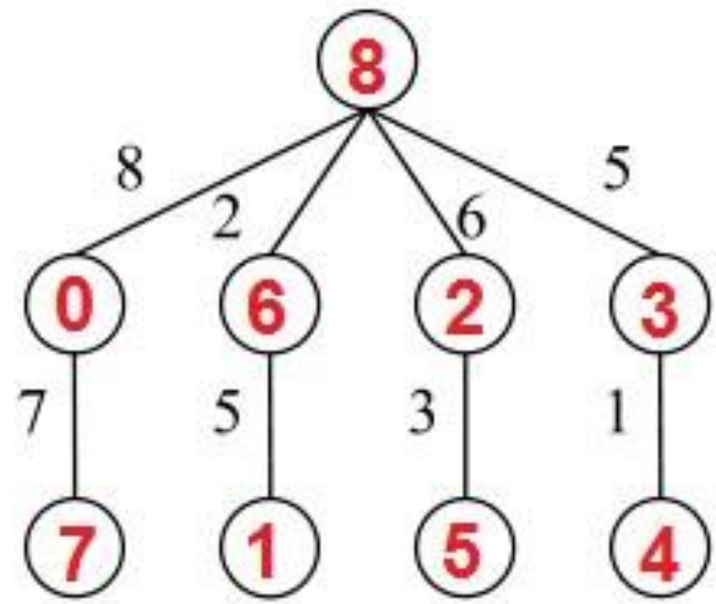
✓ **TOUTES les ETOILES sont GRACIEUSES**

4-6-3) Les k-Etoiles

- Une **k-étoile** est une *étoile* ayant un nombre quelconque de *chemins* partant du nœud central, chacun de longueur **k**.



Une k-étoile gracieuse ...



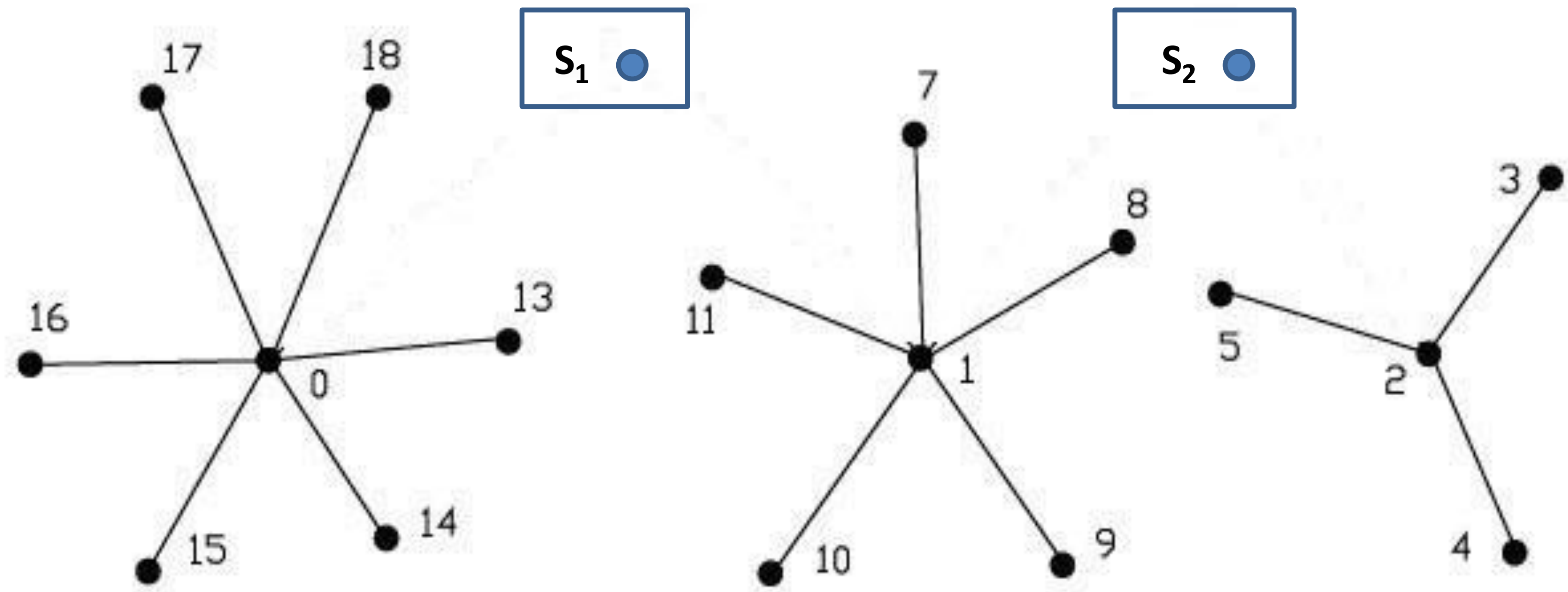
... et sa *complémentaire*

- On a démontré que :

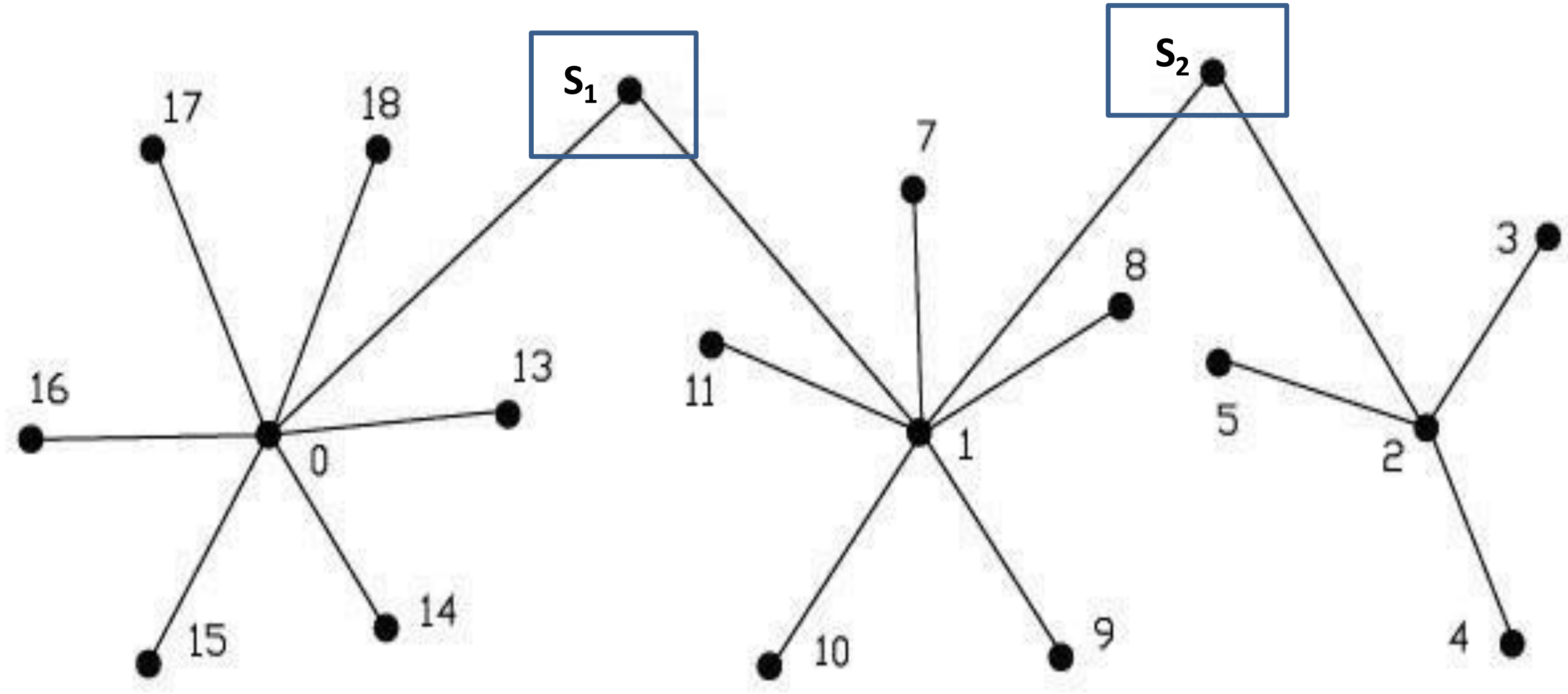
✓ **TOUTES les k-ETOILES sont GRACIEUSES !**

4-6-4) L'Expansion des Etoiles Gracieuses

- Comment obtenir une étoile gracieuse à partir de plusieurs étoiles gracieuses ?
- 1) On ajoute :
  - un sommet $\mathbf{S_1}$ et une arête permettant de joindre $\mathbf{K_{1,6}}$ à $\mathbf{K_{1,5}}$;
  - un autre sommet $\mathbf{S_2}$ et une autre arête permettant de joindre $\mathbf{K_{1,5}}$ à $\mathbf{K_{1,3}}$;



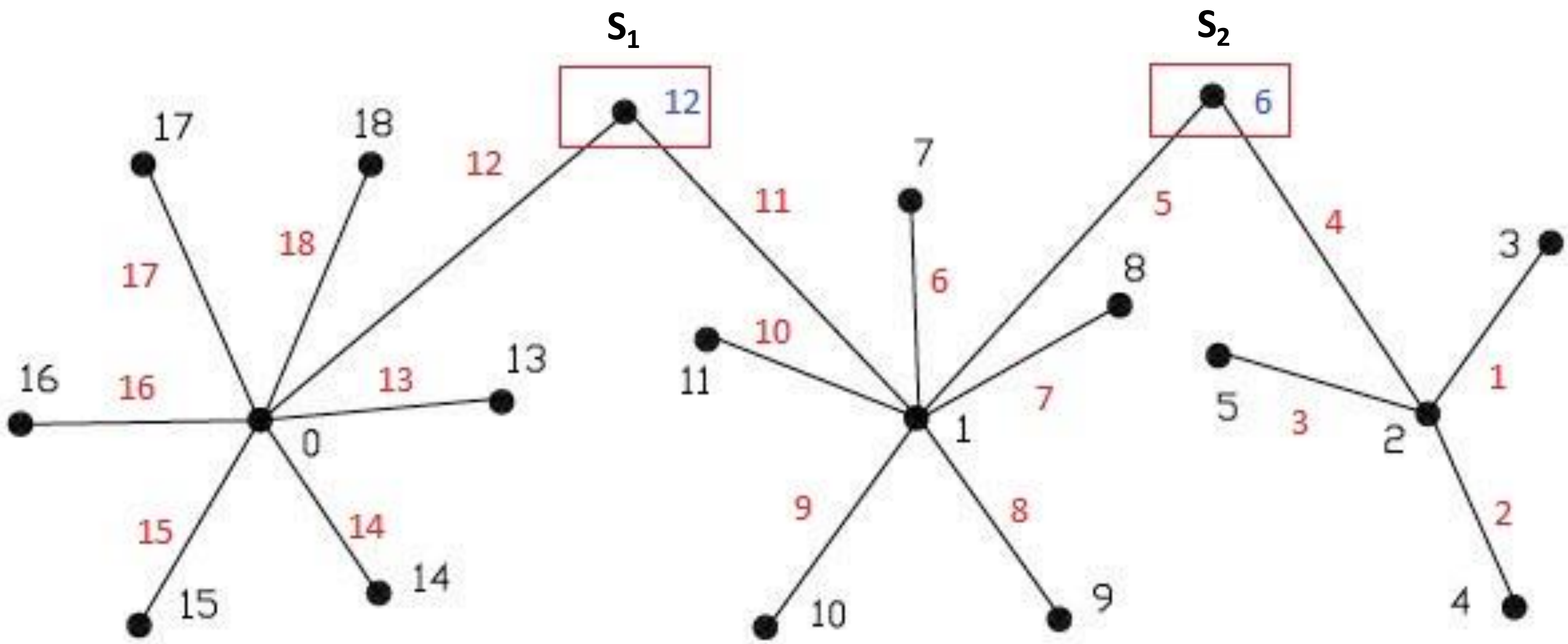
$\mathbf{K_{1,6}}$ $\mathbf{K_{1,5}}$ $\mathbf{K_{1,3}}$



- 2) On définit une <u>fonction de numérotation</u> « ad hoc », qui permet de *construire* une nouvelle étoile gracieuse à partir des trois premières.

- <u>Question</u> : Quels numéros donner à S_1 et à S_2 pour que la nouvelle étoile de (6+5+3)+2=16 sommets soit gracieuse ?

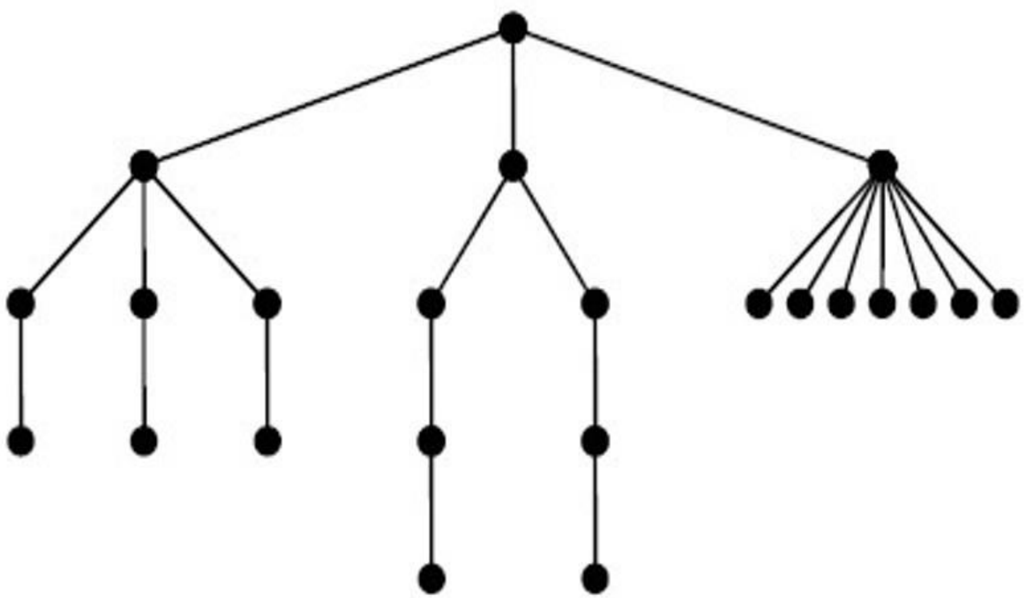
- Une nouvelle étoile est née … gracieuse de 16 sommets :

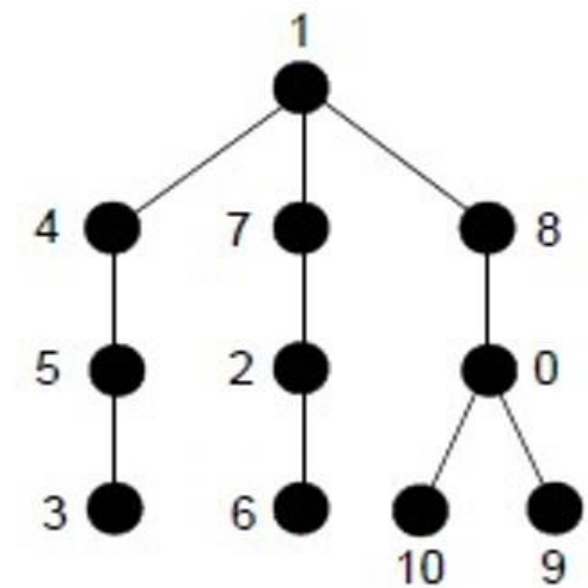


4-7) Les BANANIERS

- Un **bananier** se construit en attachant plusieurs *étoiles* à un seul sommet.

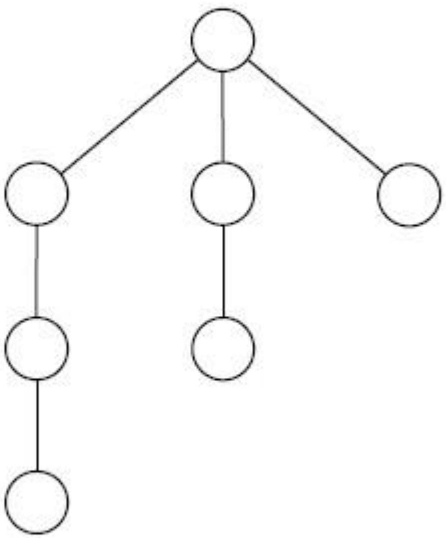
- On sait numéroter gracieusement certains bananiers, mais il n’existe aucune procédure générale.

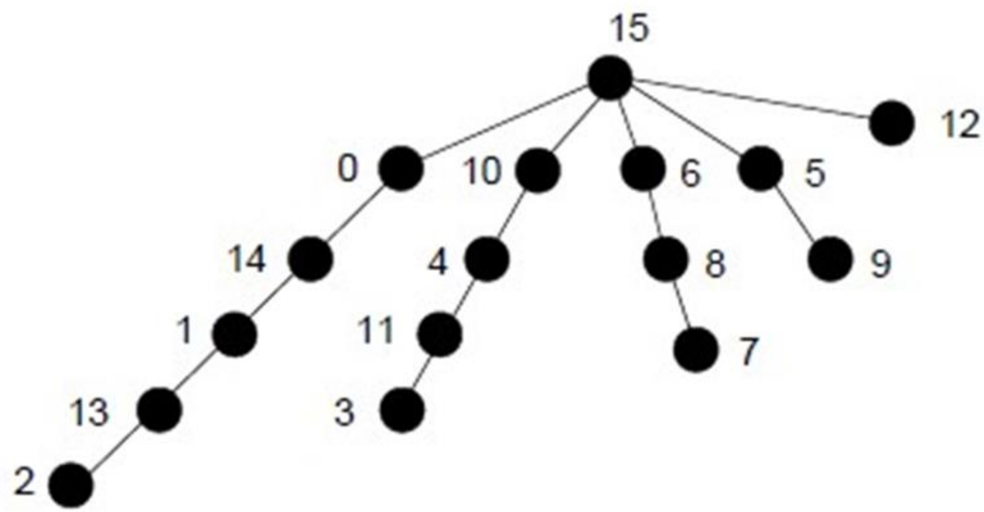




4-8) Les OLIVIERS

- Un **olivier** est un *arbre* qui a un nœud d'où partent **k** *branches*, tel que la $\mathbf{i}_{\text{ème}}$ branche est de longueur **i**.
  C'est donc une *araignée* avec **k** *pattes* de longueur **1**, **2**,…, **k** respectivement.



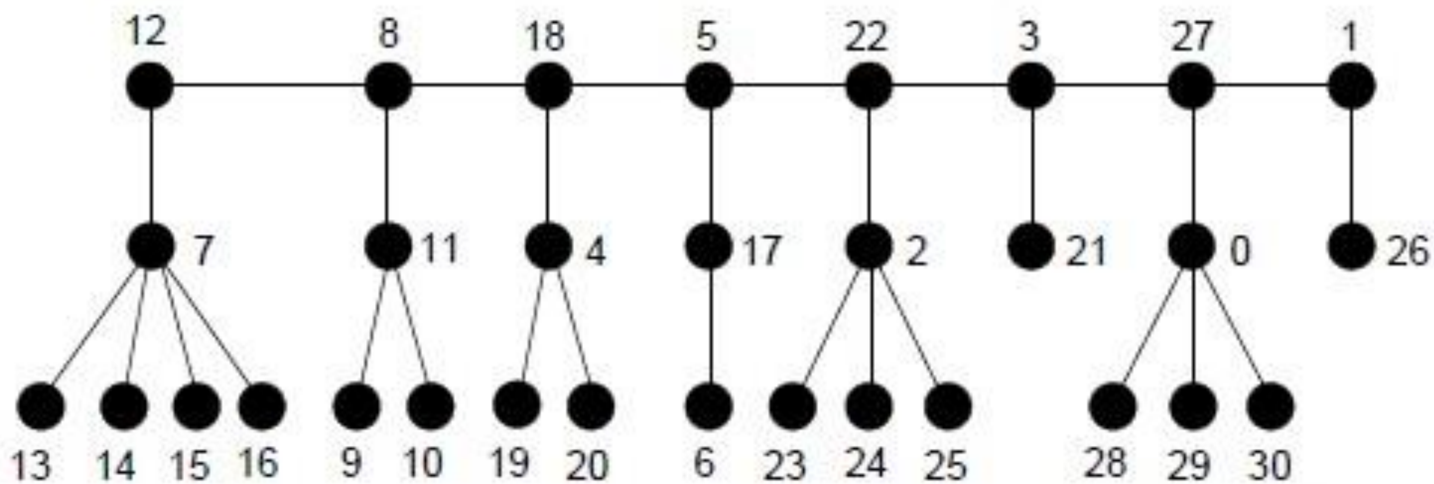


On a pu démontrer que :

✓ **TOUS les OLIVIERS sont GRACIEUX**

4-9) Les PETARDS

- Un **pétard** est un cas particulier de *homard* ; on peut le définir comme une collection d'*étoiles* toutes reliées à un *chemin* par l'une de leurs arêtes.



On a pu démontrer que :

✓ **TOUS les PETARDS sont GRACIEUX**

5 – EXTENSION du DOMAINE de la GRACIEUSETE

5-1) Quelques numérotations gracieuses … ou presque

- Afin de diversifier la recherche, d'autres types de numérotation des graphes, et par suite des arbres, ont été définis, plus ou moins proches de la définition initiale de la numérotation gracieuse.

Entre autres :

- la numérotation appelée **α-valuation**,

- la numérotation **fortement gracieuse**,

- la numérotation **bi-gracieuse**,

- la numérotation **super-gracieuse**,

- la numérotation **gracieuse impaire**,

- la numérotation **harmonieuse**,

- la numérotation **cordiale**,

- la numérotation **Skolem-gracieuse**,

etc .

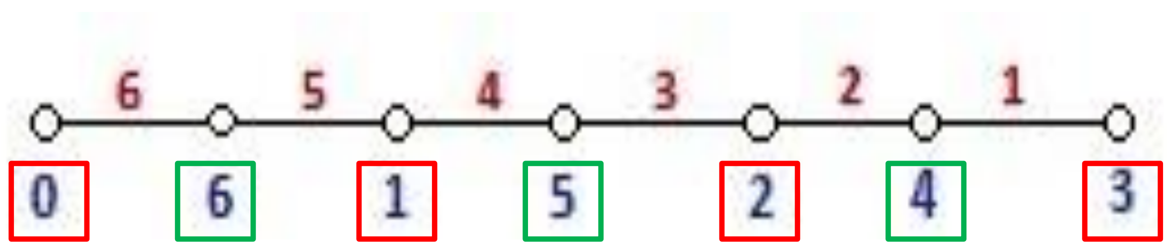
5-2) Un exemple de recherche « à la mode Rosa » : la α-VALUATION

- La numérotation appelée **α-valuation** a été définie par Rosa, pour les graphes et les arbres, en même temps que la numérotation gracieuse (la **β**-valuation).
- Un graphe (un arbre) est **α-gracieux** s'il est gracieux et s'il existe un entier positif **α** tel que, pour toute arête (u,v), on ait :

soit : $\boxed{u \leq \boldsymbol{\alpha} < v}$, soit : $\boxed{v \leq \boldsymbol{\alpha} < u}$.

- Exemple simple d'arbre **α**-gracieux :

A={0,1,2,3} avec
$x_A \leq$ **α=3**
B={6,5,4} avec
$x_B >$ **α=3**



α = 3

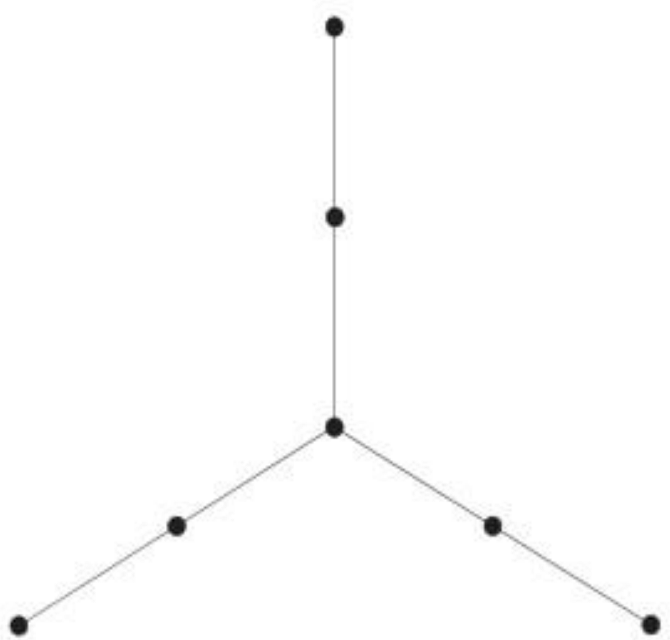
0 ≤3<6 1 ≤3<6 1 ≤3<5 2 ≤3<5 2 ≤3<4 3 ≤3<4

✓ **Un arbre α-gracieux est biparti.**

- Si l'on pouvait prouver que tout arbre admet une numérotation bipartie, alors on pourrait en déduire que tout arbre est α-gracieux, donc gracieux.

- On a montré notamment que :

✓ **Toute CHENILLE admet une numérotation bipartie, donc est α-gracieuse.**



- Mais Rosa lui-même a montré que certains arbres *n'admettent pas* de numérotation bipartie :

- C'est le cas de l'arbre ci-contre … pour lequel on ne peut trouver de numérotation bipartie gracieuse.

- … Ainsi, Rosa multipliera les outils de recherche … pour établir ensuite lui-même qu'ils ne suffisent pas à décider de sa conjecture !

6 – Une CONJECTURE PEUT EN CACHER une AUTRE

- En définissant la numérotation gracieuse, **A. Rosa** espérait se donner un outil pour résoudre un problème particulier de la théorie des graphes, celui de la **décomposition** d'un graphe G en un ensemble de sous-graphes.

6-1) QU'EST-CE QUE la DECOMPOSITION des GRAPHES ?

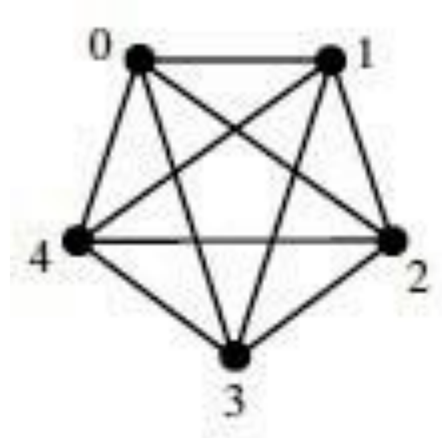
- Soit G un graphe *complet*.

  Une **décomposition** de G est un ensemble $\mathbf{H=(H_1,H_2,\ldots,H_k,\ldots, H_n)}$ de *sous-graphes* de G tel que chaque arête de G appartient à *un et un seul* des sous-graphes $\mathbf{H_k}$.

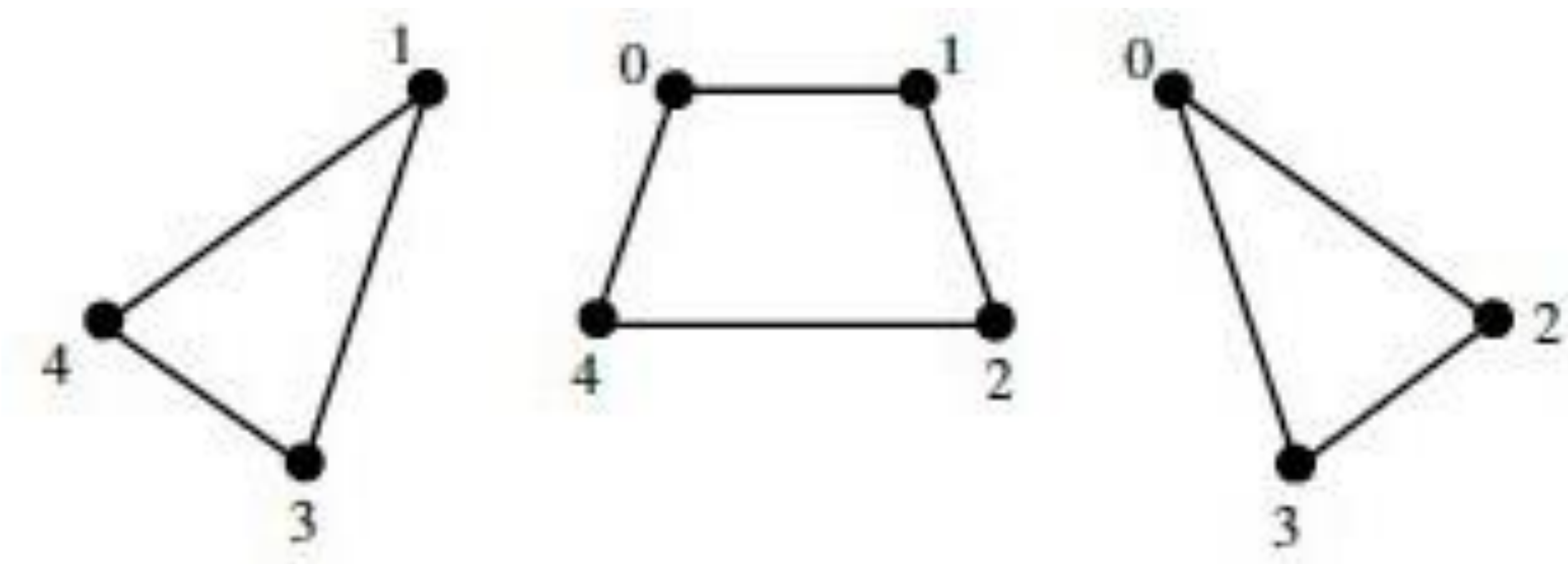
- G est en fait l'*union disjointe* des ensembles d'*arêtes* de ses sous-graphes $\mathbf{H_1,H_2,\ldots, H_k,\ldots, H_n}$.

- <u>Exemple 1</u> : On peut décomposer un graphe complet en des sous-graphes *différents* :

Le graphe complet K_5

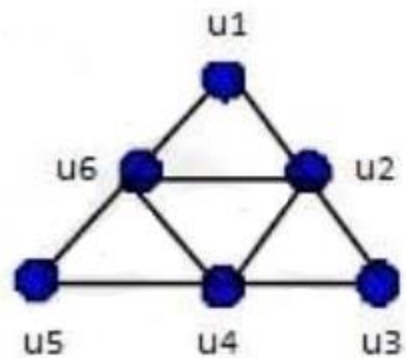


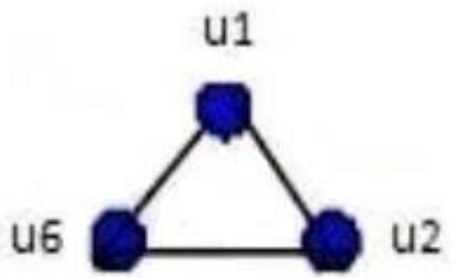
… se décompose en :



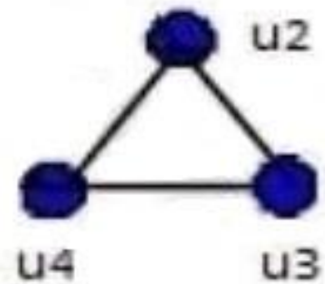
- <u>Exemple 2</u> : Le graphe G complet se *décompose* en 3 sous-graphes complets de même type $\mathbf{K_3}$: $\mathbf{H_1}$,$\mathbf{H_2}$ et $\mathbf{H_3}$; cette fois, les sous-graphes sont *isomorphes* :

G

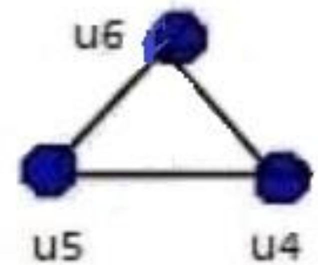




H_1



H_2



H_3

- Les ensembles d'**arêtes** sont :
- $A(H_1) = \{(u_1,u_2),(u_2,u_6),(u_1,u_6)\}$,
- $A(H_2) = \{(u_2,u_3),(u_3,u_4),(u_2,u_4)\}$,
- $A(H_3) = \{(u_6,u_4),(u_4,u_5),(u_6,u_5)$;

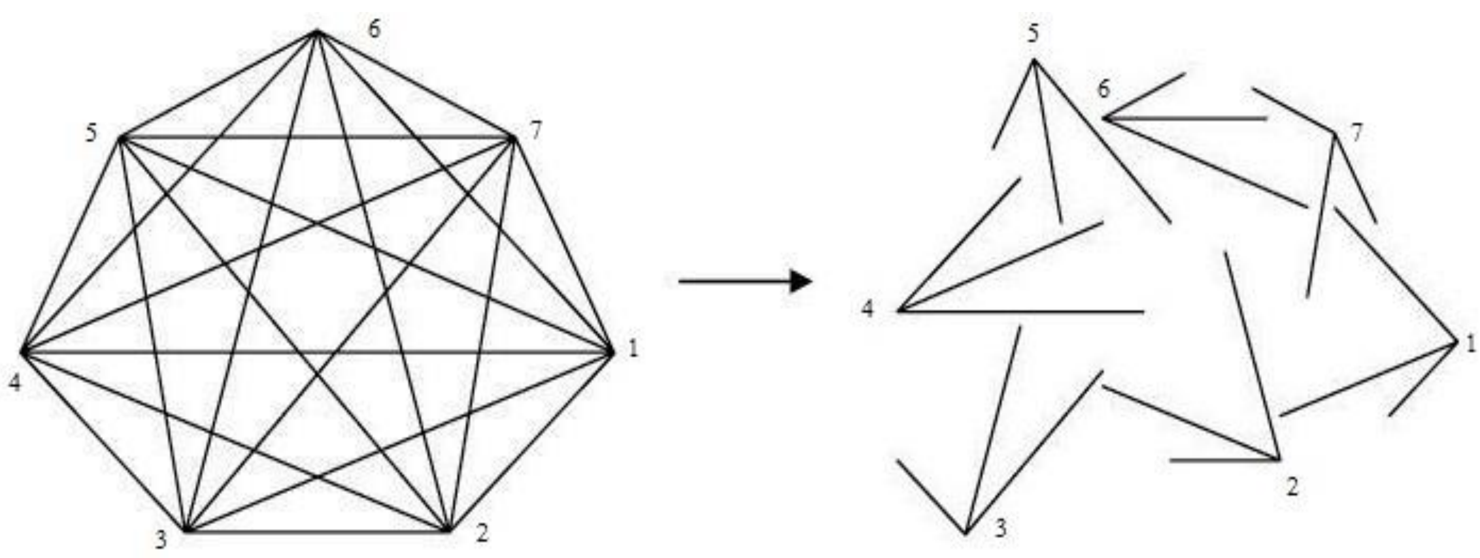
- Les ensembles de **sommets** sont :
- $S(H_1) = \{u_1,u_2,u_6\}$,
- $S(H_2) = \{u_2,u_3,u_4\}$,
- $S(H_3) = \{u_4,u_5,u_6\}$.

6-2) La CONJECTURE de RINGEL-KOTZIG

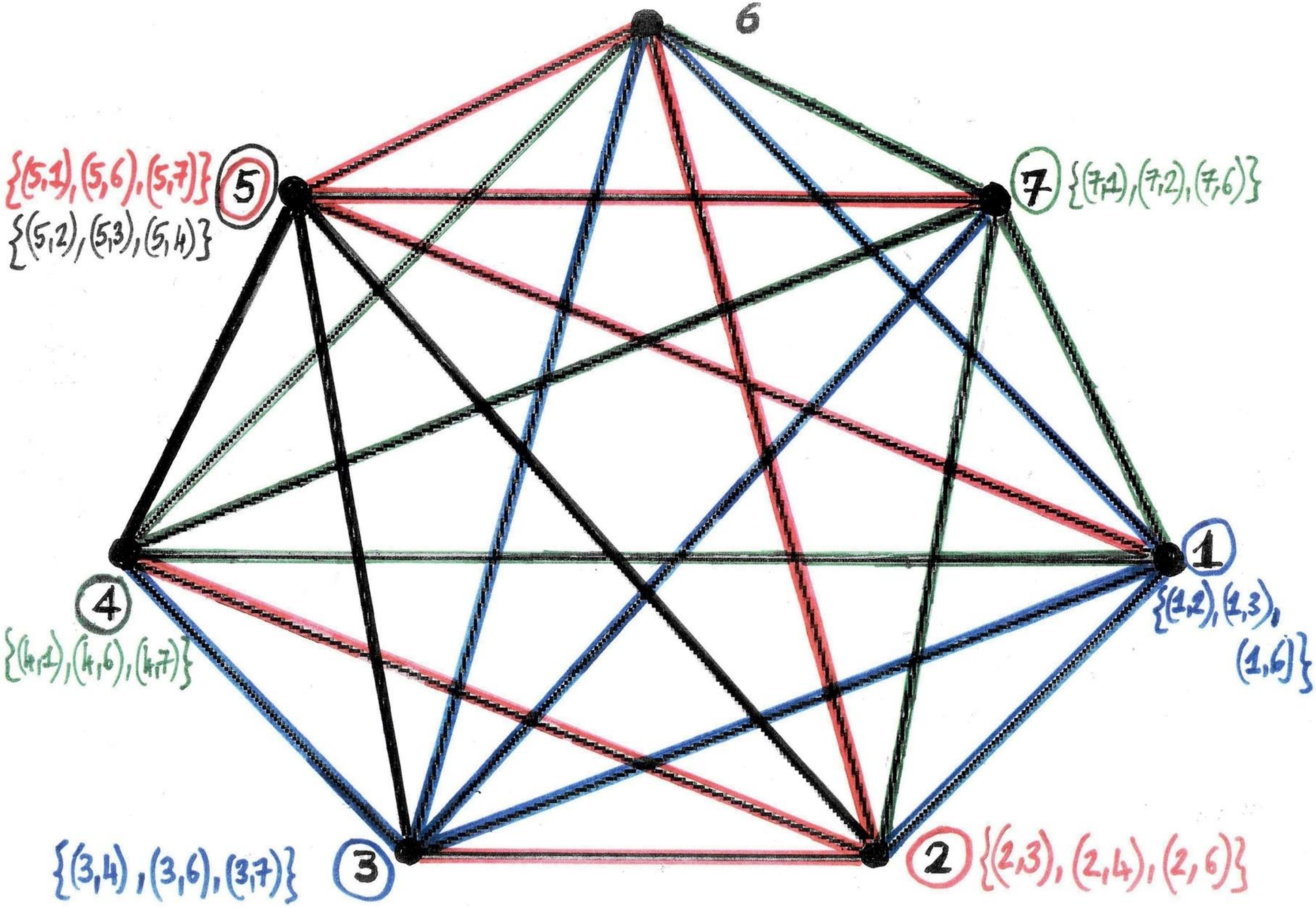
- En 1963, Gerhard **Ringel** (octobre 1919-juin 2008) énonce la conjecture suivante :

Un graphe *complet* K_{2n+1} de 2n+1 sommets peut être décomposé en 2n+1 sous-graphes tous <u>isomorphes à un arbre donné de n arêtes</u>.

- <u>Exemple 3</u> : Le graphe complet $\mathbf{K_7}$ peut se *décomposer* en **2n+1=7** arbres *isomorphes* de taille **n=3** ; tous ces arbres sont des *sous-graphes deux à deux disjoints* de $\mathbf{K_7}$:



- Exemple 4 : Décomposition du graphe complet $\mathbf{K_7}$ en **2n+1=7** arbres disjoints *isomorphes* de taille **n=3** :

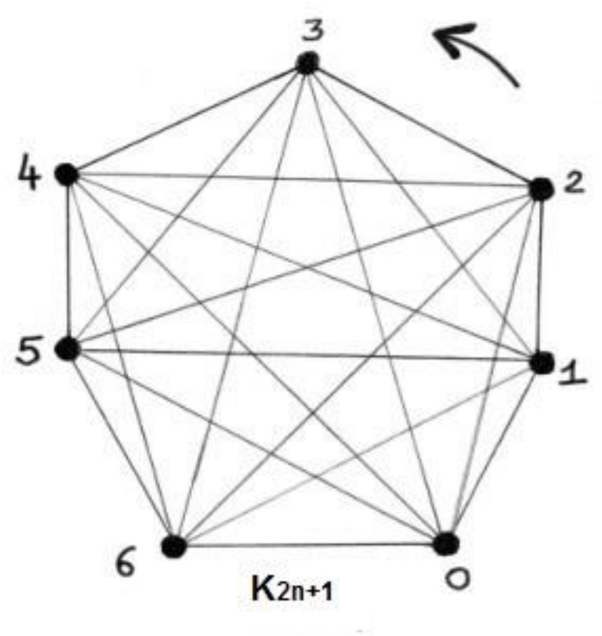


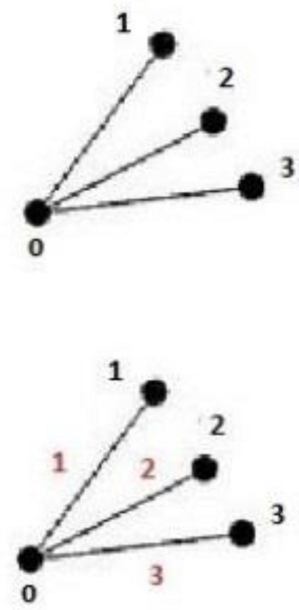
- En 1966, le mathématicien canadien-slovaque Anton **Kotzig** (octobre 1919-avril 1991) reformule la conjecture de Ringel :

Le graphe complet K_{2n+1} de 2n+1 sommets peut être décomposé *cycliquement* en 2n+1 sous-graphes tous isomorphes à un arbre donné de n <u>arêtes</u>.

6-3) EXEMPLE de DECOMPOSITION *CYCLIQUE* d'un GRAPHE COMPLET

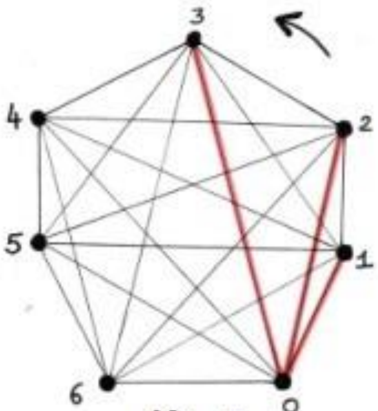
- Soit le graphe **K_7** à décomposer en 2n+1=**7** copies isomorphes de l'arbre **T_4** :





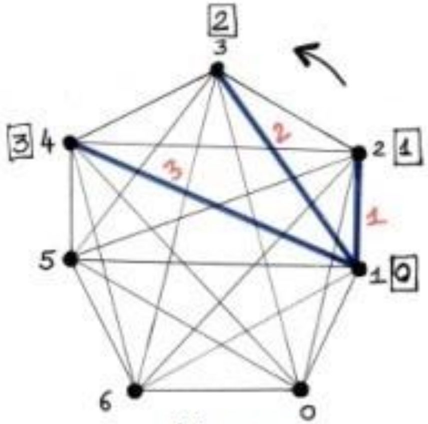
T_4 (**n**=3 <u>arêtes</u>, n+1=4 sommets)

T_4 gracieux



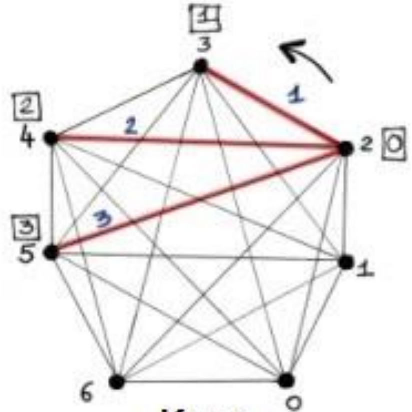
K_{2n+1}

(0,1,2,3,4,5,6)
{(0,1),(0,2),(0,3)}



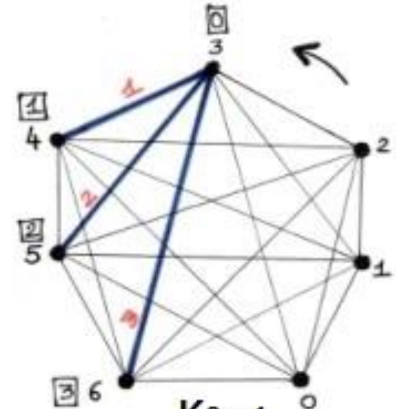
K_{2n+1}

(1,2,3,4,5,6,0)
{(1,2),(1,3),(1,4)}



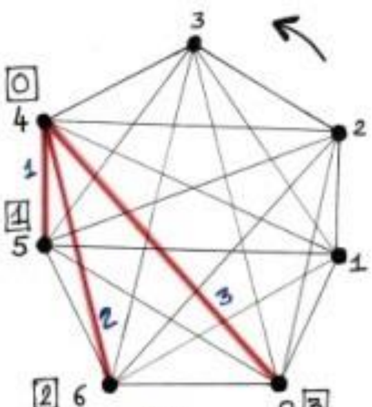
K_{2n+1}

(2,3,4,5,6,0,1)
{(2,3),(2,4),(2,5)}



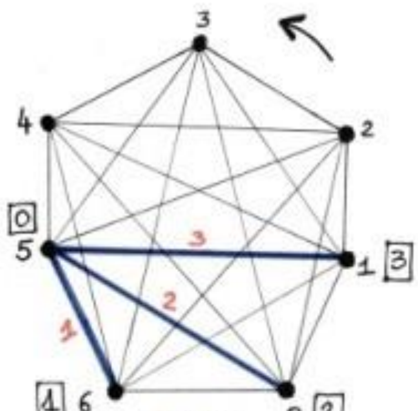
K_{2n+1}

(3,4,5,6,0,1,2)
{(3,4),(3,5),(3,6)}



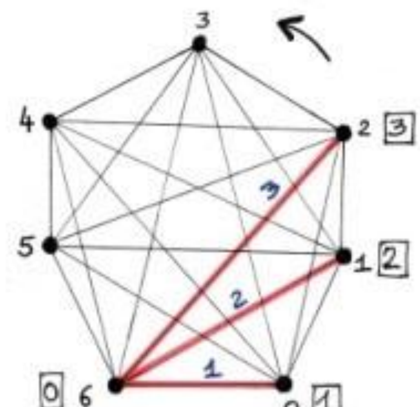
K_{2n+1}

(4,5,6,0,1,2,3)
{(4,5),(4,6),(4,0)}



K_{2n+1}

(5,6,0,1,2,3,4)
{(5,6),(5,0),(5,1)}



K_{2n+1}

(6,0,1,2,3,4,5)
{(6,0),(6,1),(6,2)}

- Pour résoudre le problème de la décomposition, Rosa prouve en 1967 le théorème reliant la conjecture de Ringel-Kotzig aux arbres gracieux :

- **Si un arbre T de n sommets et n-1 arêtes est gracieux, alors il existe un partitionnement (une décomposition) cyclique du graphe complet K_{2n-1} en 2n-1 sous-graphes tous isomorphes à l'arbre T.**

- En d'autres termes :

- **La conjecture de Ringel-Kotzig est équivalente à la conjecture des arbres gracieux.**

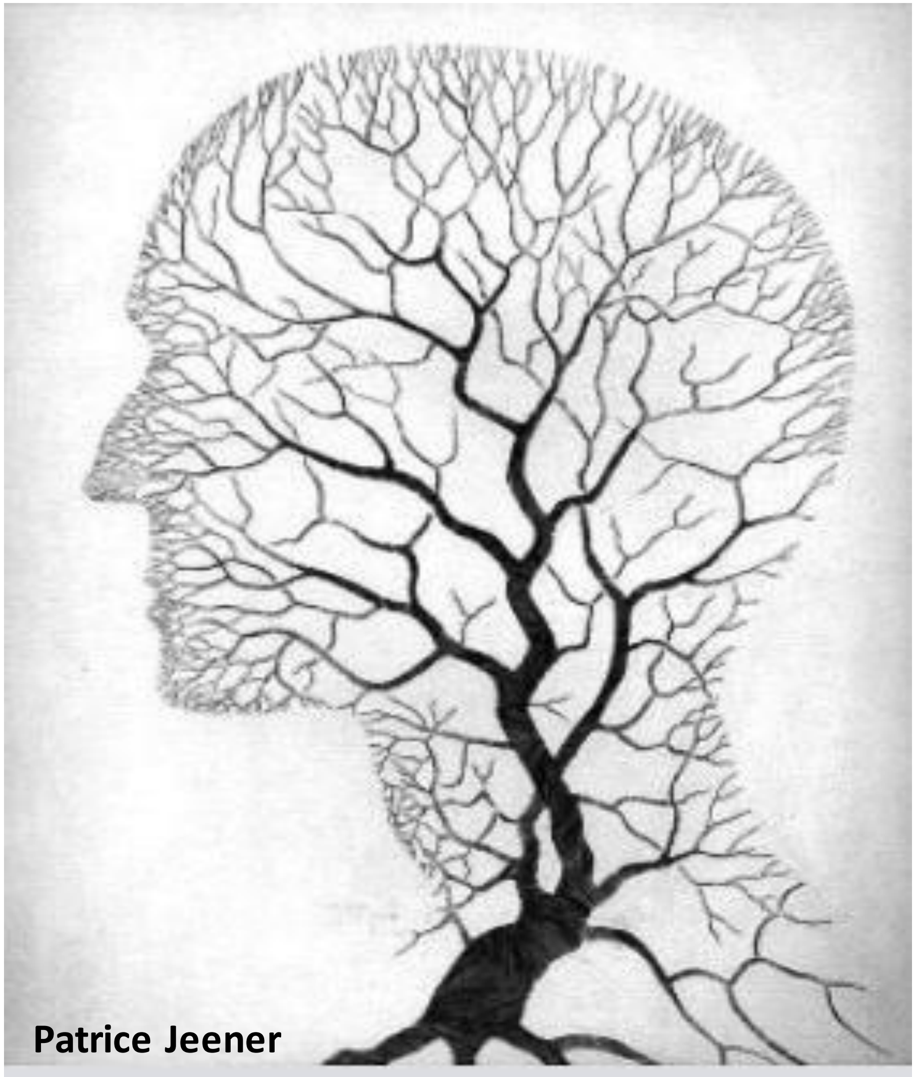
- Ainsi, la recherche de la solution concernant la conjecture des arbres gracieux est relancée par Alexander Rosa, celui-là même qui l'avait le premier énoncée !

- Aujourd'hui encore, la question demeure : **TOUS les arbres sont-ils gracieux ?**

CONCLUSION : Poursuivre la Recherche ?

Arbres, tous gracieux ? Oui, ce fut annoncé !
Rosa, cet Alexandre, en fit sa conjecture,
Bataillant dans le zoo des graphes, furieux,
Rêvant de vaincre enfin ces arbres gracieux,
Entraînant avec lui dans sa grande aventure
Savants et amateurs, jamais n'a renoncé !

Graphes, domaine plein d'étranges créatures,
Réalité créée par nos bouillants cerveaux,
Araignées ou homards, intriguantes natures,
Cocotiers, bambous, curieux végétaux,
Invertébrés bizarres, étoiles insolites,
Enfin, dans ce magma, matheux, où tu habites,
Un jour bientôt viendra un savant rétiaire,
X, ou béotien, dompter ce bestiaire !



Notre cerveau est-il un arbre gracieux ?

Quelques références sur les graphes … et les arbres gracieux

- Cabot Sébastien - Introduction à la théorie des graphes—Vocabulaire (http://theoriedesgraphes.com/)
- Un ouvrage en anglais, très accessible et passionnant :
  Aldous Joan, Graphs and Applications : An Introductory Approach
- Le point sur l'étiquetage des graphes et les arbres gracieux, pour les matheux, avec plus de 1300 références bibliographiques :
  Gallian Joseph – A Dynamic Survey of Graph Labeling (http://www.emis.ams.org/journals/EJC/Surveys/ds6.pdf)
- Shalom Eliahou - Images de maths – Le Sudoku arboricole (http://images.math.cnrs.fr/Le-sudoku-arboricole)
- Norman Wildburger - FamousMathProbs 4: The Graceful Tree Conjecture (https://www.youtube.com/watch?v=6PTw4X3OG4g&list=PLO7ONm9S7KfYW3LmWDOVFMYily4Fe4n2s&index=4)
- Un article de MathsEnJeans qui montre que même les sujets difficiles peuvent intéresser les collégiens :
  Collège Alain-Fournier d'Orsay - Arbres gracieux (http://www.mathenjeans.fr/sites/default/files/arbres_gracieux_orsay-alainfournier_2015.pdf).