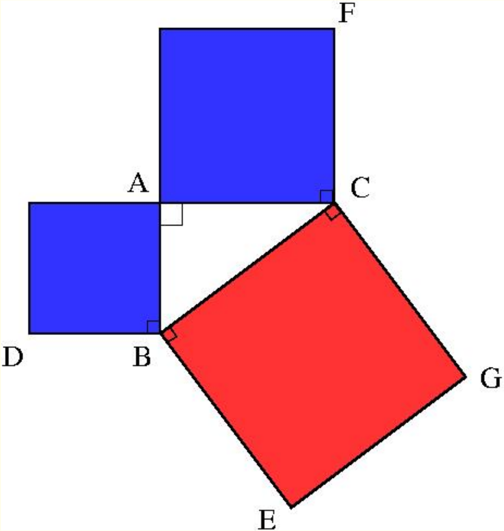
# Jouer avec les triangles

François Dubois*

**Kafemath au "Café des Pratiques"**
**105 bis rue de Belfort, Besançon**
**samedi 17 septembre 2016**

* animateur du Kafemath, café mathématique à Paris.

# Théorème de Pythagore (théorème de l'âne en Bolivie)



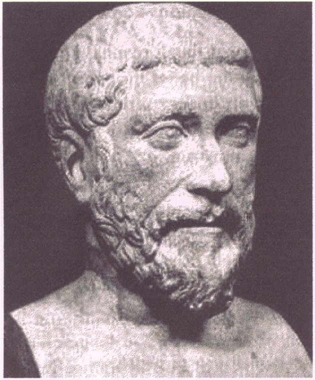

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

# Un quatrain pour Pythagore

Le carré de l'hypoténuse
Est égal, si je ne m'abuse
À la somme des carrés
Construits sur les autres côtés.

Franc-Nohain (1872 - 1934)
avocat, sous-préfet, écrivain, poète et librettiste.

# Pythagore (Samos, 580 av. J.C. - Métaponte, 485 av.)



Né vers 580 avant J.C. dans l'île de Samos, au large de la Turquie
Aurait été l'élève de Thalès à Milet
Voyage en Egypte et à Babylone ?
Fonde une école scientifique et mystique à Crotone (Italie)
Ecole pythagoricienne (jusqu'à 400 av J.C.) : "Tout est nombre"

# Expérimentation physique

Les masses sont proportionnelles aux surfaces.
Le théorème de Pythagore exprime que la masse du grand carré est la somme des masses des deux plus petits.

# Expérimentation physique (ii)



Pas si mal !

# Expérimentation physique (iii)

Mais tout de même... On change de partenaire et on va à la
Menuiserie Allain, 19 rue Gabriel Péri à Saint Cyr l'Ecole

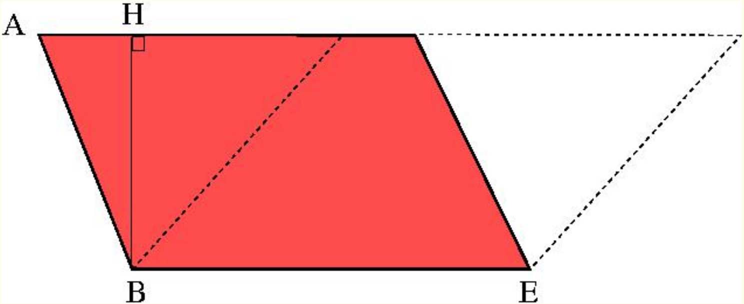

Les carrés ont été un peu diminués...

# Expérimentation physique (iv)



L'écart des masses est maintenant imputable à la balance !

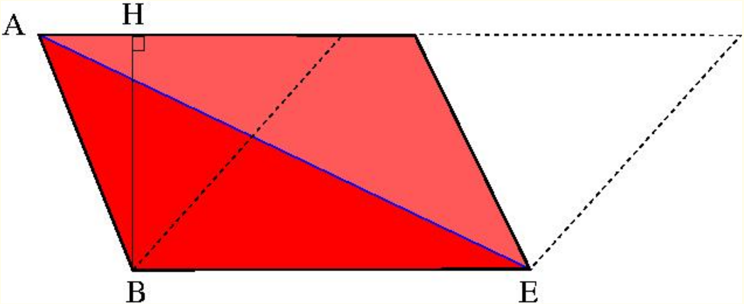
# Surface d'un triangle




La surface commune des deux parallélogrammes est égale

à la base $BE$ multipliée par la hauteur $BH$ .

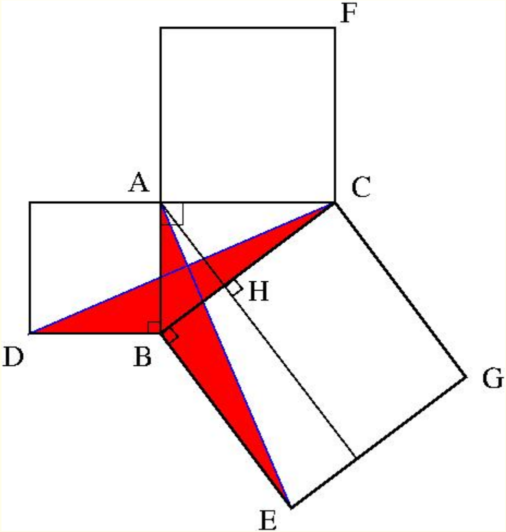
# Surface d'un triangle (ii)




La surface du triangle $BEA$ est égale

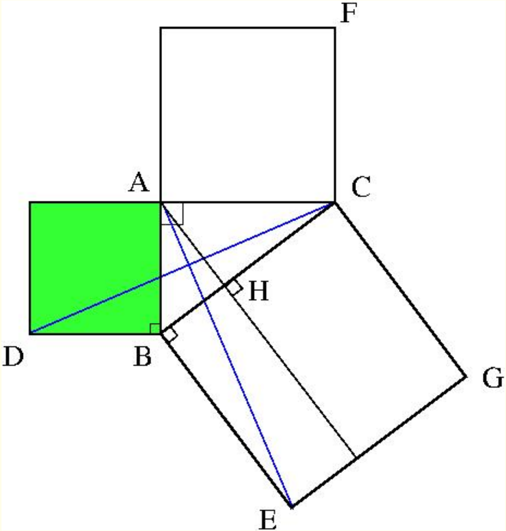
à la moitié de la surface du parallélogramme.

# Preuve d'Euclide (moulin à vent)



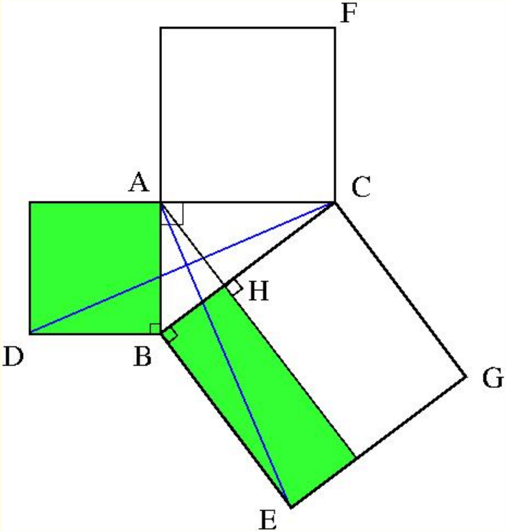

Les deux triangles $DBC$ et $ABE$ sont égaux.

# Preuve d'Euclide (moulin à vent) (ii)



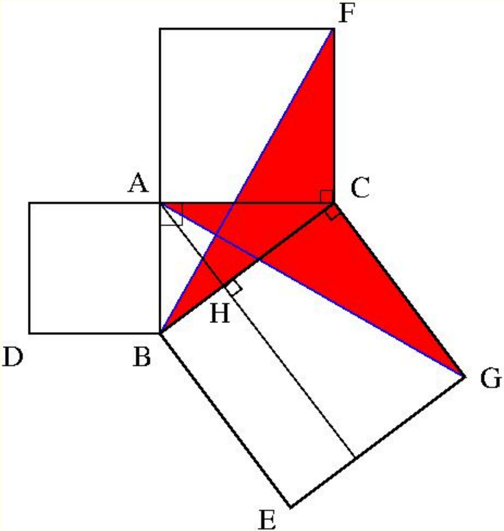

La surface du carré vert est le double de celle du triangle $DBC$.

# Preuve d'Euclide (moulin à vent) (iii)



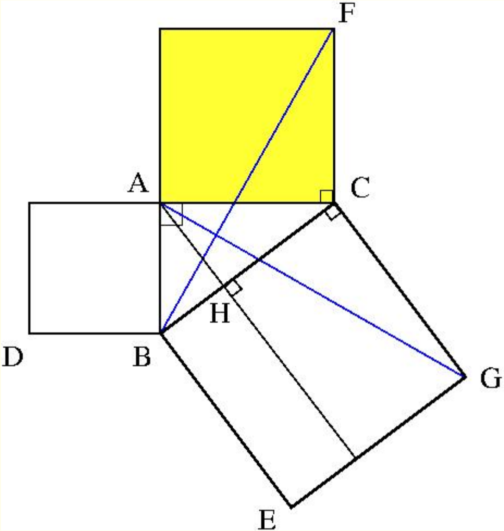

La surface du rectangle vert est le double de celle du triangle $ABE$.

# Preuve d'Euclide (moulin à vent) (iv)



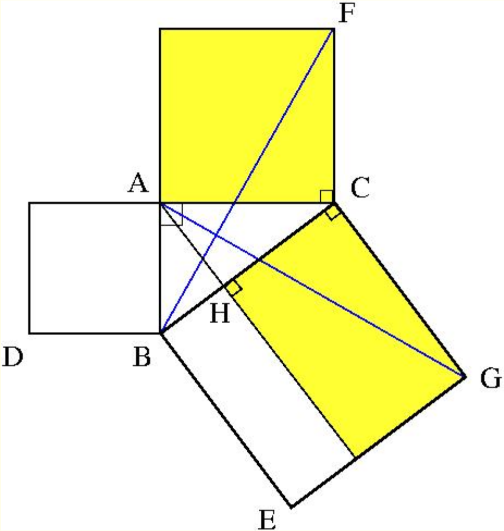

Même chose de l'autre côté. Les triangles $GCA$ et $BCF$ sont égaux.

# Preuve d'Euclide (moulin à vent) (v)



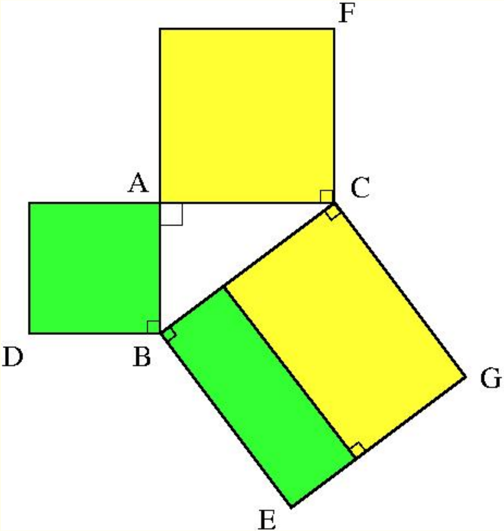

La surface du carré jaune est le double de celle du triangle $BCF$.

# Preuve d'Euclide (moulin à vent) (vi)



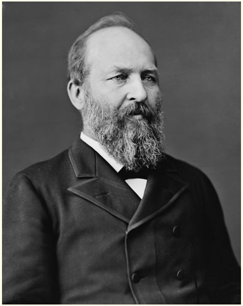

La surface du rectangle jaune est le double de celle du triangle *GCA*.

# Preuve d'Euclide (moulin à vent) (vii)




On réunit les deux propriétés ; le théorème de Pythagore est établi.

# James Garfield (1831 - 1881)



militaire qui a participé à la guerre de Sécession

membre du Congrès américain (Ohio) de 1862 à 1878

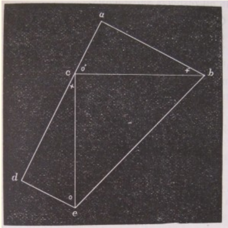
20 ième président des Etats Unis d'Amérique (élection de 1880)

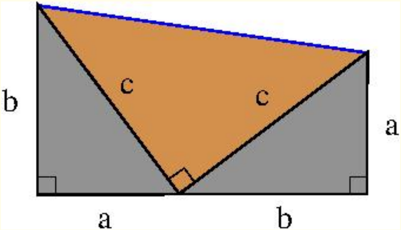
meurt assassiné après moins d'un an de mandat.

Fait des maths dans ses heures perdues au congrès,

il publie une preuve très élégante du théorème de Pythagore : *Pons Asinorum* (le pont des ânes) dans le New-England Journal of Education à Boston (volume 3, numéro 14, page 161, 1876).

# Preuve de James Garfield (1876)




On calcule de deux façons l'aire du trapèze

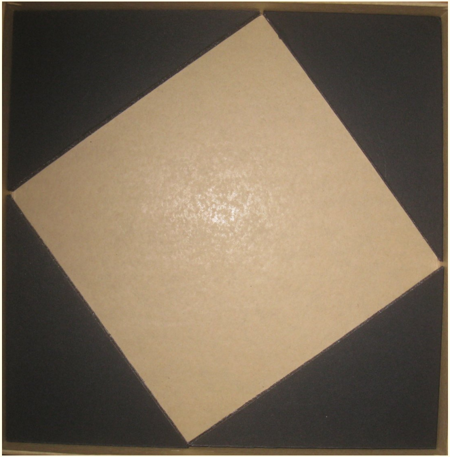
première façon : $(a+b)\dfrac{a+b}{2}$

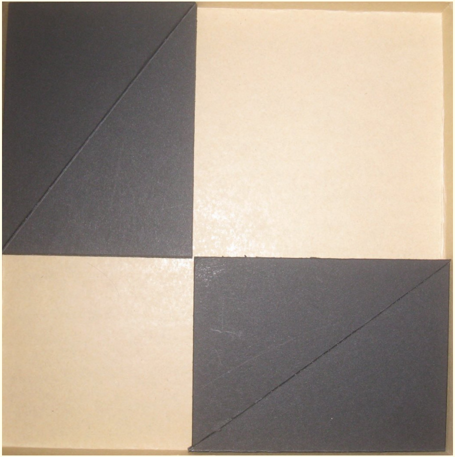
seconde façon : $\dfrac{c^2}{2}+2\dfrac{ab}{2}$

Donc $\dfrac{a^2+b^2}{2}+\dfrac{2ab}{2}=\dfrac{c^2}{2}+ab$

et $a^2+b^2=c^2$

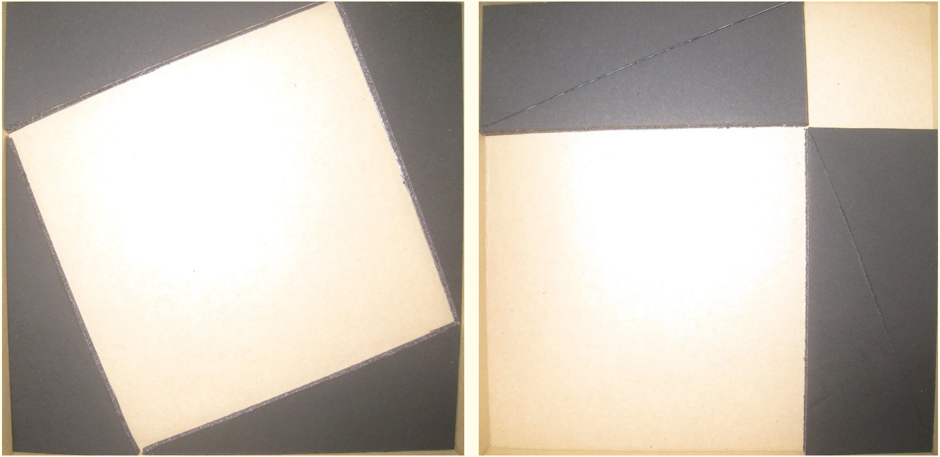
# Preuve de James Garfield : illustration expérimentale





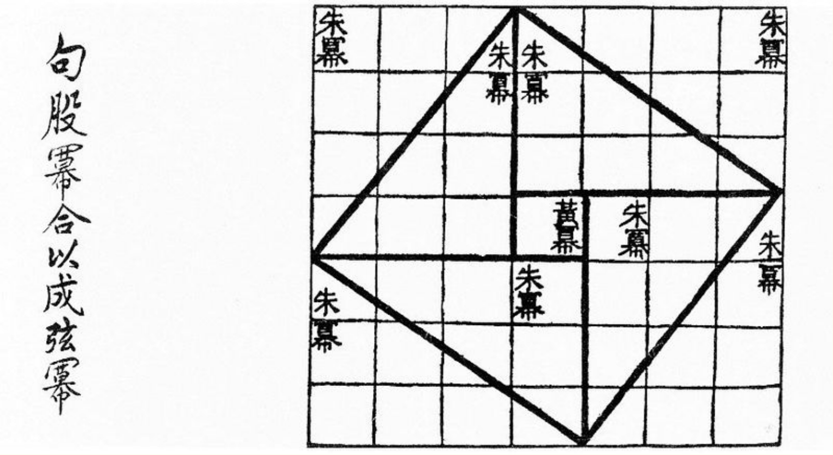
Les deux surfaces claires sont égales.

# Preuve de Garfield : seconde illustration expérimentale



Les deux surfaces claires sont égales.

# Traité chinois des “Neuf Chapitres”



# Théorème gougou

Jiuzhang Suanshu, “Les Neuf Chapitres sur l’art mathématique”,
traité chinois (206 avant - 220 après J.C.)
Commentaire de Liu Hui (263 après J.C.)

Liu-Hui ($\simeq$ 220 - $\simeq$ 280)

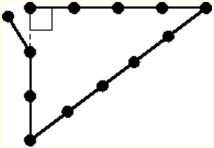
Théorème “gougou”
de : gou (base) et gu (hauteur)

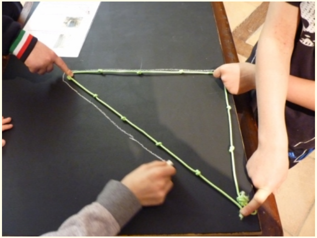
# suite de l'histoire...

Tablette d'argile "Plimpton 322" (Babylone, 1800 avant J.C.)
Triplets pythagoriciens ?

Inde. Baudhayana, 800 avant J.C.
"Sulba-Sutra", traité de construction des autels.
Preuves dans des cas particuliers et triplets pythagoriciens.

Corde à treize noeuds
en Mésopotamie, Inde, Egypte et au Moyen-Âge.
Angle droit grâce au triangle (3, 4, 5).

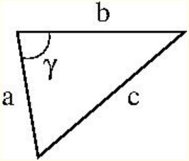




http://www.ac-grenoble.fr

# suite de l'histoire... *(ii)*


Ghiyath al-Kashi, mathématicien perse, 1380-1429.
Généralisation du théorème de Pythagore
dans un triangle quelconque




$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma$$

# Ah ces fractions !

Marcel Pagnol et Alexander Korda, *Marius*, 1931

Raimu et Pierre Fresnay

# Ah ces fractions ! *(ii)*

CÉSAR

C'est ça ! Insulte la clientèle au lieu de te perfectionner dans ton métier ! Eh bien, pour la dixième fois, je vais te l'expliquer, le picon-citron-curaçao. (Il s'installe derrière le comptoir.)
Approche-toi ! (Marius s'avance et va suivre de près l'opération. César prend un grand verre, une carafe et trois bouteilles. Tout en parlant, il compose le breuvage.)
Tu mets d'abord un tiers de curaçao. Fais attention : un tout petit tiers. Bon. Maintenant, un tiers de citron. Un peu plus gros. Bon. Ensuite, un BON tiers de Picon. Regarde la couleur. Regarde comme c'est joli. Et à la fin, un GRAND tiers d'eau. Voilà.

MARIUS Et ça fait quatre tiers.

CÉSAR

Exactement. J'espère que cette fois, tu as compris.

(Il boit une gorgée du mélange).

# Ah ces fractions ! *(iii)*

MARIUS
Dans un verre, il n'y a que trois tiers.

CÉSAR Mais, imbécile, ça dépend de la grosseur des tiers !

MARIUS
Eh non, ça ne dépend pas. Même dans un arrosoir, on ne peut mettre que trois tiers.

CÉSAR (triomphal)
Alors, explique moi comment j'en ai mis quatre dans ce verre.

MARIUS Ça, c'est de l'arithmétique.

CÉSAR
Oui, quand on ne sait plus quoi dire, on cherche à détourner la conversation.

# Ah ces fractions ! *(iv)*

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \ldots = \frac{2+3}{6+9} = \ldots = \frac{\alpha + 3\,\beta}{3\,\alpha + 9\,\beta} = \ldots$$

Un même nombre rationnel,

c'est à dire quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres entiers,

peut être représenté de multiples façons

avec des numérateurs et des dénominateurs différents !

Règle d'égalité de deux fractions :

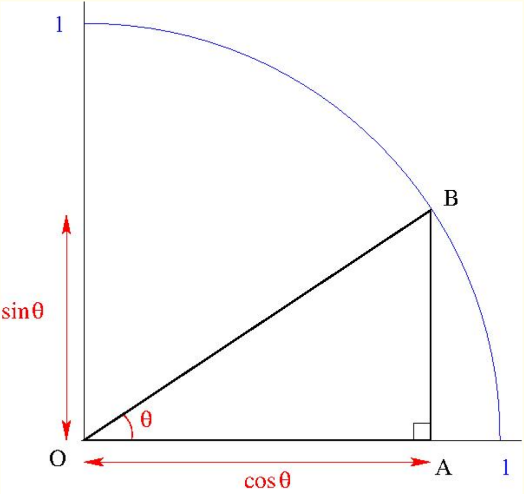
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si et seulement si } a\,d = b\,c$$

Si deux fractions sont égales,

on peut jouer avec le numérateur et avec le dénominateur

$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ on a aussi } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\alpha\,a + \beta\,c}{\alpha\,b + \beta\,d} \text{ !!}$$

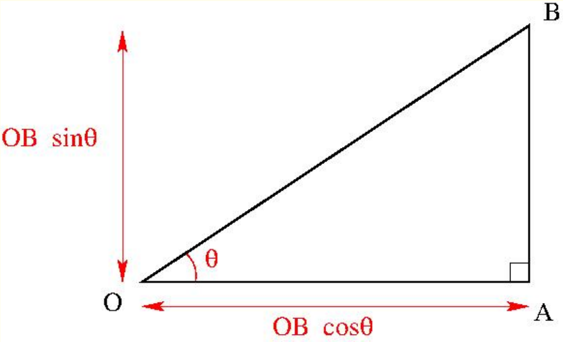
# La trigo, quelle horreur !




Dans le triangle OAB, le théorème de Pythagore nous apprend que

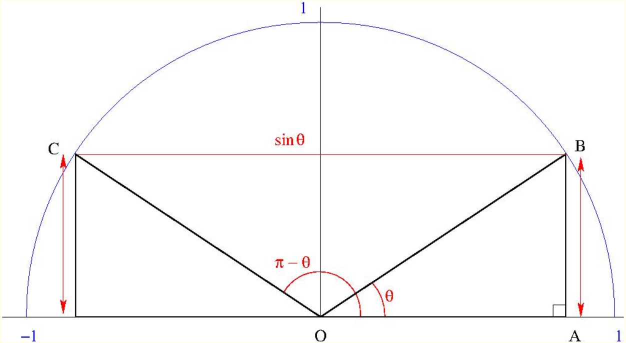
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

# La trigo, quelle horreur ! *(ii)*



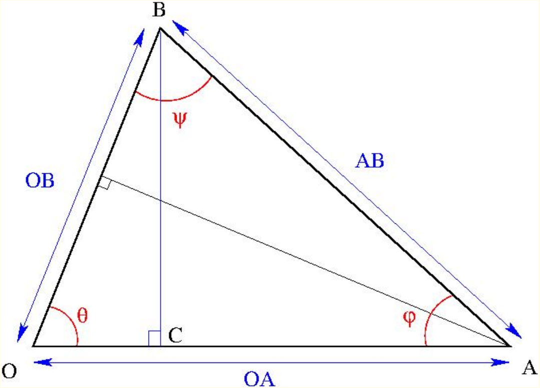

$$\sin\theta = \frac{AB}{OB} = \frac{\textbf{côté opposé}}{\textbf{hypothénuse}}\ , \qquad \cos\theta = \frac{OA}{OB} = \frac{\textbf{côté adjacent}}{\textbf{hypothénuse}}$$

# La trigo, quelle horreur ! *(iii)*




$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

# La trigo, quelle horreur ! *(iv)*

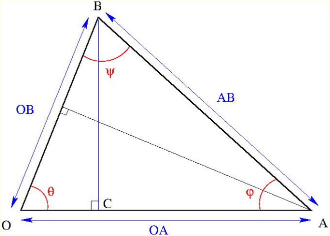



surface du triangle “quelconque” OAB $= \dfrac{1}{2}\, OA\ BC\ =$

$$= \frac{1}{2}\, OA\ OB\ \sin\theta\ = \frac{1}{2}\, OA\ AB\ \sin\varphi\ = \frac{1}{2}\, OB\ AB\ \sin\psi$$

et $\dfrac{\sin\theta}{AB} = \dfrac{\sin\varphi}{OB} = \dfrac{\sin\psi}{OA}$

# La trigo, quelle horreur ! *(v)*




$$\frac{\sin\psi}{OA} = \frac{\sin\theta}{AB} = \frac{\sin\varphi}{OB} \qquad \text{et} \qquad \psi = \pi - (\theta + \varphi)$$

$$\frac{\sin\psi}{OA} = \frac{\frac{AC}{AB}\ \sin\theta}{\frac{AC}{AB}\ AB} = \frac{\frac{OC}{OB}\ \sin\varphi}{\frac{OC}{OB}\ OB}$$

$$= \frac{\cos\varphi\ \ \sin\theta}{CA} = \frac{\cos\theta\ \ \sin\varphi}{OC} = \frac{\cos\varphi\ \ \sin\theta + \cos\theta\ \ \sin\varphi}{OC + CA}$$

$$\sin\psi = \sin\left(\pi - (\theta + \varphi)\right) = \sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\ \ \cos\varphi + \cos\theta\ \ \sin\varphi$$

de même, $\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\ \ \cos\varphi - \sin\theta\ \ \sin\varphi$

# L'imaginaire sans complexes ?

John Napier (1550 - 1617) et Leonhard Euler (1707 - 1783)

# L'imaginaire sans complexes !

Devinette

Au café des pratiques,

Mr Logarithme et Mlle Exponentielle prennent un café.

Mais qui paie les consommations ?

# L'imaginaire sans complexes !

Devinette

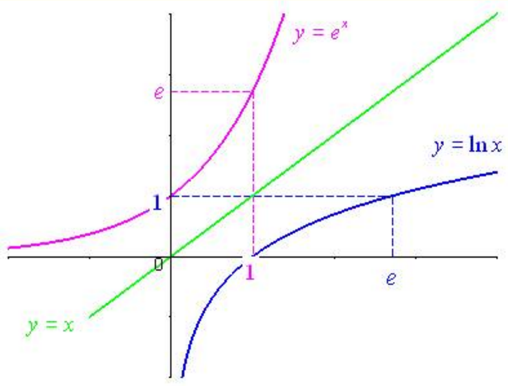
Au café des pratiques,

Mr Logarithme et Mlle Exponentielle prennent un café.

Mais qui paie les consommations ?

L'exponentielle parce que Logarithme ne paie rien

# Logarithme et exponentielle




http://mathsv-ressources.univ-lyon1.fr

Logarithme : remplacer les multiplications par des additions
pour faire moins de calculs... $\ln(a\,b) = \ln a + \ln b$

L'exponentielle est la fonction réciproque et remplace les additions
par des multiplications : $\exp(a + b) = \exp a \;\; \exp b$

# Nombres “imaginaires”


Niccolò Tartaglia (1499-1557) et Gerolamo Cardano (1501-1576)

# Nombres “imaginaires”

Résoudre l'équation du troisième degré $x^3 + p\,x + q = 0$

Méthode de Tartaglia - Cardano...

On a besoin de manipuler une grandeur telle que

son carré vaut “$-1$” !!

Mais qu'on se rassure...

cette grandeur disparaît à la fin du calcul, elle est imaginaire !

Grandeur nommée “più di meno”

par Raphaël Bombelli (1526 - 1572)

“più di meno via più di meno fà meno”

Un magnifique Kafemath de Gilles Moine le 23 février 2012...

voir http://kafemath.fr/2011-2012/kfm-2011-2012.html

“$i$ comme impossible” $i^2 = -1$

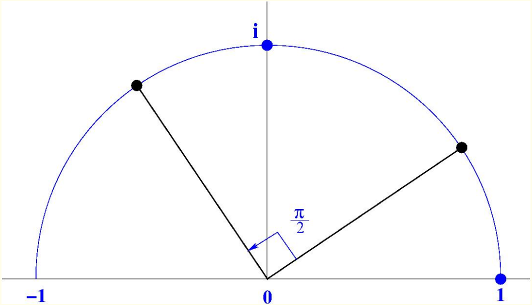
# Les nombres imaginaires pour la géométrie

Jean-Robert Argand (1768 - 1822)

et Augustin Louis-Cauchy(1789 - 1857)

# Les nombres imaginaires pour la géométrie *(ii)*




Interprétation géométrique du nombre $i$

grâce à une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ ;

notion de "plan complexe"

# Euler et l'exponentielle

Comment généraliser la relation fondamentale

qui transforme l'addition en multiplication

$$\exp(a+b) = \exp a \ \ \exp b$$

aux nombres imaginaires ?

Bonne façon de faire : $\exp(i\,\theta) = \cos\theta + i\,\sin\theta$

On peut alors écrire la relation fondamentale

avec $a = i\,\theta$ et $b = i\,\varphi$ :

$$\exp\left(i\,(\theta+\varphi)\right) = \exp(i\,\theta) \ \ \exp(i\,\varphi)$$

Alors

$$\cos(\theta+\varphi) + i\,\sin(\theta+\varphi) = \left(\cos\theta + i\,\sin\theta\right)\ \left(\cos\varphi + i\,\sin\varphi\right)$$
$$= \left(\cos\theta\ \cos\varphi - \sin\theta\ sin\varphi\right) + i\left(\sin\theta\ \cos\varphi + \cos\theta\ \sin\varphi\right)$$

On sépare les parties rélle et imaginaire :

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\ \cos\varphi - \sin\theta\ \sin\varphi$$
$$\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\ \cos\varphi + \cos\theta\ \sin\varphi$$

donc la trigo, c'est très simple !!

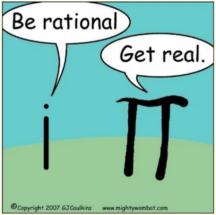
Relation d'Euler : $\mathrm{e}^{i\,\pi} = -1$

# Exthétique et mathématiques...

$e^{i\pi} = -1$ une relation qui relie

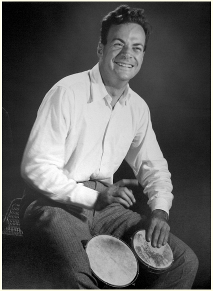
$e \simeq 2,71828...$
$\pi \simeq 3,1415926...$
l'imaginaire $i$, qui n'est pas un nombre "réel" !
$-1$ le nombre des températures négatives !
multiplication
exponentiation

La "plus belle formule" des mathématiques ?




dessin de Gordon J. Caulkins, http://www.mightywombat.com
sur cette présentation avec sa permission !

# Richard Feynman (1918 - 1988) et le nombre $\pi$



théoricien de l'électrodynamique quantique,
inventeur de l'intégrale de chemin, dite "de Feynman"
et encore mal comprise des mathématiciens,
prix Nobel de physique (1965), co-auteur du
"cours de physique de Feynman" (1961 - 1963),
a eu l'idée de l'ordinateur quantique (1982)
Si une formule mathématique utilise le nombre $\pi$,
sa question favorite : "Où est le cercle ?"

# In memoriam, Jean-Christophe Yoccoz (1957 - 2016)

à Oberwolfach en 2005 (https://owpdb.mfo.de)

ancien élève de l'Ecole normale supérieure,
spécialiste des systèmes dynamiques, médaille Fields 1994,
professeur au Collège de France,
chaire d'"Equations différentielles et systèmes dynamiques",
membre de l'Académie des sciences depuis 1994 et membre
de l'Academia Brasileira de Ciências depuis 1995.

# Références indispensables...

Albert Ducrocq et André Warusfel
*Les mathématiques : plaisir et nécessité,*
Vuibert, Paris, 2000.

Alain Bouvier, Michel George et François Le Lionnais
*Dictionnaire des mathématiques*
Presses Universitaires de France, 2005.

Amy Dahan-Dalmedico et Jeanne Peiffer
*Une histoire des mathématiques. Routes et Dédales*
Editions du Seuil, Paris, 1986.

Richard Mankiewicz *L'histoire des mathématiques*
Editions du Seuil, Paris, 2001.

Karin Chemla et Guo Shuchun
*Les neuf chapitres ; le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*
Dunod, Paris, 2005.

# Kafemath

Première séance du "kafemath" en octobre 2004

## *ASSOCIATION "KAFEMATH"*

**Art. 1. Fondation**

Il est fondé, entre les adhérents aux présents statuts, une association régie par la loi du 1° juillet 1901 ayant pour nom "Kafemath".

**Art. 2. Objet**

Cette association a pour objet le plaisir à faire des mathématiques, les découvrir, les redécouvrir, les faire aimer, comme l'énonce son texte fondateur, proposé par François Dubois en mars 2005 :
« Les mathématiques sont un élément fondamental de la culture. Mais elles sont souvent trop isolées dans des lieux réservés aux spécialistes ! Tout en restant ouvert à tous, au Kafemath, on parle de maths, on en découvre l'histoire, on en fait un peu, on en débat, on en apprend si on veut. On y rit et surtout, surtout, on y prend plaisir ! Ensemble. Et il suffit d'être passionné pour devenir co-animateur. »
Les mathématiques sont l'affaire de tous. En faciliter l'accès est l'objet du Kafemath.

Association créée en février 2011...

# Merci de votre attention... des questions ?