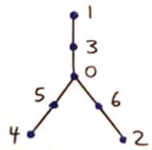
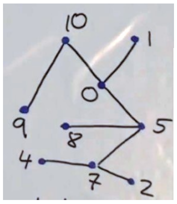
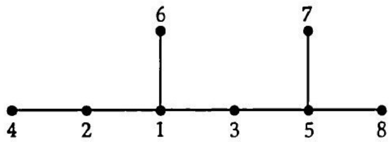
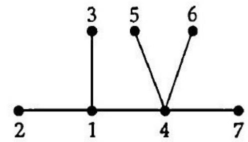
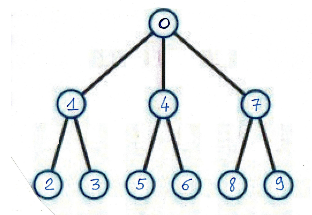
1. NUMEROTATION des SOMMETS d'un ARBRE





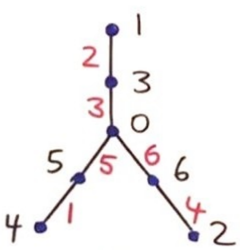




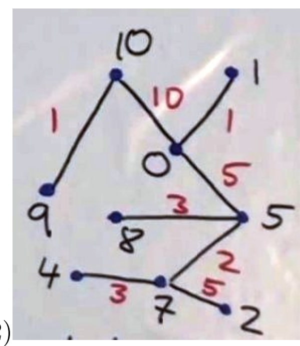


2. NUMEROTATION GRACIEUSE d'un ARBRE

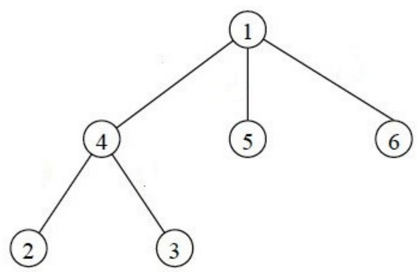
[AGR-1] Soit T un **arbre** de k sommets, dont les numéros sont pris *sans répétition* dans l'ensemble $\{0, \ldots n\}$. On donne pour numéro à chaque arc (arête) de T la **valeur absolue de la différence des numéros de ses sommets (initial et final)**. Si tous les numéros d'arc sont **distincts**, on dit que T est un **arbre gracieux** ou que la **numérotation** de T est **gracieuse**.



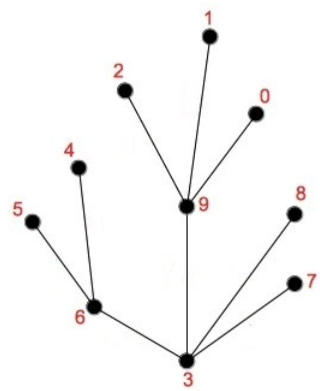
1)



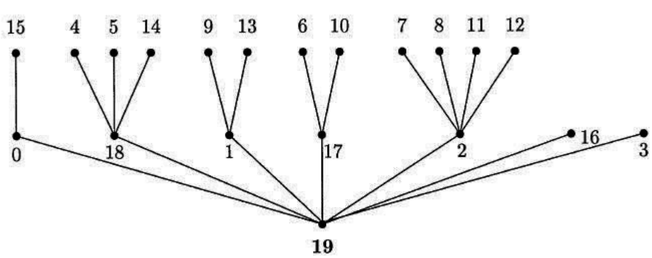
2)



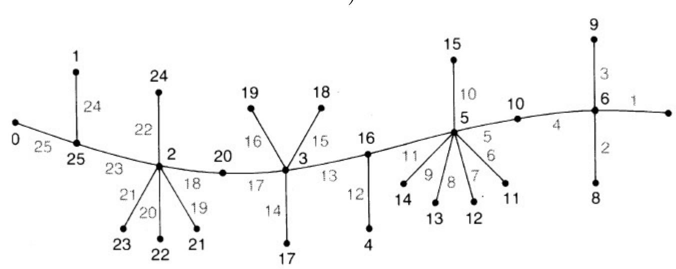
3)



4)



5)



6)

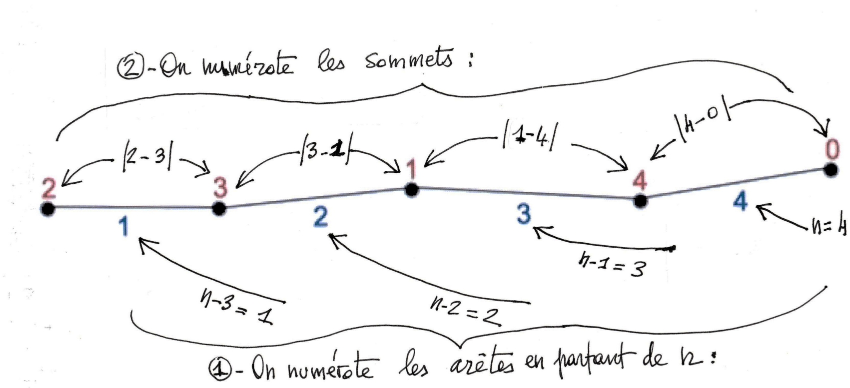
Remarque : Ici, on demande de vérifier, en calculant d'après la définition [AGR-1], le numéro de chaque arête, si la numérotation de l'arbre est gracieuse (elle ne l'est pas dans l'arbre 2 ; l'arbre 6 est une **chenille** gracieuse (elles le sont toutes) qui s'obtient à partir d'un chemin initial en ajoutant des *branches* et des *brindilles*).

3. LA CONJECTURE des ARBRES GRACIEUX

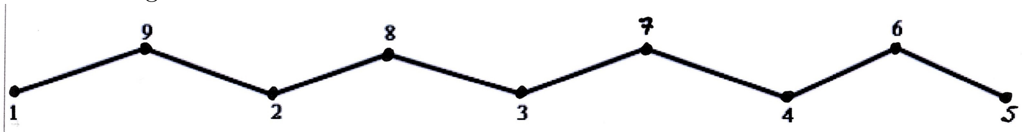
[AGR-2] **Tout arbre (mathématique) est gracieux.**

4. NUMEROTATION GRACIEUSE D'UN CHEMIN

♣ Pour numéroter gracieusement un chemin de n arêtes, on numérote toutes les arêtes successivement de 1 à n, en partant d'une extrémité, puis on numérote les sommets en partant de l'arête n :



♣ Autre numérotation gracieuse "naturelle" d'un chemin :

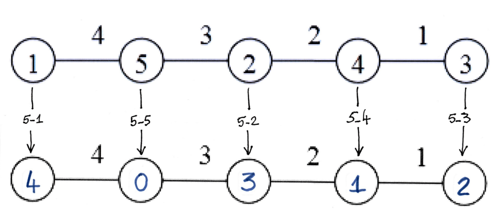


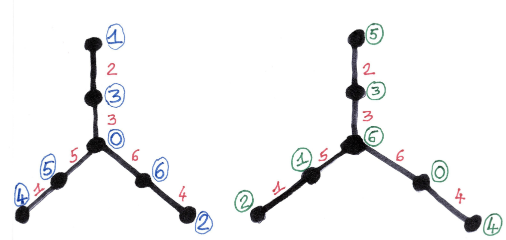
$i\in\{1,\dots,n\}$								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(i)$: 1	$9=n$	2	$8=n-1$	3	$7=n-2$	4	$6=n-3$	5
$d(i)$: 8	7	6	5	4	3	2	1	

[AGR-3] **Tous les chemins sont gracieux.**

5. CHEMINS et ARBRES GRACIEUX ONT PLUS D'UNE NUMEROTATION GRACIEUSE

[AGR-4] **Tout chemin ou arbre gracieux de plus d'une arête a au moins 2 numérotations gracieuses. Soit un chemin ou un arbre gracieux de $n \geq 2$ arêtes. On obtient une numérotation gracieuse symétrique, si, pour chaque sommet s, on remplace s par $n - s$, en laissant inchangée la numérotation des arêtes.**

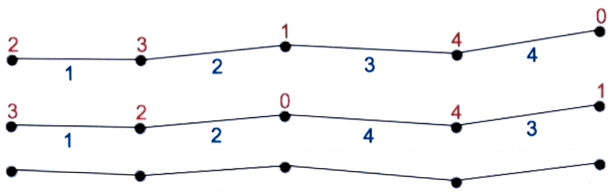


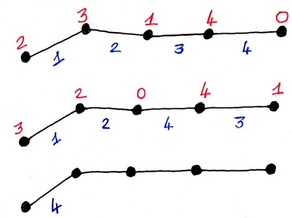


[AGR-5] **D'un chemin ou d'un arbre gracieux de plus d'une arête, on peut obtenir un autre chemin ou arbre gracieux en renumérotant les sommets à partir d'une *permutation* des numéros d'arête.**

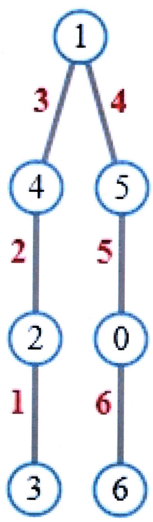
Question : Existe-t-il une numérotation gracieuse pour *toutes* les permutations des numéros d'arête d'un chemin ou d'un arbre gracieux ?

♣ Compléter les numérotations suivantes pour les rendre gracieuses :





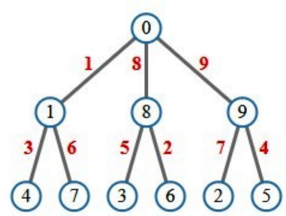
♣ <u>Quelques numérotations gracieuses d'un arbre T_1 de $n = 5$ arêtes.</u> Toutes les numérotations suivantes rendent l'arbre T_1 gracieux. En existe-t-il d'autres ?



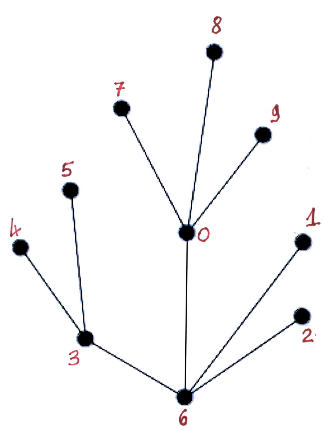
	NUMEROTATIONS GRACIEUSES												
1	3	1	2	2	4	3	1	4	5	5	0	6	6
2	4	3	1	2	3	1	2	4	6	6	0	5	5
3	3	3	6	6	0	5	5	4	1	1	2	2	4
4	2	4	6	6	0	5	5	2	3	1	4	3	1
5	2	4	6	6	0	5	5	1	4	2	1	2	3
6	3	2	5	5	0	6	6	4	2	1	1	3	4
7	1	4	5	5	0	6	6	3	3	1	2	2	4
8	1	4	5	5	0	6	6	3	3	1	4	2	2

♣ <u>Numérotation gracieuse d'arbres T_2 et T_3 de $n = 9$ arêtes.</u> Les arbres T_2 et T_3 de $n = 9$ arêtes sont gracieux. Trouver d'autres numérotations gracieuses de T_2 et T_3 :

i) en calculant son symétrique   ii) en partant de permutations des arêtes



T_2

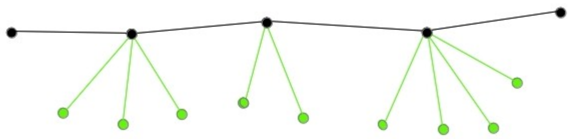


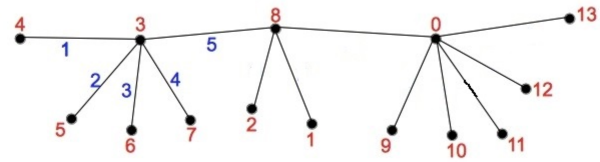
T_3

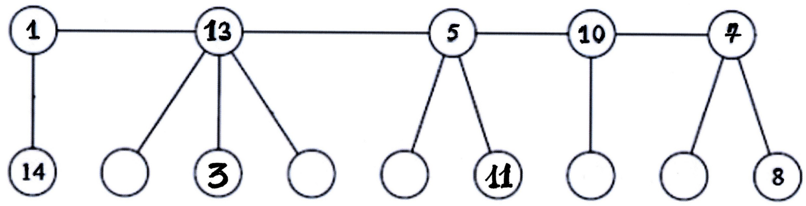
6. <u>NUMEROTATION GRACIEUSE D'AUTRES TYPES DE GRAPHES</u>

♣ **La notion de numérotation gracieuse s'étend à toutes sortes de graphes**.

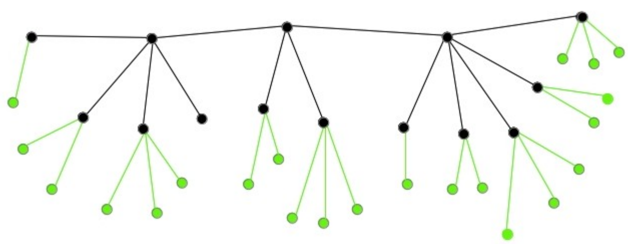
[AGR-6] **Toutes les <u>chenilles</u> sont gracieuses**.



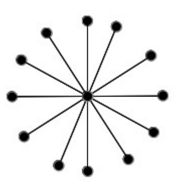


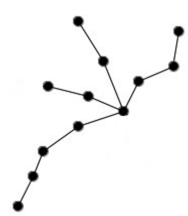


♣ En revanche, on ne connaît pas de méthode pour obtenir la numérotation gracieuse d'un **homard** :



♣ On numérote facilement les **étoiles**, mais on ne sait pas en général numéroter les **araignées** qui ont plus de 4 pattes :





♣ <u>**Conclusion**</u> : La plupart des graphes n'ont pas de numérotation gracieuse ! (dixit P. Erdös) Et, à ce jour, la **conjecture des arbres gracieux** résiste encore !

♣ Pour finir, essayez de numéroter gracieusement l'arbre suivant (d'après Shalom Eliahou, Le sudoku arboricole, http ://images.math.cnrs.fr) :