Principes de démonstration

8 octobre 2015

BABYLONE

vers - 1700

EGYPTE

Papyrus de Rhind
Thèbes vers - 2000

Préoccupations pratiques:
architecture, élevage, commerce, remembrement, héritage, …

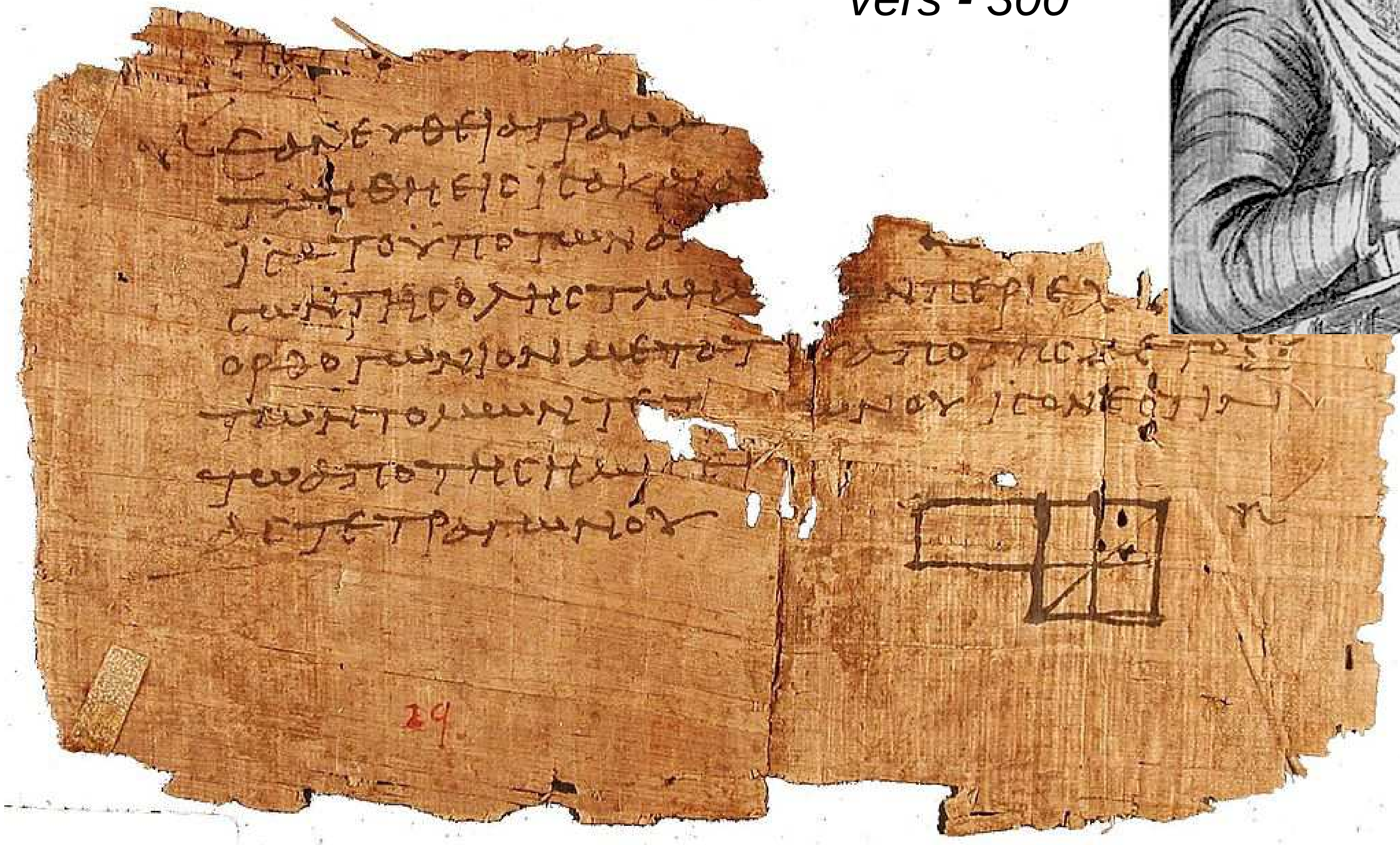
Méthodes: algorithmes, exemples, illustrations.

Triplets pythagoriciens: (3, 4, 5), (119, 120, 169)
(tablette Pimpton 322)

Exigence d'une démonstration à partir du Vème siècle

Les *Eléments* d'Euclide

vers - 300



Papyrus Oxyrhyncus 29, vers IIe siècle

Les *Eléments* d'Euclide (-325; -265)

Eléments: 465 propositions en 13 livres

Livres I à IV : Géométrie plane

(Pythagore, cercle, polygones réguliers)

Livres V à X : Proportions

(Thalès, $\sqrt{2}$)

Livres XI à XIII : Géométrie dans l'espace

(Polyèdres réguliers, aires, volumes cône, cylindre, sphère)

Comment la démonstration a fait ses preuves?

Mais ce que nous appelons ici savoir,
c'est connaître par le moyen de la démonstration.
Aristote

Depuis les grecs, qui dit mathématique dit démonstration.
Bourbaki, Théorie des ensemble, Eléments de Mathématiques

Communication, volonté de convaincre

Axiomes, propositions, corollaires

EUCLIDE (vers -300) ***Eléments*** : 13 livres, 465 propositions

1) Principes premiers (*définition des termes employés*)
   Notions communes (*axiomes*)
   Postulats géométriques (*5*)
2) Propositions démontrées

Les démonstrations reposent sur trois éléments essentiels:
- évidence des axiomes
- déduction logique
- contemplation des figures

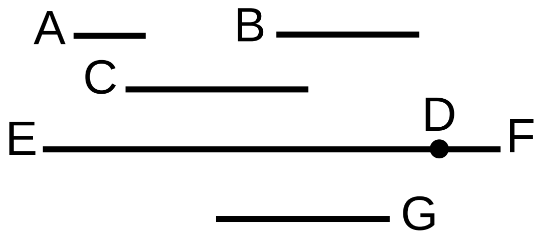
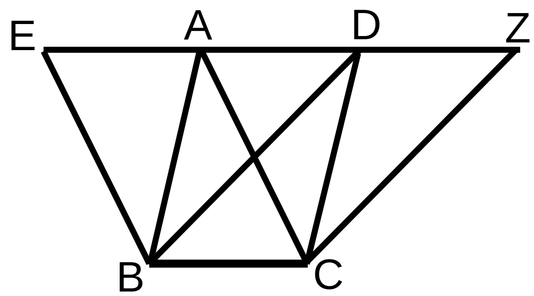
Structure d'une démonstration

- Enoncé (*protasis*)
- Exposition (*ekthesis*)
- Détermination (*diorismos*)
- Construction (*kaskateu*)
- Démonstration (*apodeixis*)
- Conclusion (*sumperasma*)

Exemples :

Prop.20 livre IX : les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposés;

Prop. 37 livre I : les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux (surface).

1) énoncé : *proposition à démontrer*	Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombre premiers proposés.	Les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux.
2) exposition : *donner un exemple générique*	Soient les nombres premiers A, B, C.	Triangles ABC, DBC sur la même base BC et entre les mêmes parallèles AD, BC.
3) détermination : *synthèse de 1) et 2)*	Je dis : les nombres premiers sont plus nombreux que A, B, C.	Je dis : le triangle ABC est égal au triangle DBC.
4) construction : *construction graphique avec ajouts d'éléments nécessaires à la démonstration*	Que le produit de A, B, C soit DE et que l'unité DF soit ajoutée à DE. 	Prolongeons de part et d'autre la droite AD aux points E, Z, et par le point B conduisons BE parallèle à CA, et par le point C conduisons CZ parallèle à BD. 

5) démonstration : *prouver la véracité de l'énoncé sur l'exemple*	Ou EF est premier ou bien non. S'il est premier, les nombres A, B, C, EF sont plus nombreux que A, B, C. S'il n'est pas premier, il est divisible par un nombre premier, soit G. Je dis : G n'est pas un quelconque des A, B, C. Sinon, G divise DE, mais aussi EF ; il divisera aussi l'unité DF restante tout en étant un nombre, ce qui est absurde. Donc sont trouvés les nombres A, B, C, G plus nombreux que la multitude proposée A, B, C.	Les figures EBCA, DBCZ sont des parallélogrammes égaux (prop. 35) car ils sont sur la même base BC, et entre les mêmes parallèles ; mais le triangle ABC est la moitié du parallélogramme EBCA ; car la diagonale AB le partage en deux parties égales ; le triangle DBC est la moitié du parallélogramme DBCZ, car la diagonale DC le partage en deux parties égales ; mais les moitiés des quantités égales sont égales entre elles ; donc le triangle ABC est égal au triangle DBC.
6) conclusion : *reformuler la proposition en toute généralité*	**Donc**, les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposés. **Ce qu'il fallait démontrer.**	Donc, les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux. **Ce qu'il fallait démontrer.**

Induction

Déduction

Syllogisme

Vocabulaire démonstration (- univoque) preuve

Preuve par 9 pas preuve

Syllogismes: 4 types de propositions possibles

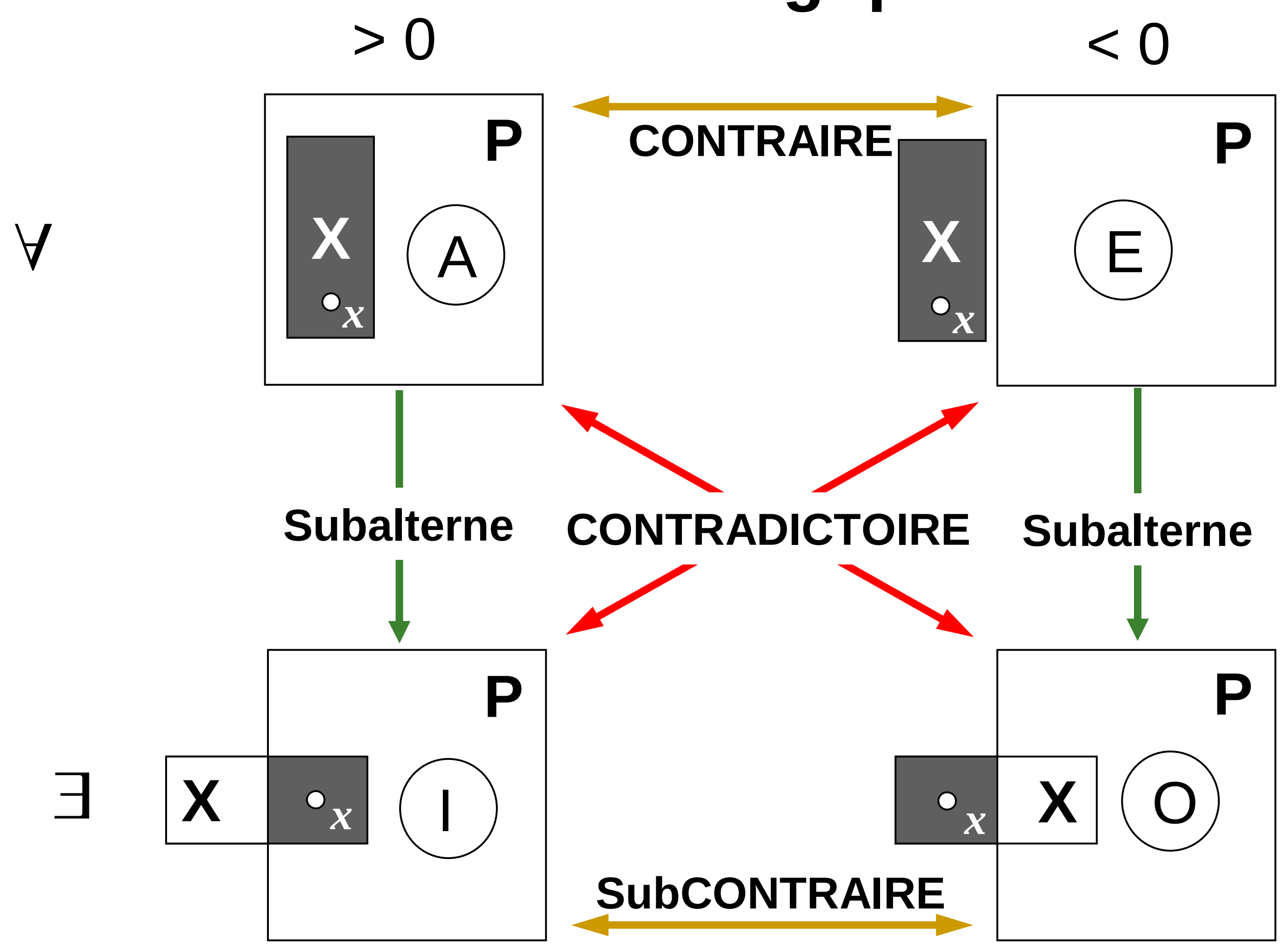
A r **I** st **O** t **E**

- prop. A: universelle affirmative : Tout x est P
- prop. E: universelle négative : Tout x est non-P
- prop. I: particulière affirmative : Quelque x est P
- prop. O: particulière négative : Quelque x est non-P

Tous les habitués de Kafémaths sont sympathiques *(A)*
Certains mathématiciens ne sont pas sympathiques *(O)*
Donc,
Certains mathématiciens ne fréquentent pas Kafémaths (O)

baroco

Carré logique



256 structures potentielles, 24 valides

E	Classes (α, β, γ,...)	Propositions (p, q, r,...)
1	Univers (1)	Tautologie (V)
0	Vide (0)	Contradiction (F)
+	Union ($\bigcup$)	Disjonction ($\bigvee$)
x	Intersection ($\bigcap$)	Conjonction ($\bigwedge$)
—	Complément (—)	Négation ($\neg$)
$\subset$	Inclusion de classe ($\subset$)	Implication matérielle ($\supset$)
=	Identité entre classe (=)	Equivalence matérielle ($\equiv$)

1	$A \Leftrightarrow \neg\neg A$	double négation
2	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	1ère loi de Morgan
3	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	2ème loi de Morgan
4	$A \vee \neg A$	tiers exclus
5	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$	
6	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	contraposition
7	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	
8	$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	transitivité de l'implication
9	$(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	distributivité
10	$(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	distributivité

Principes de démonstration

Méthodes du discours

Raisonnement par l’absurde

Principe des tiroirs

Raisonnement par récurrence

Principe de l’invariance

Principe de l’extremum

Preuve par coloriage

Preuve par généralisation

Dualité, analogie

Beauté

...

Principes de démonstration

Outils méthodologiques:

Chaînon manquant, symétrie, généralisation, ...

Exemples

Antoine Arnaud (1612-1694) **Pierre Nicole** (1625-1695)

LA LOGIQVE
OV
L'ART DE PENSER:

Contenant, outre les Regles communes, pluſieurs obſeruations nouvelles propres à former le iugement.

A PARIS,
Chez { IEAN GVIGNART le pere, au premier Pillier de la grand' Sale du Palais, au Sacrifice d'Abel.
CHARLES SAVREVX, au pied de la Tour de Nôtre-Dame.
IEAN DE LAVNAY, ſous le Porche des Eſcoles de Sorbonne.

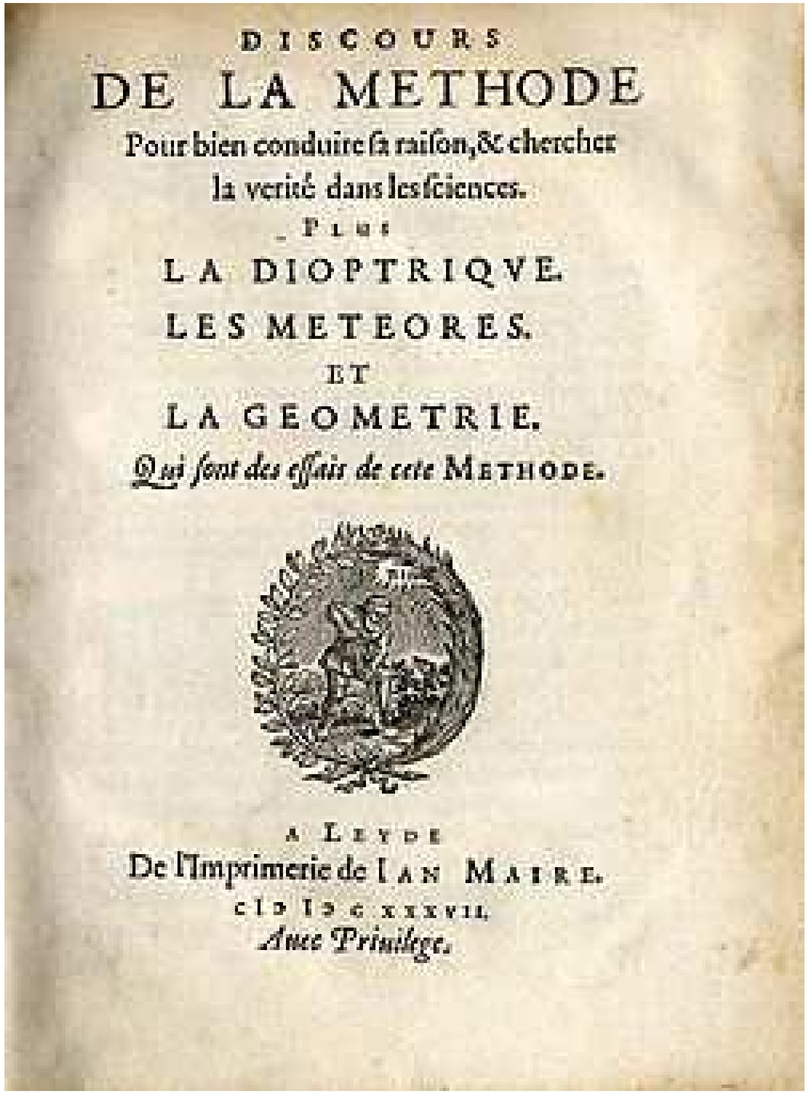
M. DC. LXII.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

LA Logique eſt l'art de bien conduire ſa raiſon dans la connoiſſance des choſes, tant pour s'en inſtruire ſoi-même, que pour en inſtruire les autres.

Cét art conſiſte dans les reflexions que les hommes ont faites ſur les quatre principales operations de leur eſprit, *conceuoir*, *iuger*, *raiſonner*, *& ordonner*.

6 DISCOVRS.

Ainſi la principale application qu'on devroit avoir, ſeroit de former ſon iugement, & de le rendre auſſi exact qu'il le peut eſtre, & c'eſt à quoy devroit tendre la plus grande partie de nos etudes. On ſe ſert de la raiſon comme d'vn inſtrument pour acquerir les ſciences; & on ſe devroit ſeruir au contraire des ſciences comme d'vn inſtrument pour perfectionner ſa raiſon: la iuſteſſe de l'eſprit eſtant infiniment plus conſiderable que toutes les connoiſſances ſpeculatiues, auſquelles on peut arriver par le moyen des ſciences les plus veritables & les plus ſolides. Ce qui doit porter les perſonnes ſages à ne s'y engager qu'autant qu'elles peuvent ſervir à cette fin, & à n'en faire que l'exercice, & non l'occupation des forces de leur eſprit.



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
Plus
LA DIOPTRIQUE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A Leyde
De l'Imprimerie de Ian Maire.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Avec Privilege.

Le bon sens est la chose du monde la mieux partagée : car chacun pense en être si bien pourvu, que ceux même qui sont les plus difficiles à contenter en toute autre chose, n'ont point coutume d'en désirer plus qu'ils en ont. En quoi il n'est pas vraisemblable que tous se trompent; mais plutôt cela témoigne que la puissance de bien juger, et distinguer le vrai d'avec le faux, qui est proprement ce qu'on nomme le bon sens ou la raison, est naturellement égale en tous les hommes; et ainsi que la diversité de nos opinions ne vient pas de ce que les uns sont plus raisonnables que les autres, mais seulement de ce que nous conduisons nos pensées par diverses voies, et ne considérons pas les mêmes choses. Car **ce n'est pas assez d'avoir l'esprit bon, mais le principal est de l'appliquer bien**.

Et comme la multitude des lois fournit souvent des excuses aux vices, en sorte qu'un État est bien mieux réglé lorsque, n'en ayant que fort peu, elles y sont fort étroitement observées; ainsi, au lieu de ce grand nombre de préceptes dont la logique est composée, je crus que j'aurais assez des **quatre suivants**, pourvu que je prisse une ferme et constante résolution de ne manquer pas une seule fois à les observer.

Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie, que je ne la connusse évidemment être telle : c'est-à-dire, d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention; et de ne comprendre rien de plus en mes jugements, que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.

Le second, de **diviser chacune des difficultés** que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.

Le troisième, de **conduire par ordre mes pensées**, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusques à la connaissance des plus composés; et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres.

Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de **ne rien omettre**.

On retrouve la méthodologie d’Euclide

Conduire par ordre ses pensées

Sur la tombe de Diophante :

Passant, c’est ici le tombeau de Diophante.
C’est lui qui t’apprend le nombre d’années qu’il a vécu.
Sa jeunesse en a occupé le sixième.
Puis sa joue se couvrit d’un premier duvet pendant le douzième.
Il passa encore le septième de sa vie avant de prendre une épouse et, cinq ans plus tard, il eut un bel enfant qui après avoir atteint la moitié de l’âge final de son père, périt d’une mort malheureuse.
Son père lui survécu quatre années.
De tout ceci, déduis son âge.

Conduire par ordre ses pensées

Sur la tombe de Diophante :

Passant, c’est ici le tombeau de Diophante.
C’est lui qui t’apprend le nombre d’années qu’il a vécu.
Sa jeunesse en a occupé le sixième.
Puis sa joue se couvrit d’un premier duvet pendant le douzième.
Il passa encore le septième de sa vie avant de prendre une épouse et, cinq ans plus tard, il eut un bel enfant qui après avoir atteint la moitié de l’âge final de son père, périt d’une mort malheureuse.
Son père lui survécu quatre années.
De tout ceci, déduis son âge.

$X/6 + X/12 + X/7 + 5 + X/2 + 4 = X$ $\qquad$ $X = 84$

Gustave Flaubert, dans une lettre envoyée à sa sœur Caroline en 1841, le pose de cette façon :

« Puisque tu fais de la géométrie et de la trigonométrie, je vais te donner un problème :
Un navire est en mer, il est parti de Boston chargé de coton, il jauge 200 tonneaux,
il fait voile vers Le Havre,
le grand mât est cassé,
il y a un mousse sur le gaillard d'avant,
les passagers sont au nombre de douze,
le vent souffle NNE,
l'horloge marque trois heures un quart d'après-midi,
on est au mois de mai...»

Gustave Flaubert, dans une lettre envoyée à sa sœur Caroline en 1841, le pose de cette façon :

« Puisque tu fais de la géométrie et de la trigonométrie, je vais te donner un problème :
Un navire est en mer, il est parti de Boston chargé de coton, il jauge 200 tonneaux,
il fait voile vers Le Havre,
le grand mât est cassé,
il y a un mousse sur le gaillard d'avant,
les passagers sont au nombre de douze,
le vent souffle NNE,
l'horloge marque trois heures un quart d'après-midi,
on est au mois de mai...

On demande l'âge du capitaine! »

Conduire par ordre ses pensées

Un gros concombre, composé à 99% d'eau et le reste de matière sèche, possède une masse de 990 g.
Après quelques jours de dessèchement, il ne contient plus que 98% d'eau.

Quel est alors sa masse?

Ne rien omettre

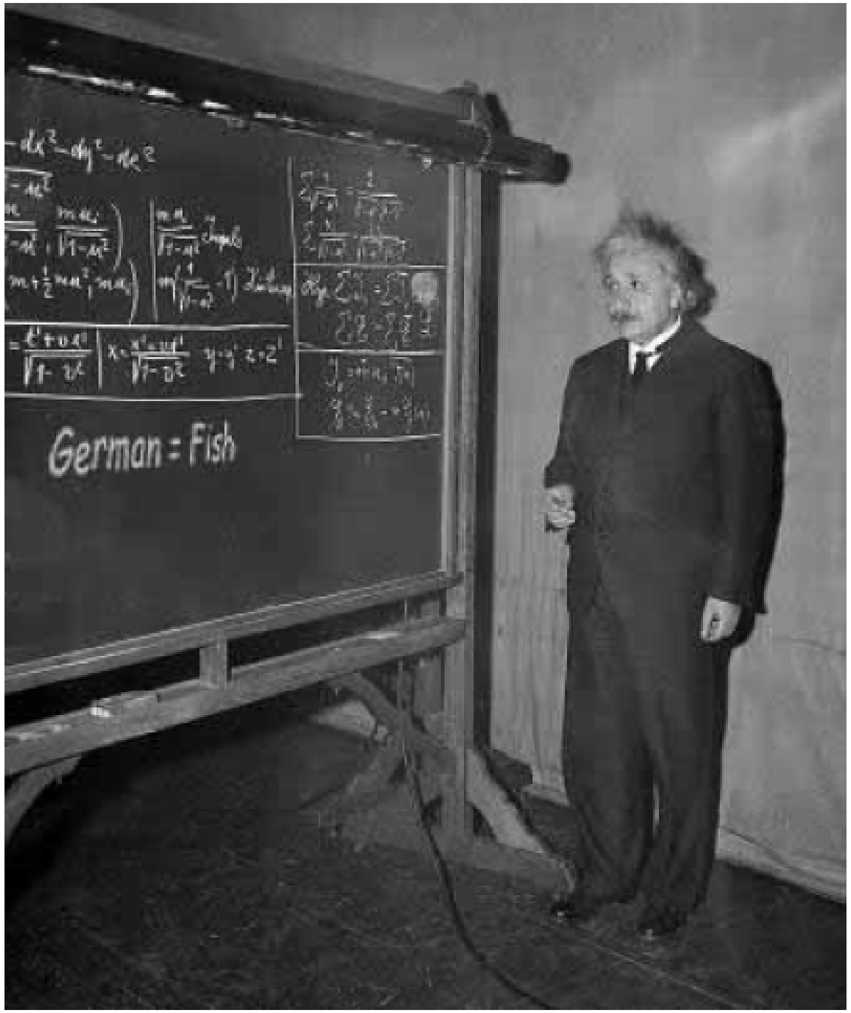
5 hommes de nationalité et de profession différentes habitent avec leur animal préféré 5 maisons de couleurs différentes où ils boivent leur boisson préférée.

1. L'Anglais habite la maison rouge.
2. Le Suédois possède un chien.
3. Le Danois boit du thé
4. La maison verte est située à gauche de la maison blanche.
5. Dans la maison verte, on boit du café.
6. Le fumeur de Pall Mall possède un oiseau.
7. Dans la maison du milieu, on boit du lait.
8. Dans la maison jaune, on fume des Dunhill.
9. Le Norvégien habite la première maison.
10. Le fumeur de Rothmann a un voisin qui possède un chat.
11. Celui qui possède un cheval a un voisin fume des Dunhill.
12. Le fumeur de Philip Morris boit de la bière.
13. Le Norvégien est voisin de la maison bleue.
14. L'Allemand fume des Marlboro.
15. Le fumeur de Rothmann a un voisin qui boit de l'eau.

Qui s'occupe des poissons?

Ne rien omettre

Qui s’occupe des poissons?



Diviser les difficultés en autant de parcelles

Cryptarithme : équation arithmétique où des lettres représentent les chiffres à trouver.

chaque lettre représente un seul chiffre et le premier chiffre de chaque nombre est différent de zéro.

$$
\begin{array}{r}
\text{MATHS} \\
+\ \text{MATHS} \\
+\ \text{MATHS} \\
+\ \text{MATHS} \\
+\ \text{MATHS} \\
\hline
\text{REGAL}
\end{array}
$$

Solution unique pour L>0

Ph. Fondanaiche - *Diophante*

Diviser les difficultés en autant de parcelles

<u>Cryptarithme :</u> équation arithmétique où des lettres représentent les chiffres à trouver.

chaque lettre représente un seul chiffre et le premier chiffre de chaque nombre est différent de zéro.

```
  MATHS
+ MATHS
+ MATHS
+ MATHS
+ MATHS
-------
  REGAL
```

Solution unique pour L>0

1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	**G**	**A**	**H**	**L**	**R**	**S**	**T**	**E**

Ph. Fondanaiche - *Diophante*

ABSURDE (apagogie)

Lien avec le principe du tiers exclus

Méthode utilisée pour montrer la non finitude du nombre de nombre premiers

$\sqrt{2}$ est irrationnel:

- classique:

Si $\sqrt{2}$ est rationnel, alors il existe une fraction irréductible telle que:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ avec } p > q$$

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow p = 2m \Leftrightarrow 4m^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2m^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{q}{m} \text{ avec } q < p \text{ et } m < q$$

ABSURDE (apagogie)

Lien avec le principe du tiers exclus

=> raisonnement direct

$\sqrt{2}$ est irrationnel:

- méthode de la descente infinie (**Fermat**): **(→ récurrence)**

Si $\sqrt{2}$ est rationnel, alors il existe une fraction telle que:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ avec } p > q$$

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow p = 2m \Leftrightarrow 4m^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2m^2$$

$$\Rightarrow q = 2n \text{ et } \sqrt{2} = \frac{m}{n} \text{ avec } m < p \text{ et } n < q$$

Descente infinie impossible

Principe des tiroirs

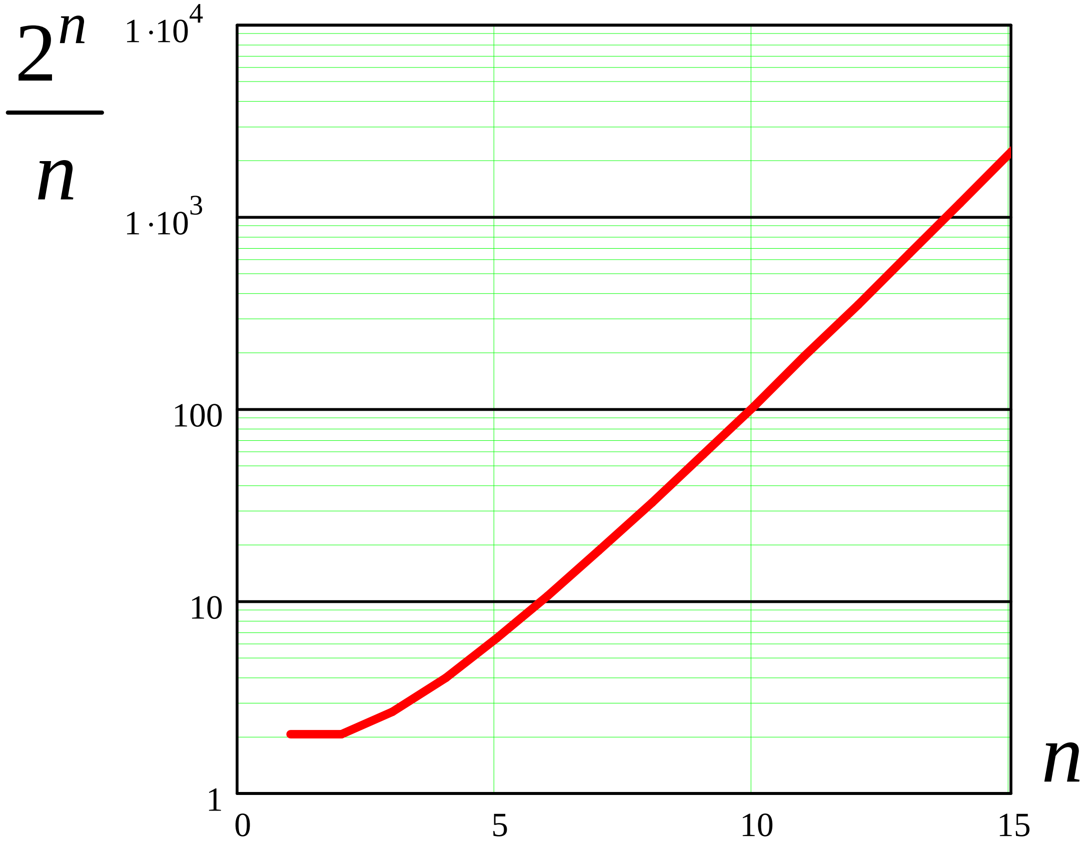
Pósa Lájos en 1959 pas encore 12 ans.

Erdös :
Démontrez que, pour n+1 entiers inférieurs ou égaux à 2n, il existe au moins une paire d'entiers premiers entre eux.

Quel dommage qu'il soit mort si jeune!

Revue, concours, télé, lycée Fazekas

Verres de bière, cheveux, nombre de connaissances



Raisonnement par récurrence

Euclide, Fermat, Pascal (1623-1662)

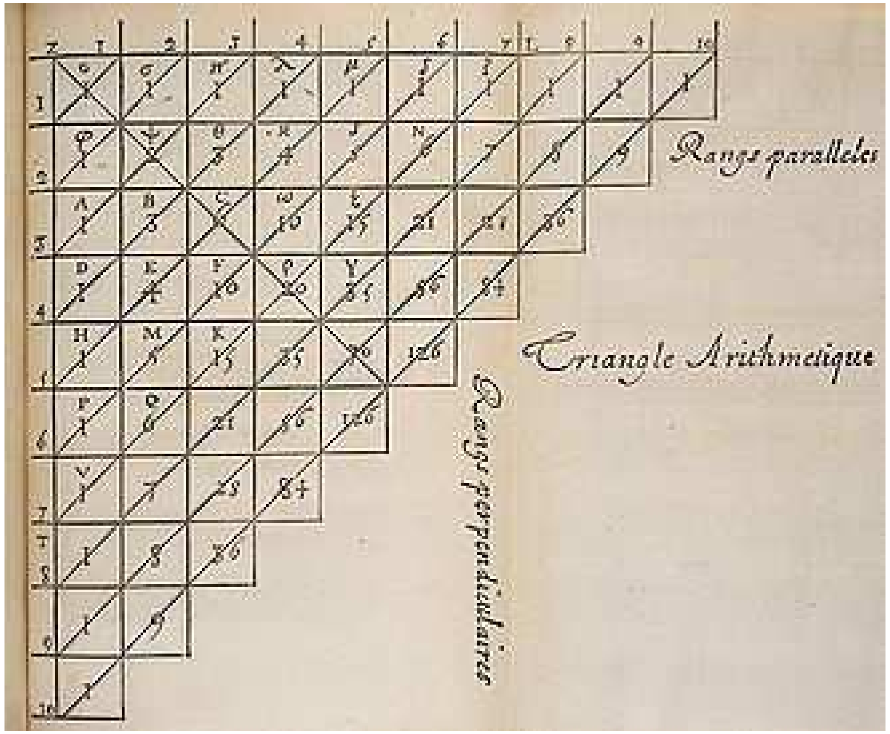
- P(0) vraie
- P(n) => P(n+1)

Somme des entiers: $S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$

- $S(1) = 1$; $S(2) = 3$
- $S(n)+(n+1)=\dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}=S(n+1)$

Raisonnement par récurrence

Raisonnement par récurrence



Triangle de PASCAL

$$\binom{n}{p} = \frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1}$$

Raisonnement par récurrence

Problème de l'induction

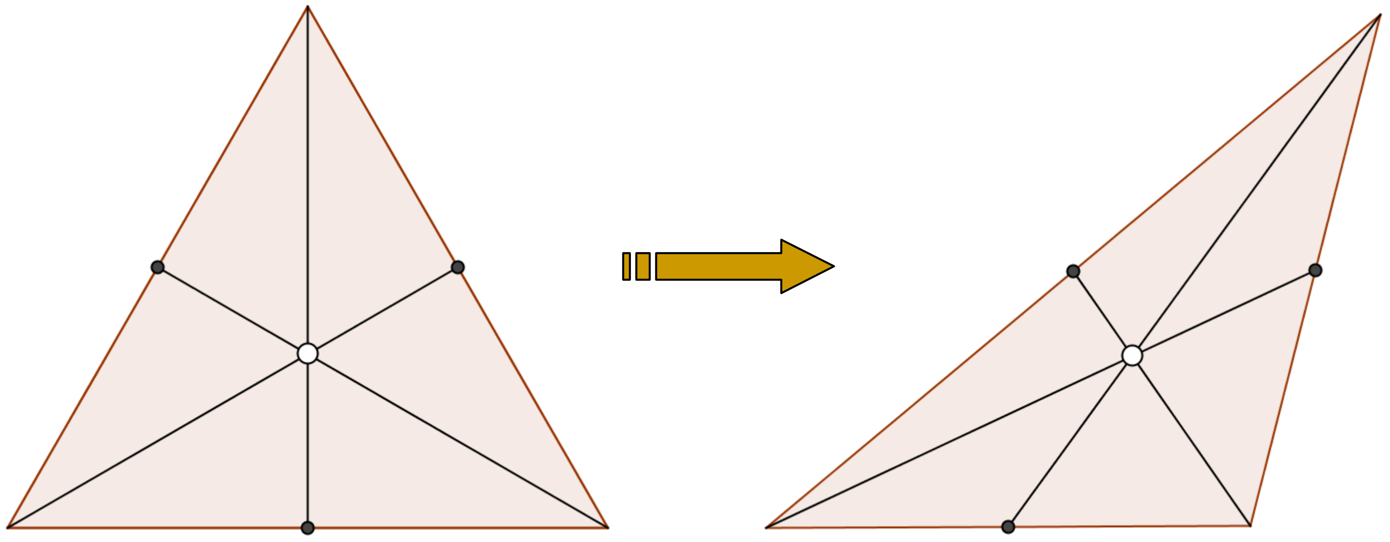
$S_2(n)$ = somme des n premiers carrés.

$S_2(1)$	S2(2)	S2(3)	S2(4)	S2(5)	S2(6) ...		
4	9	16	25	36	49	....	
5	7	9	11	13	.....		
2	2	2	2	.....			

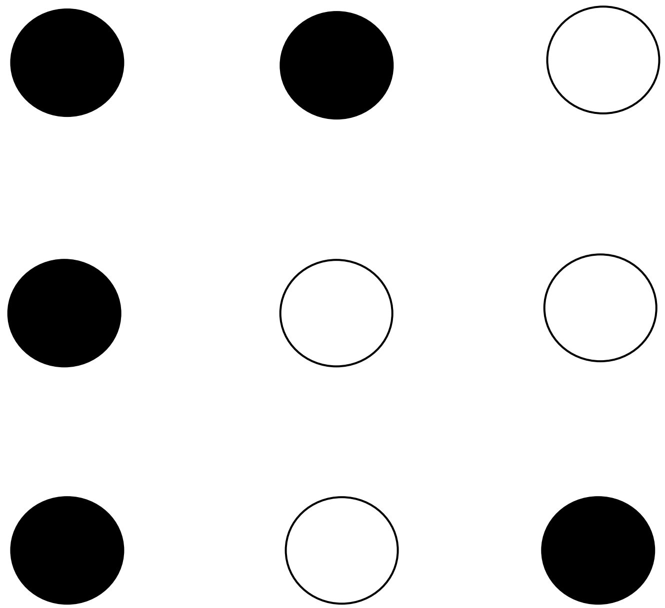
=> S2(n) polynôme de degré 3.

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Affinité, médianes, surface ellipse

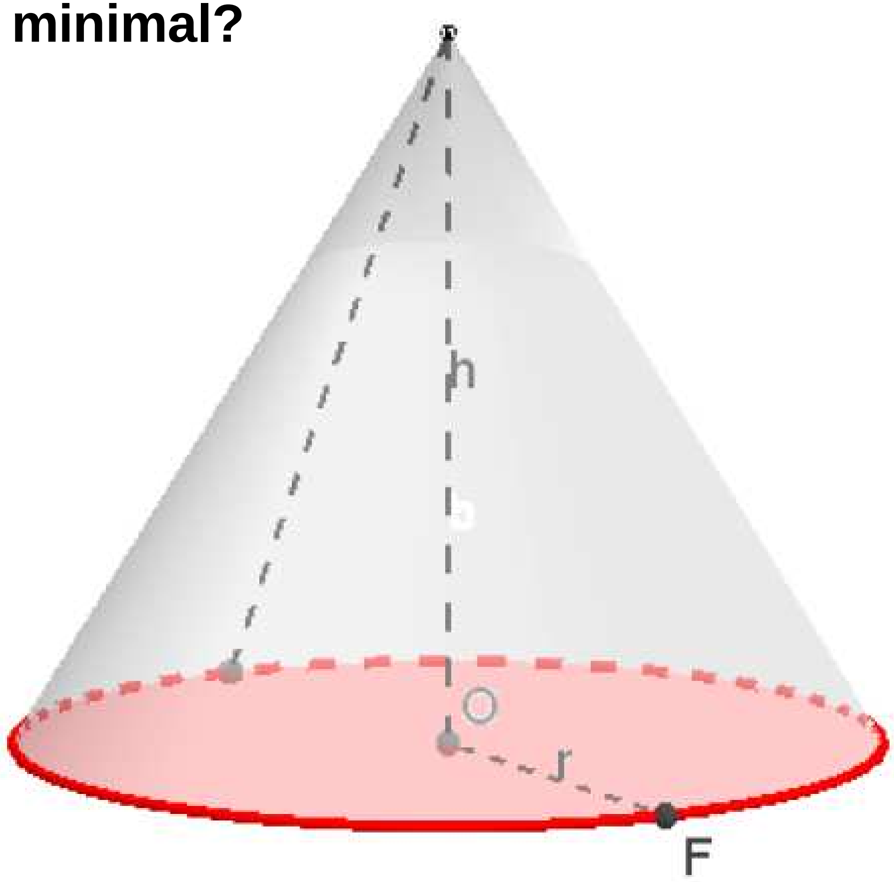


Invariance



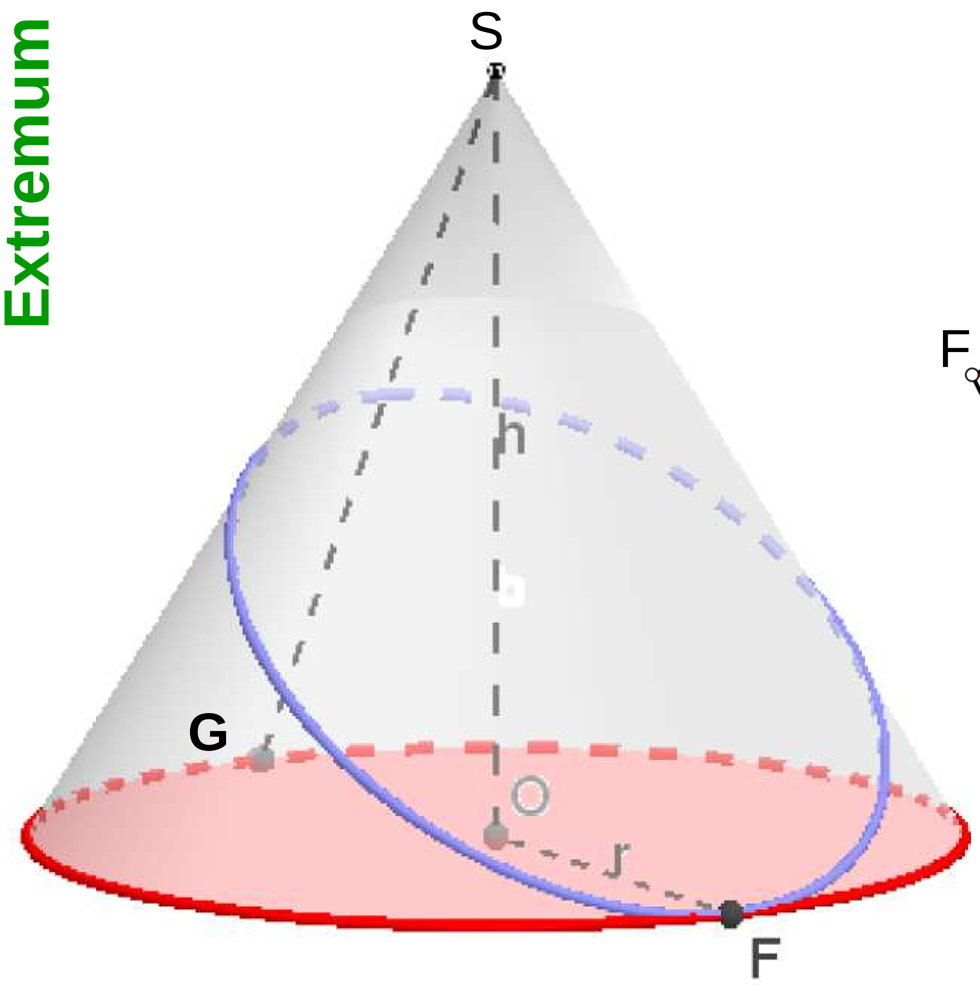
Extremum

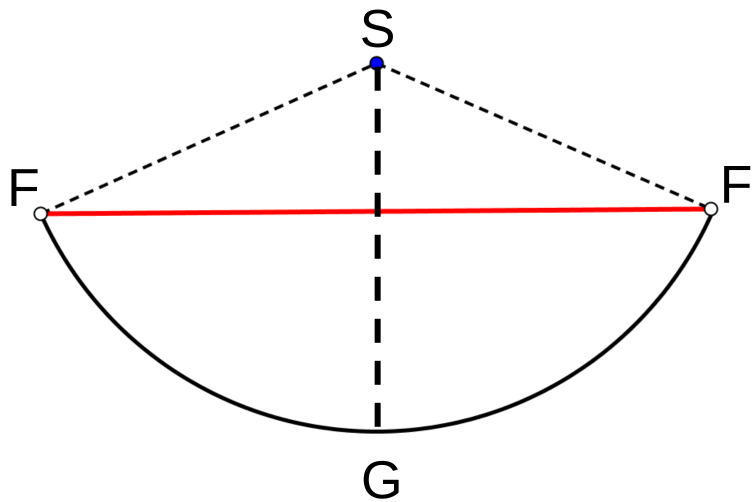
Parcours minimal?



Extremum

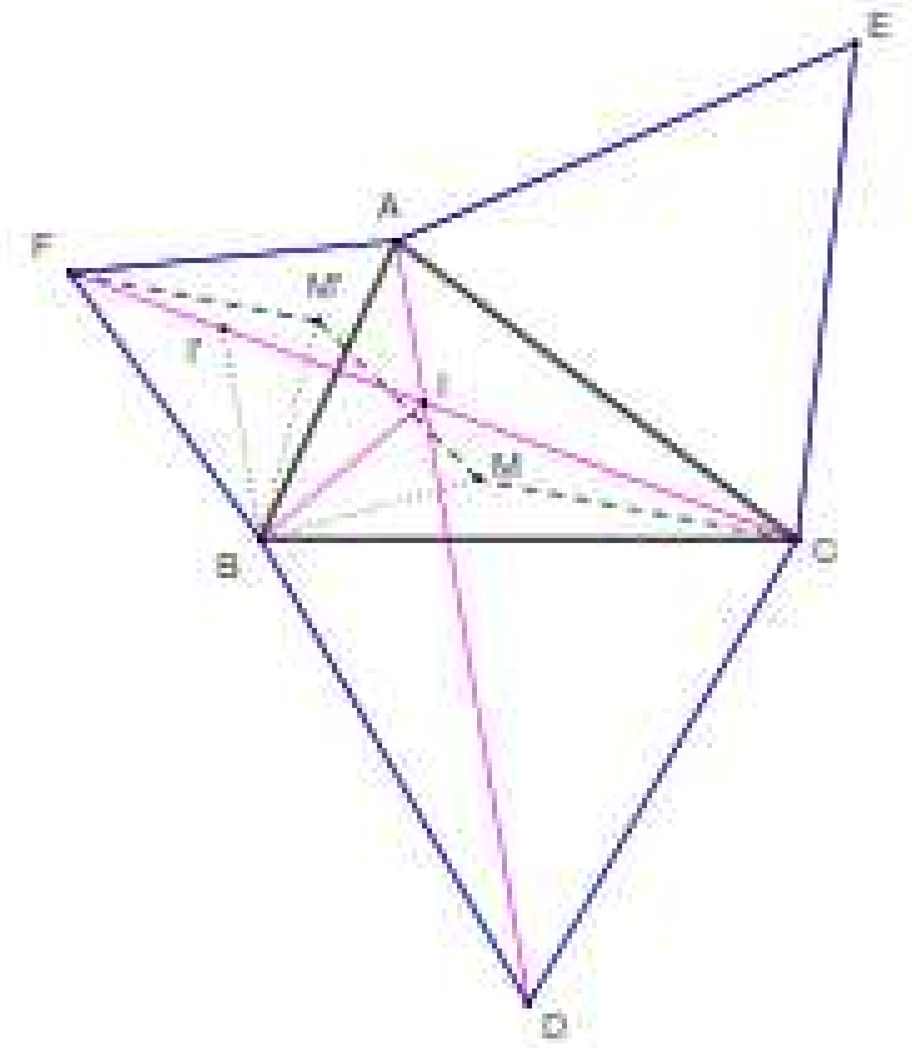
Extremum



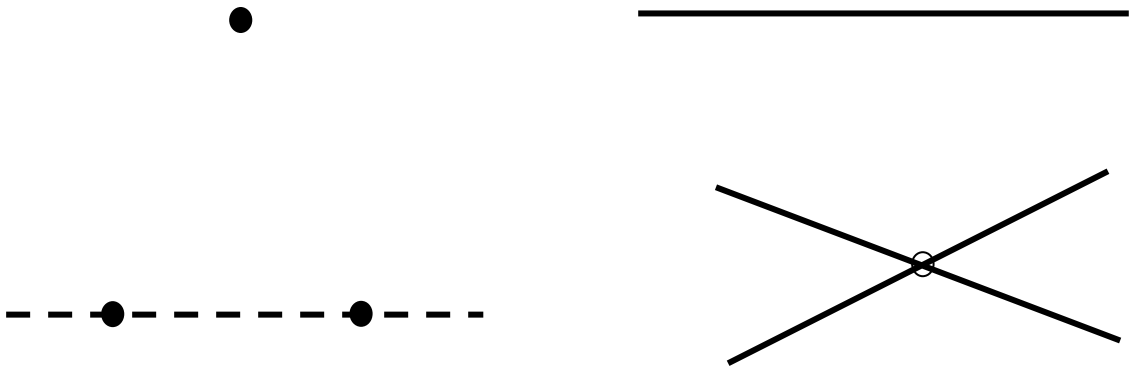


Extremum

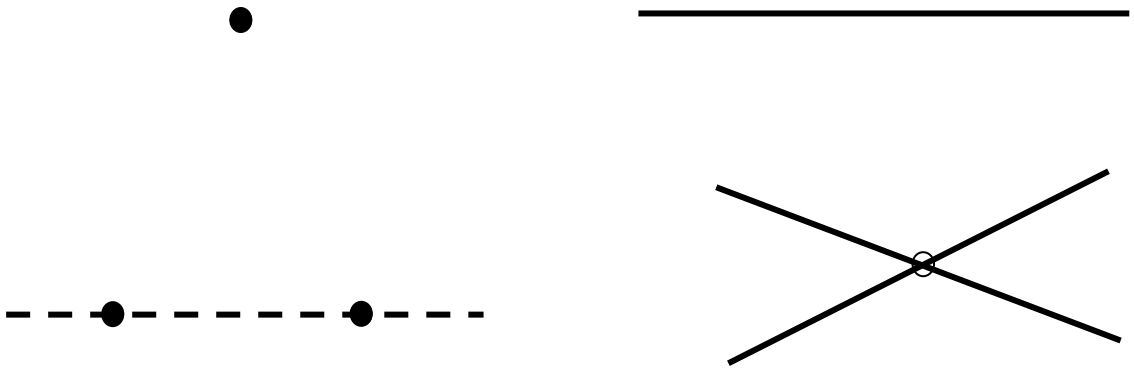
Extremum

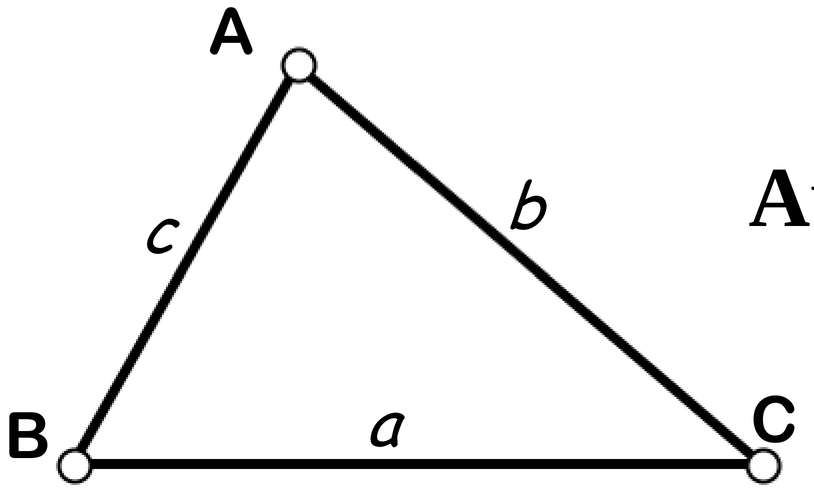


Dualité point - droite

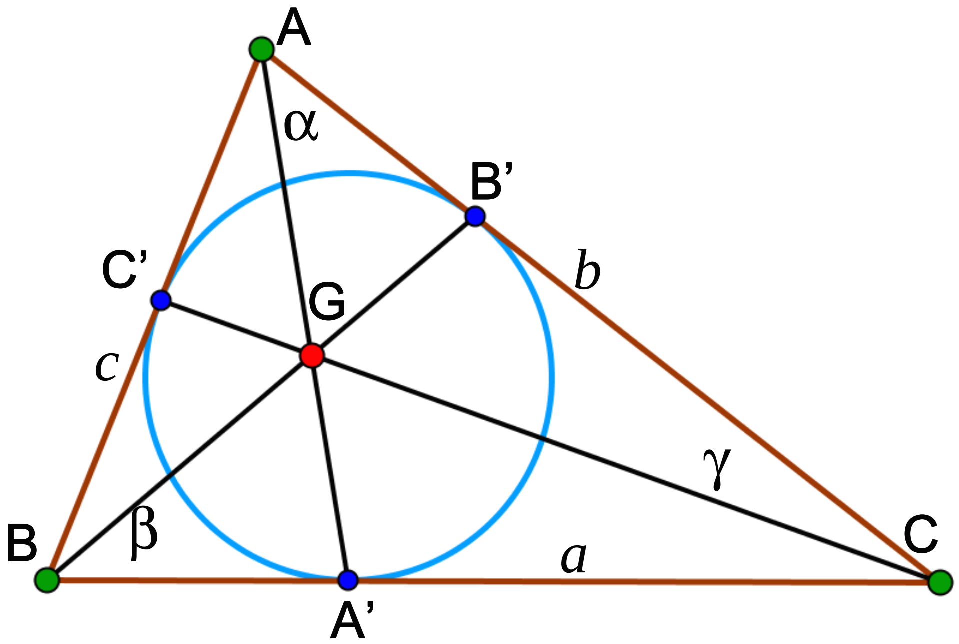


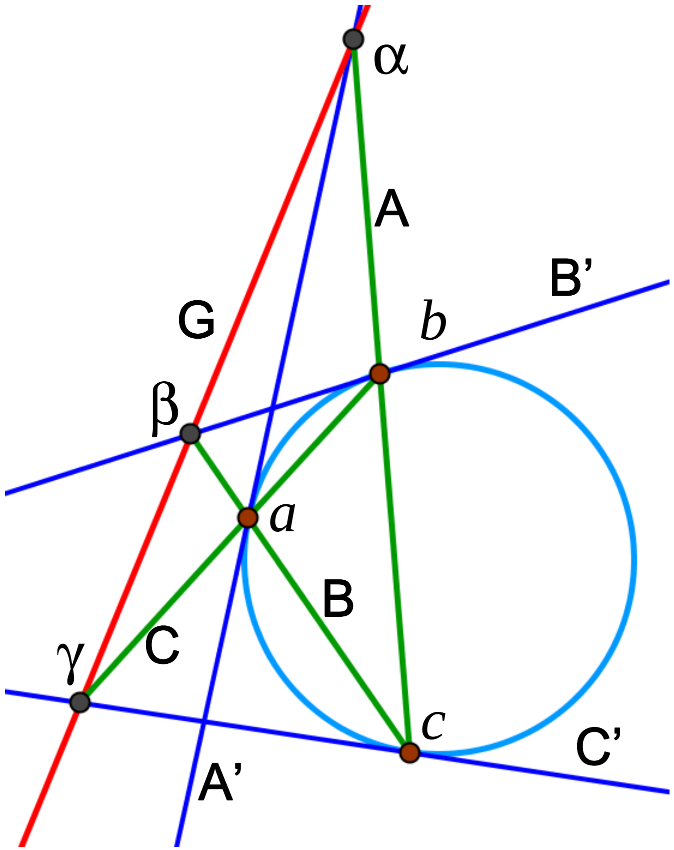
Dualité point - droite





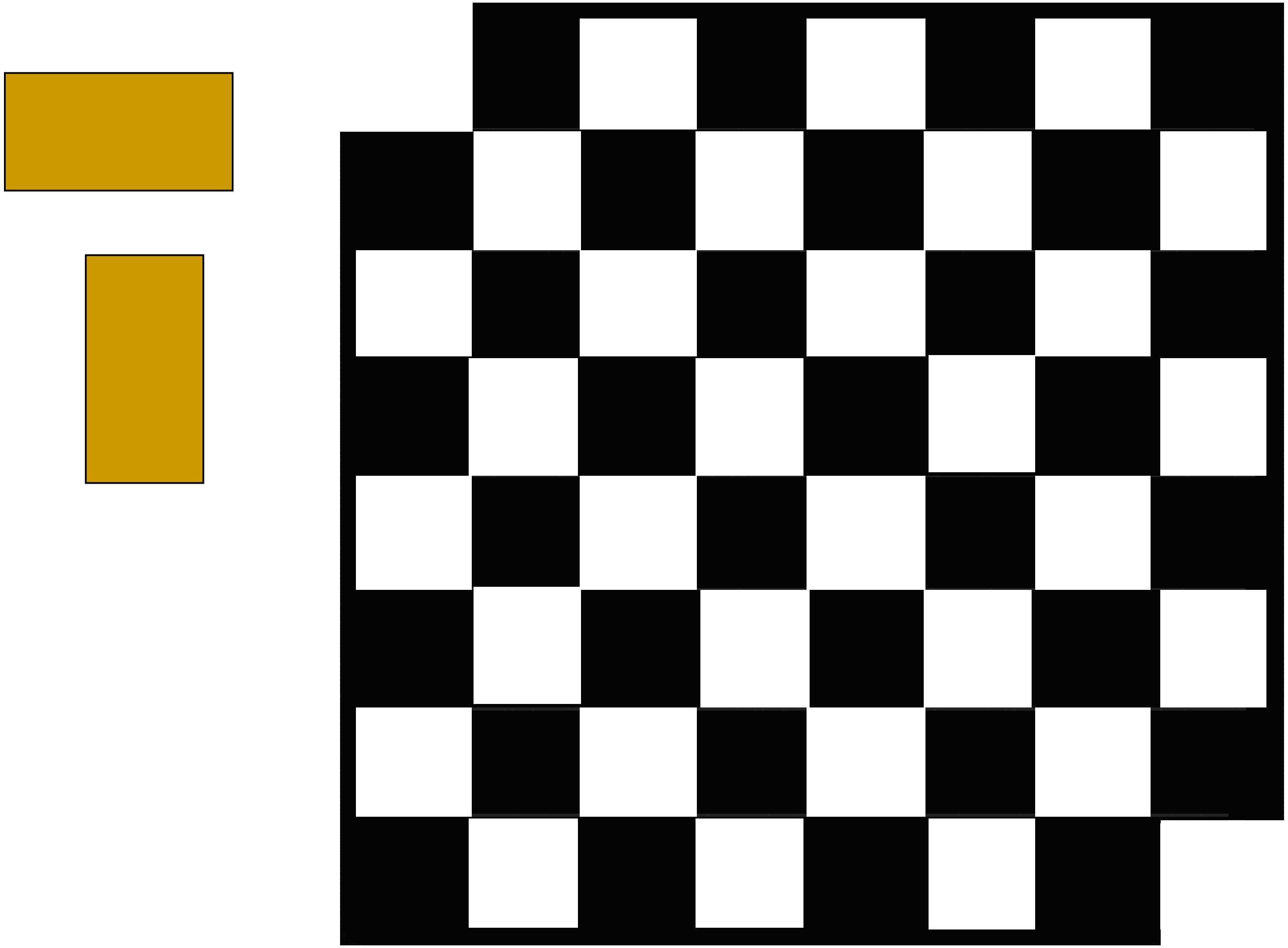
Auto-Dualité


A
α
B'
b
C'
G
c
γ
B
β
a
C
A'


α
A
B'
G
b
β
a
B
C
γ
c
C'
A'

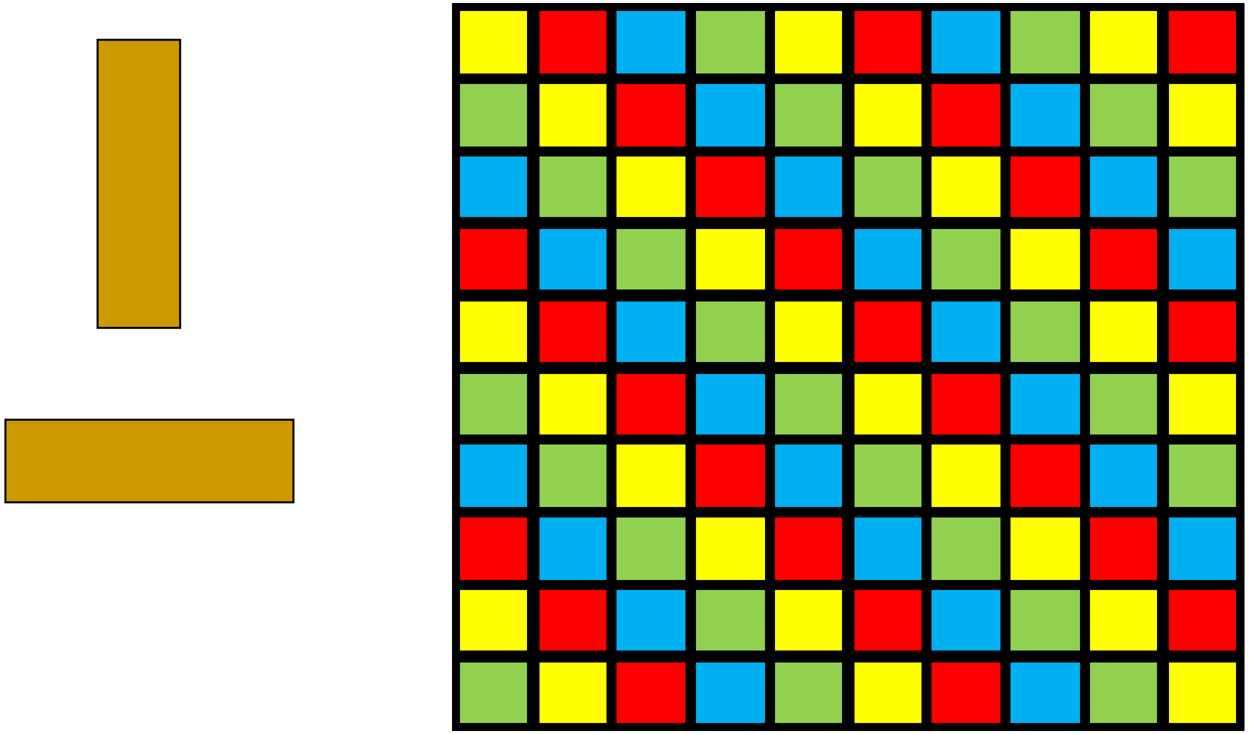
Coloriage

Coloriage

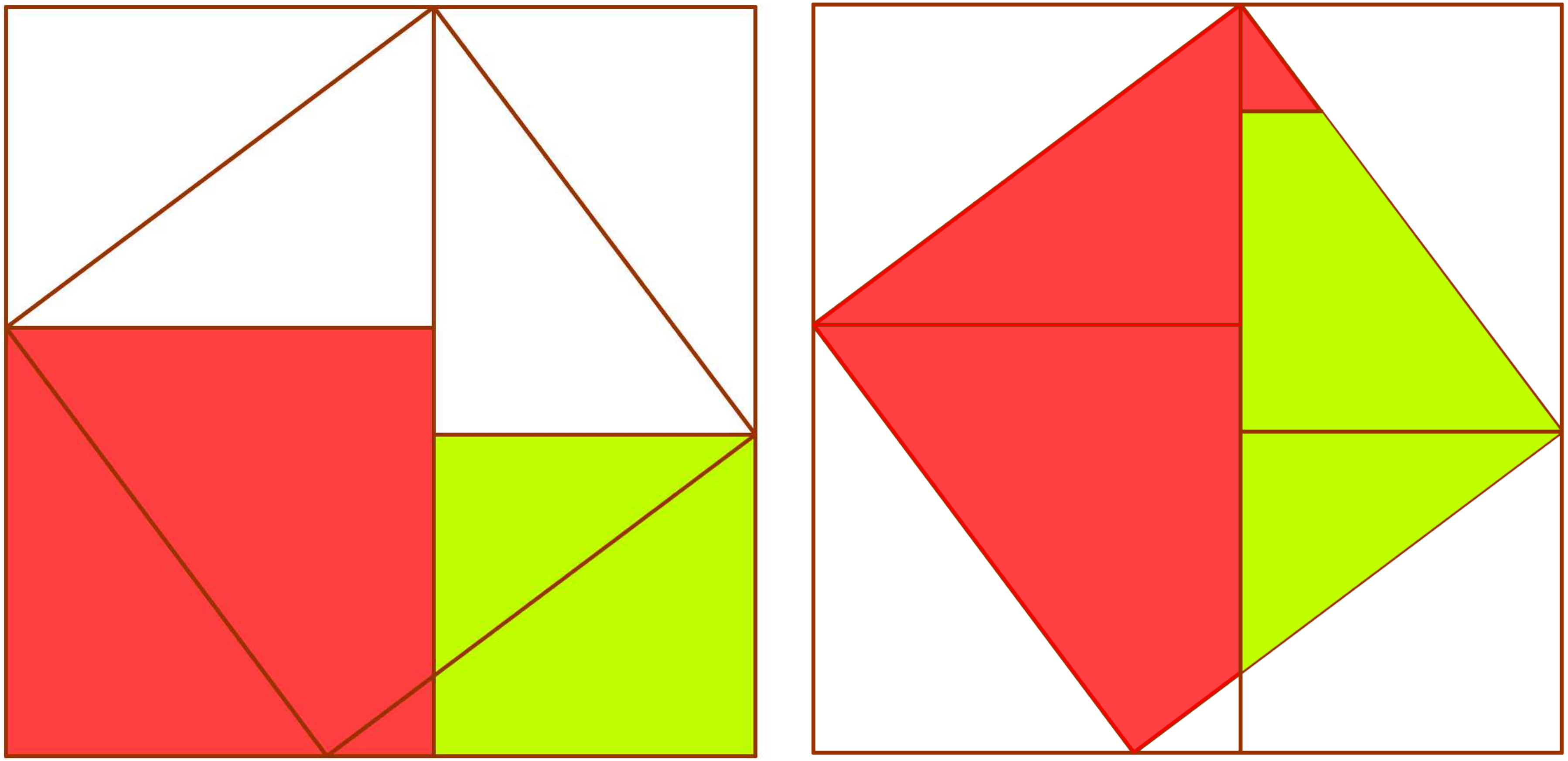


Coloriage

Coloriage

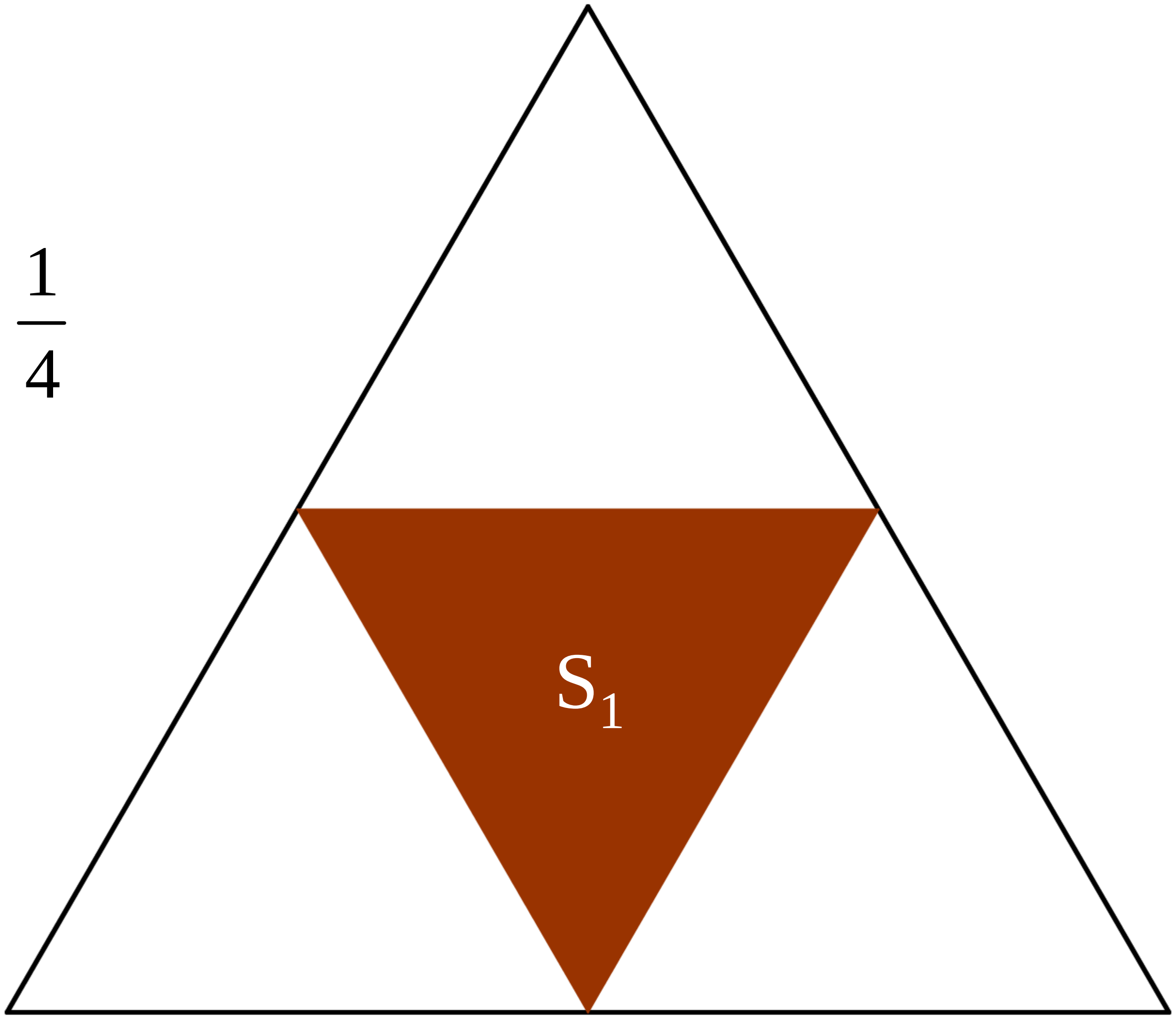


CHINE : *Les dix classiques*



Sans mots

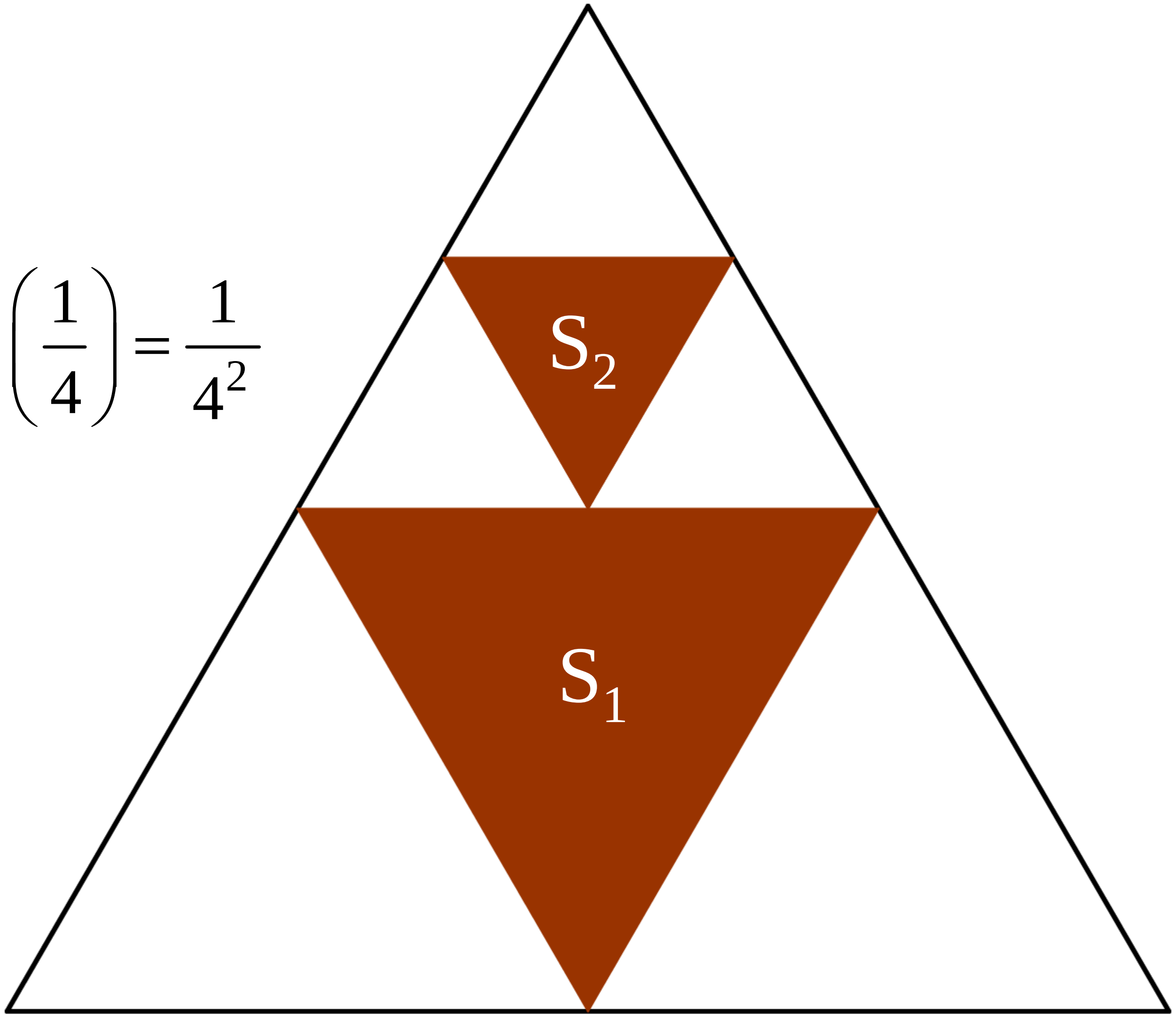
$$S_1 = \frac{1}{4}$$



Sans mots

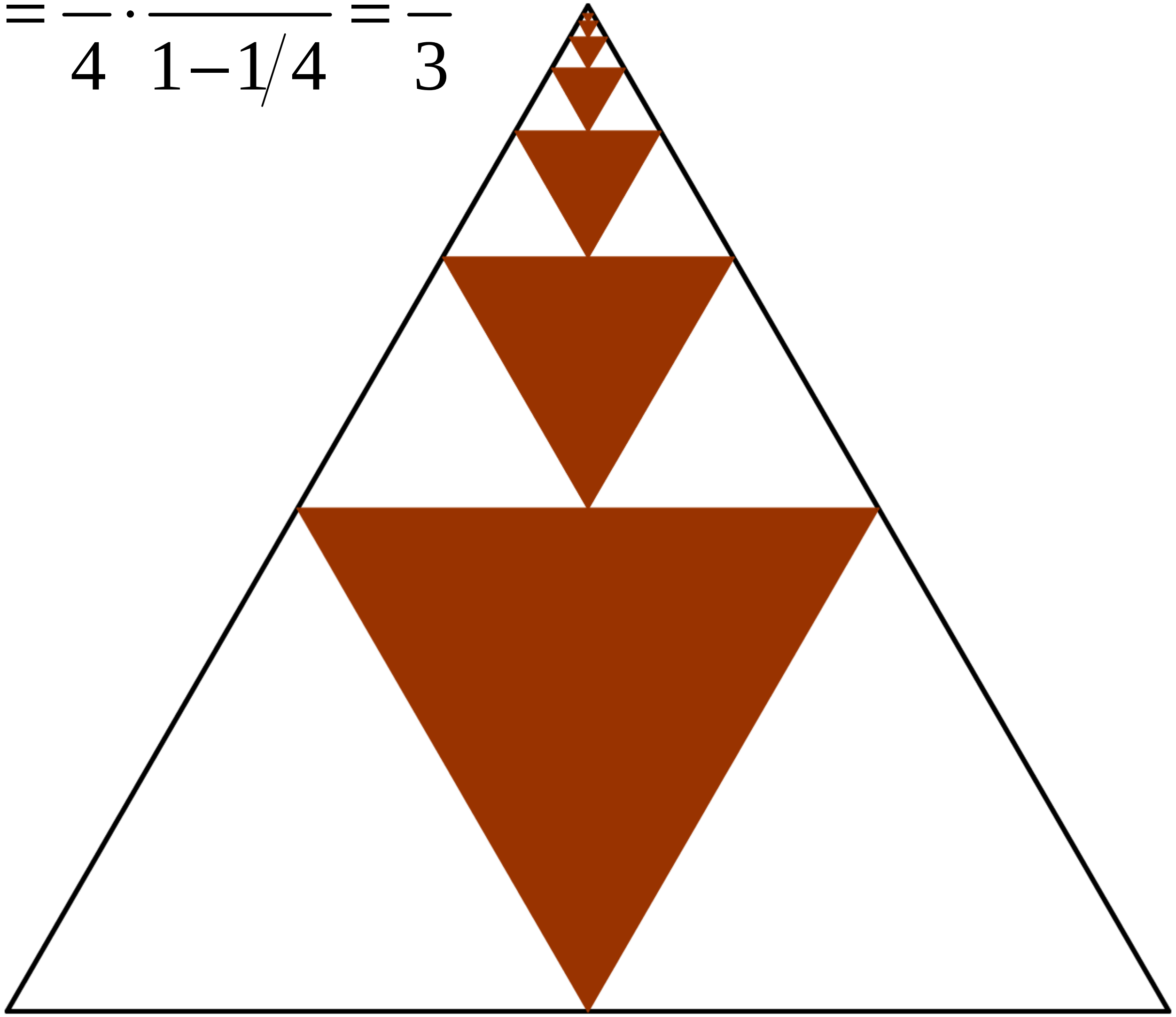
$$S_2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4^2}$$

$$S_1 = \frac{1}{4}$$



Sans mots

$$S=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{4^k}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-1/4}=\frac{1}{3}$$

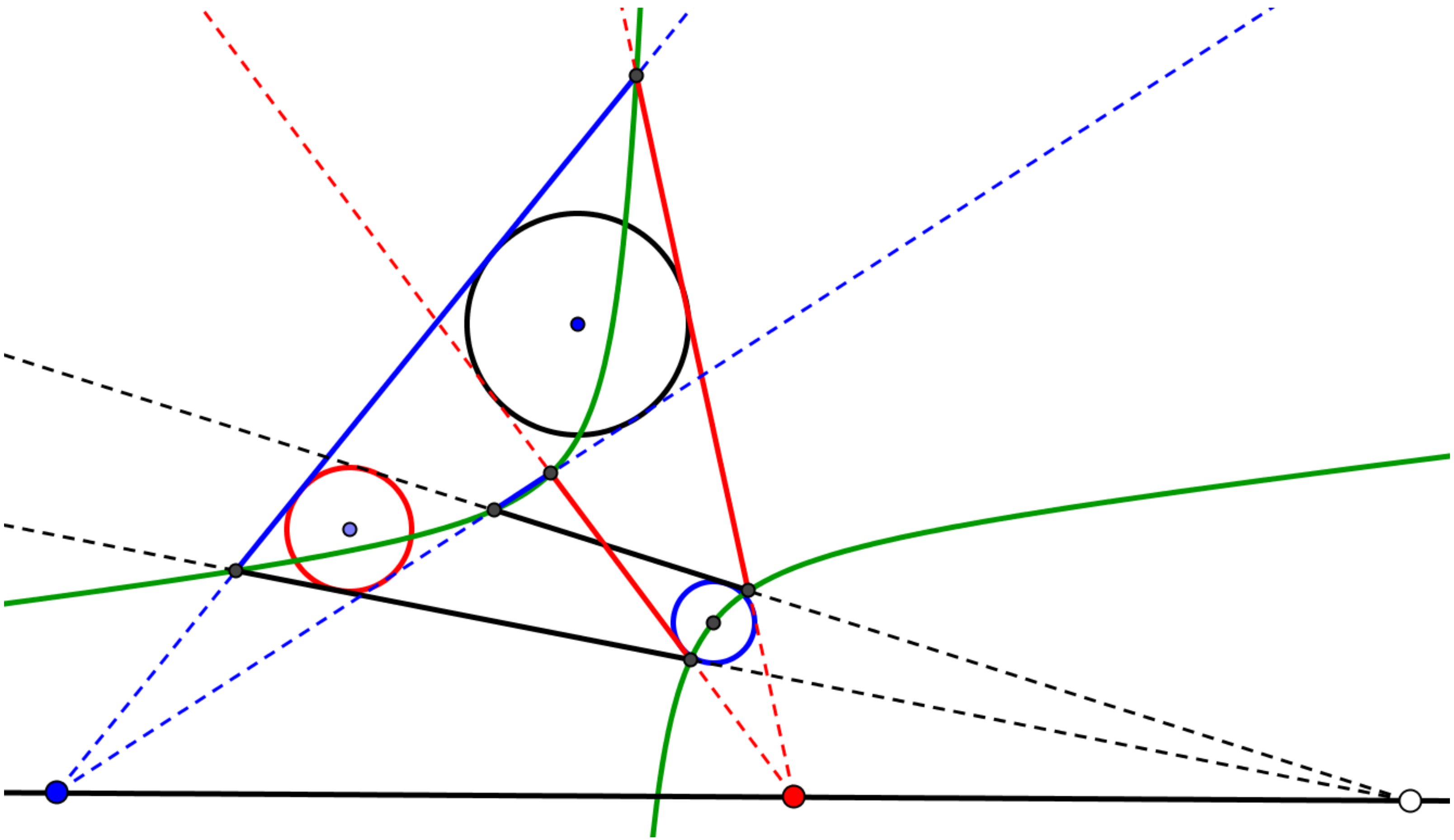


$$(\infty - 1 = \infty)$$

Attention périmètre demi-cercle

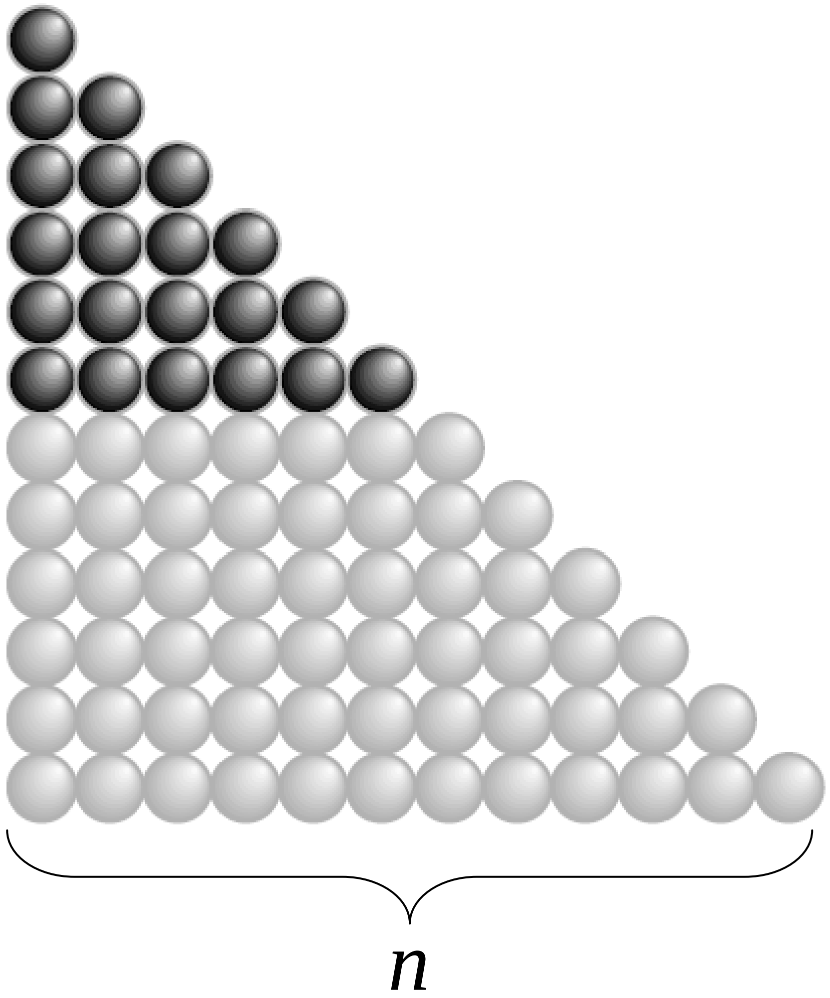
Preuve « physique »

Théorème de Pascal-Morlet



Sans mots

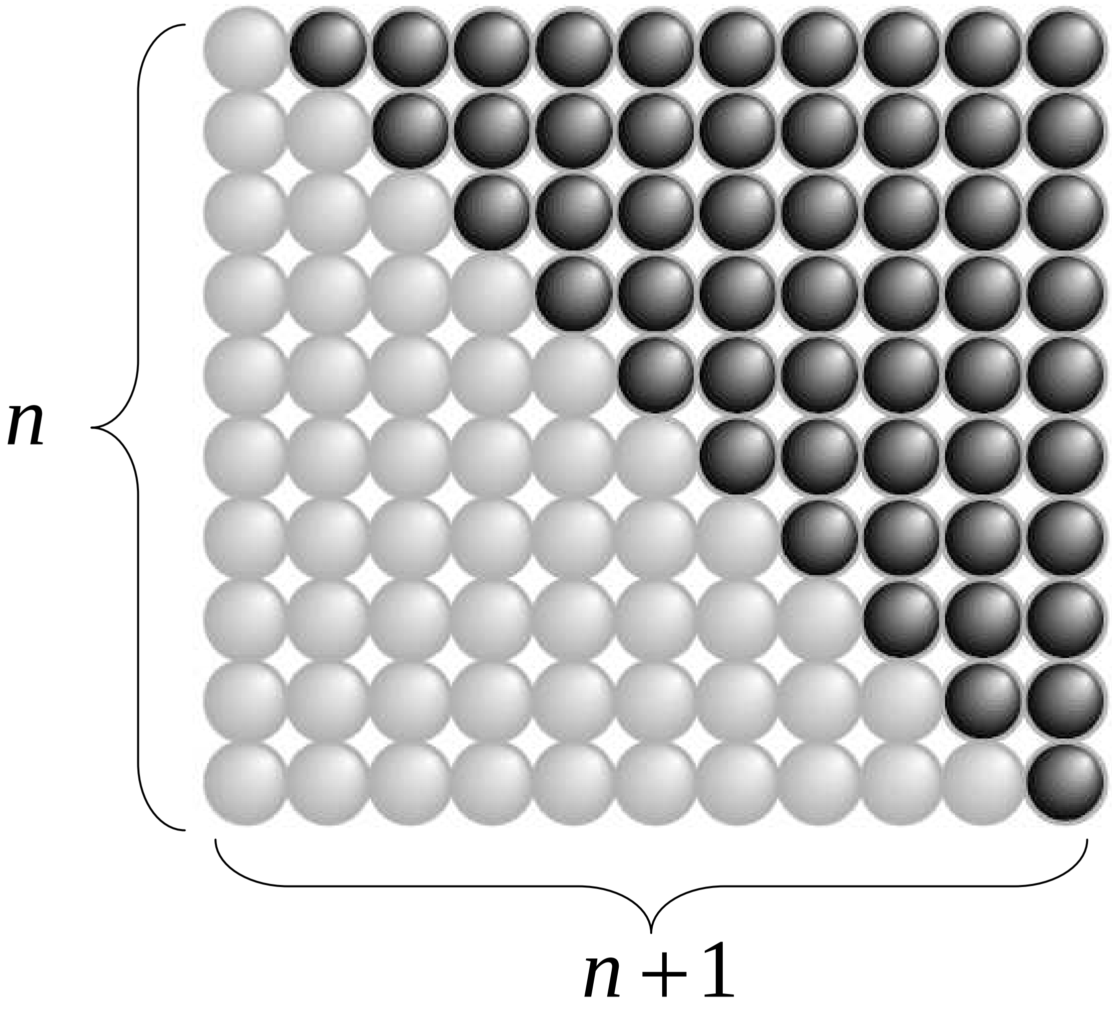
Sans mots



Sans mots

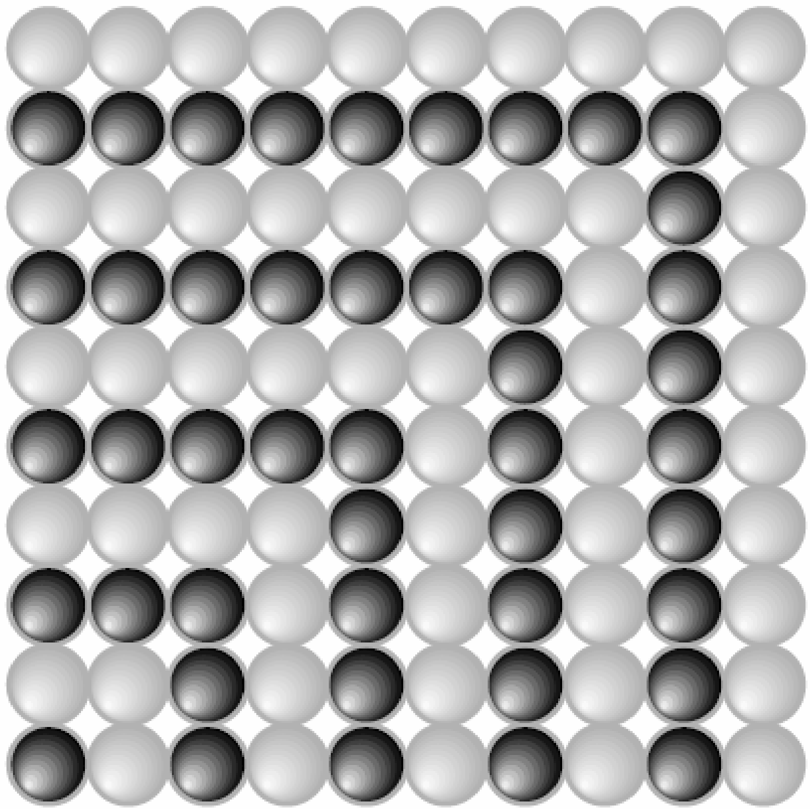
Sans mots

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$



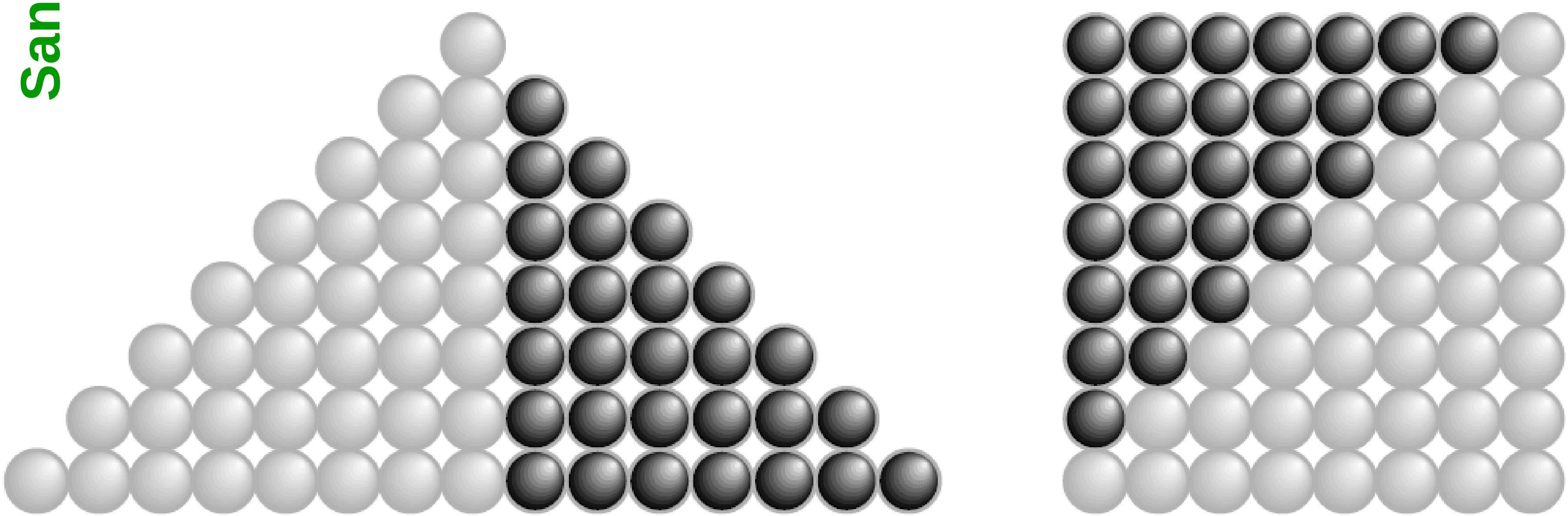
Sans mots

Somme des n premiers nombres impairs $= n^2$



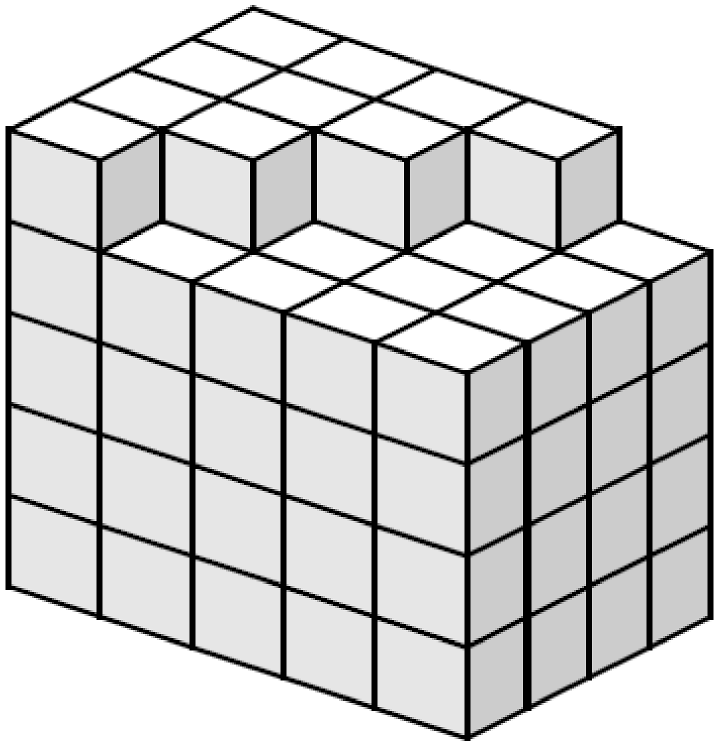
Sans mots

Somme des n premiers nombres impairs $= n^2$



Sans mots

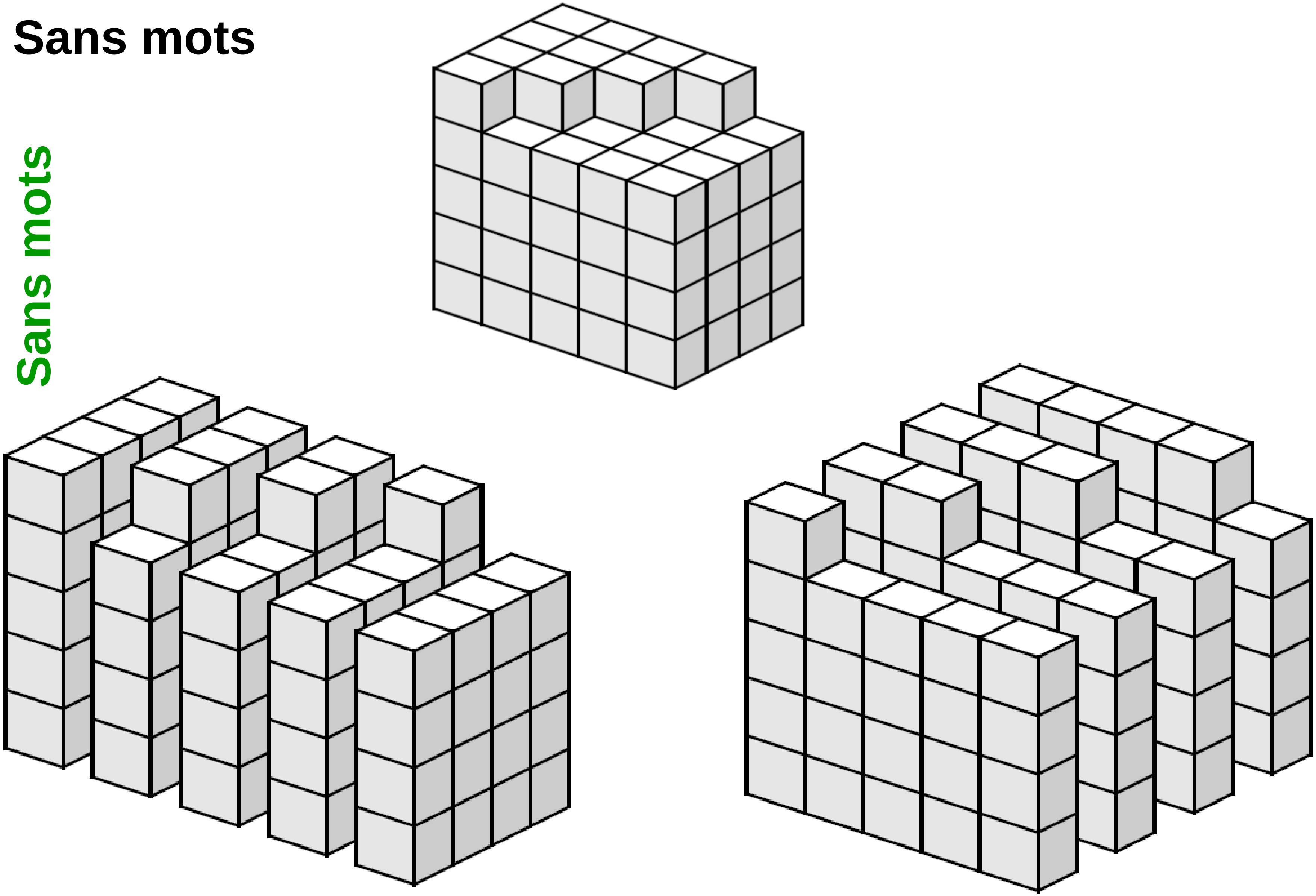
Sans mots



$$n^2 + (n^2 + 1) + (\dots) + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + (\dots) + (n^2 + 2n) = 3S_2(n)$$

Sans mots

Sans mots



Erdös

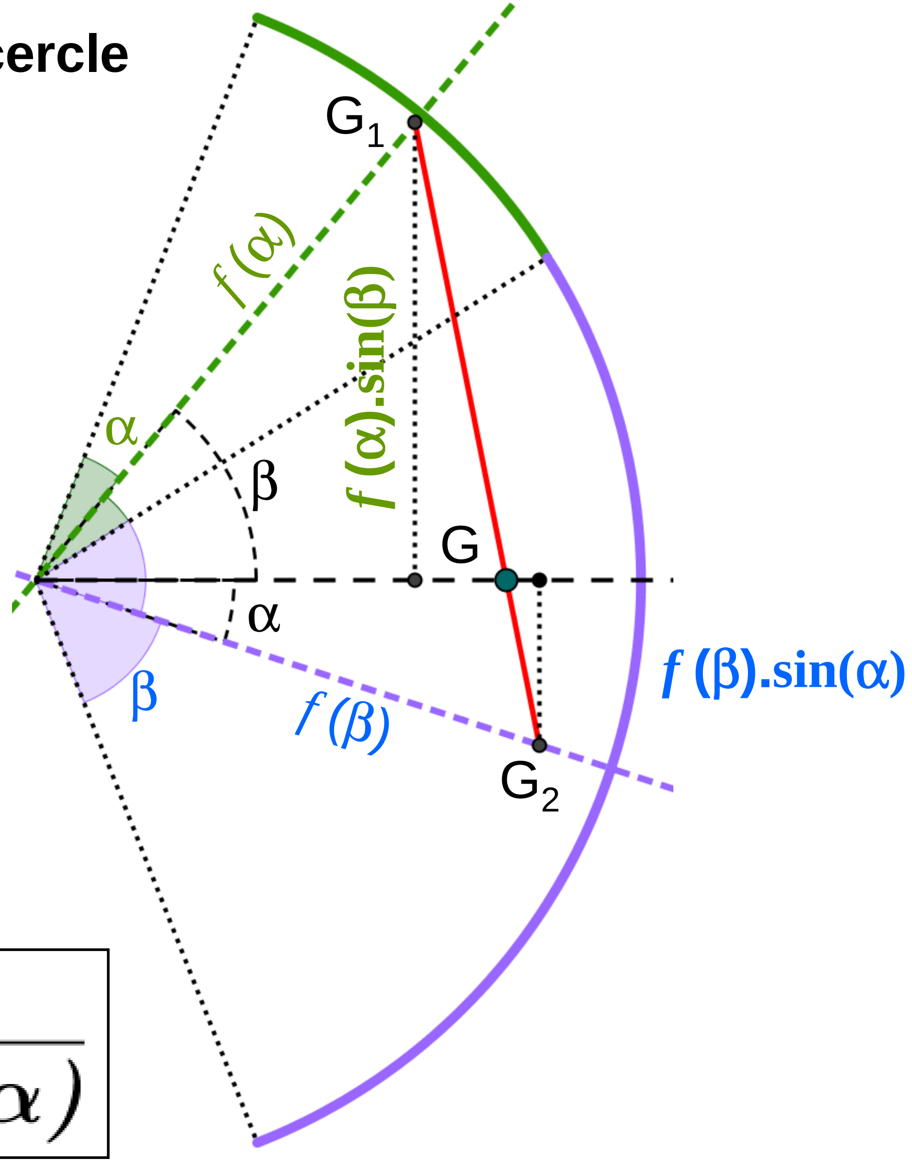
Centre de gravité d'un arc de cercle

Beauté

$$\alpha f(\alpha) sin(\beta) = \beta f(\beta) sin(\alpha)$$

$$=> \quad \frac{\alpha f(\alpha)}{sin(\alpha)} = \frac{\beta f(\beta)}{sin(\beta)} = R$$

$$=> \boxed{f(\alpha) = R \frac{\alpha}{sin(\alpha)}}$$



Georg Alexander PICK (1859-1942)

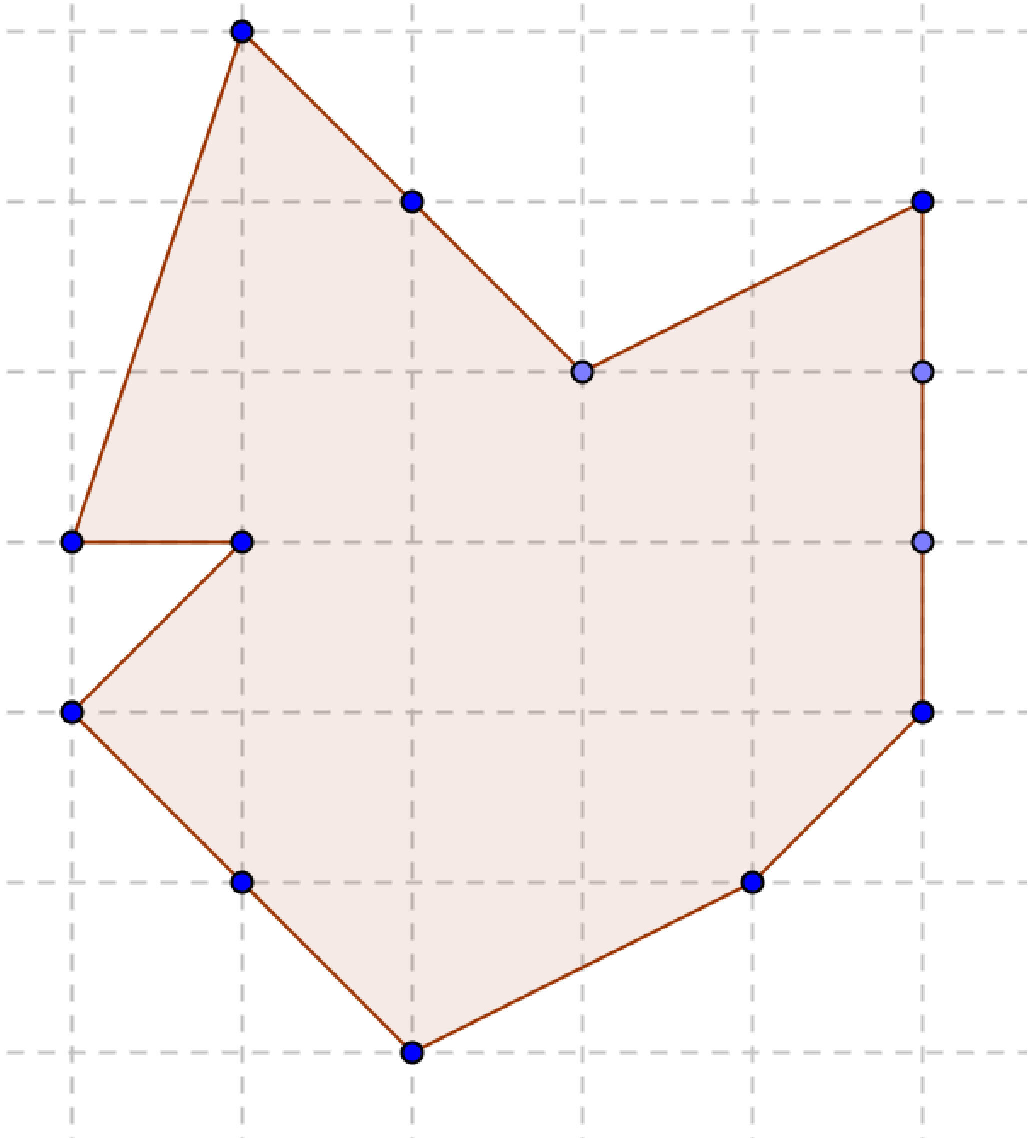
a appris la géométrie différentielle à Einstein (Albert).

Beauté

B = 13

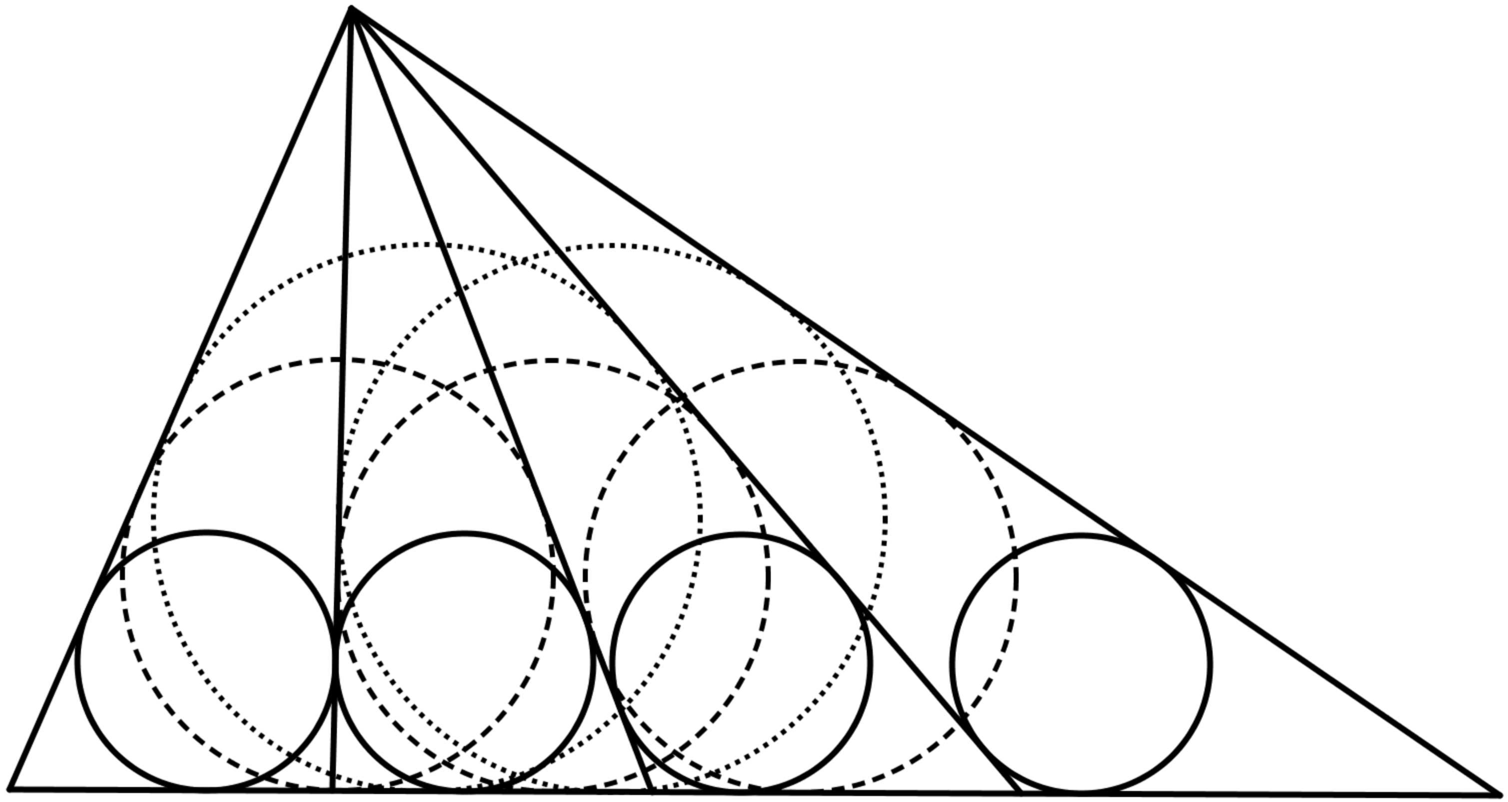
I = 13

S = B/2 + I – 1 = 37/2

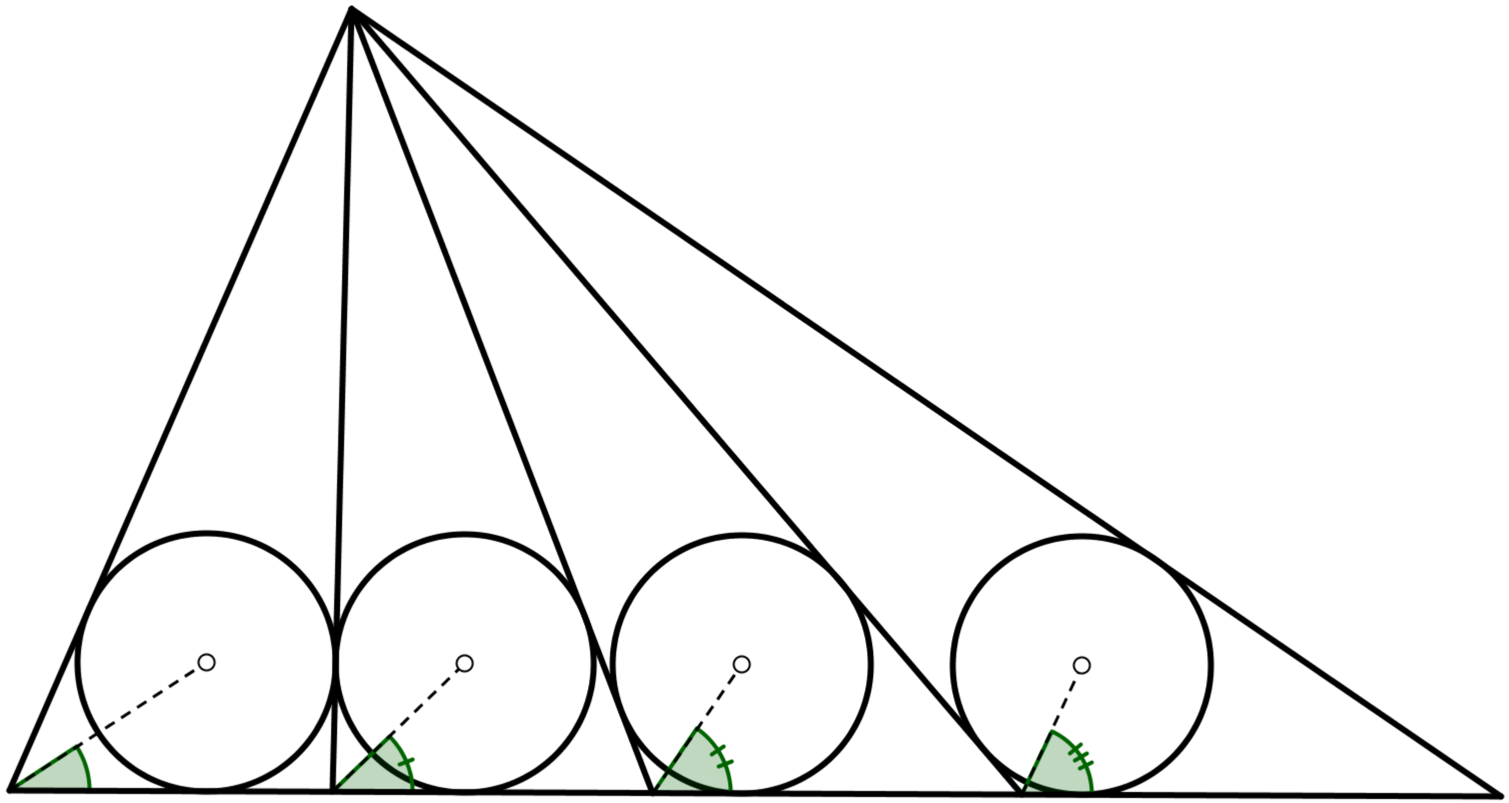


La parabole des cercles inscrits

Beauté



Méthode algébrique

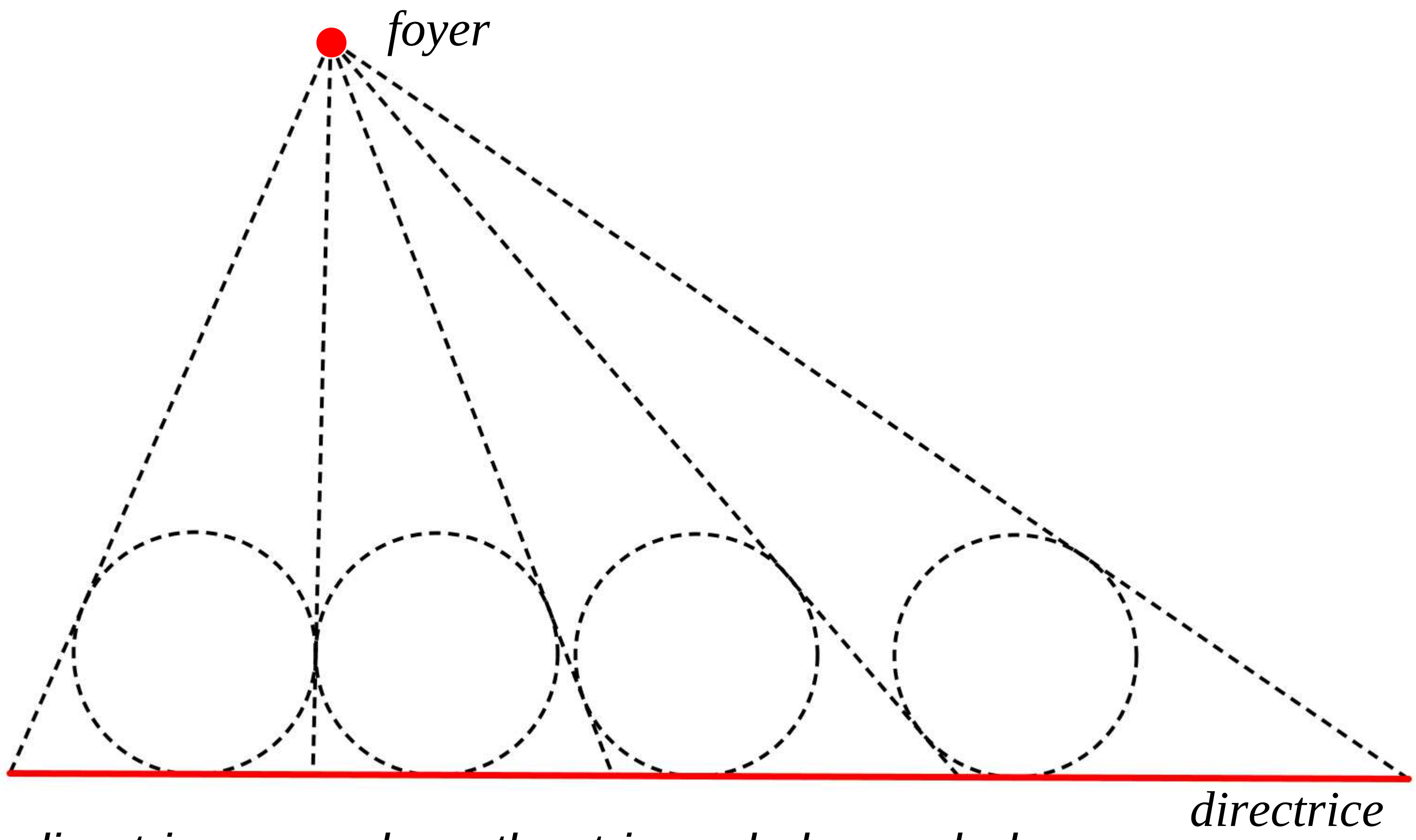


Les tangentes sont en progression géométrique

$$T_n = q \cdot T_{n-1} = q^{n-1} \cdot T_1 \qquad T_{2n+1} = q^2 \cdot T_{2n-1} = q^{2n} \cdot T_1$$

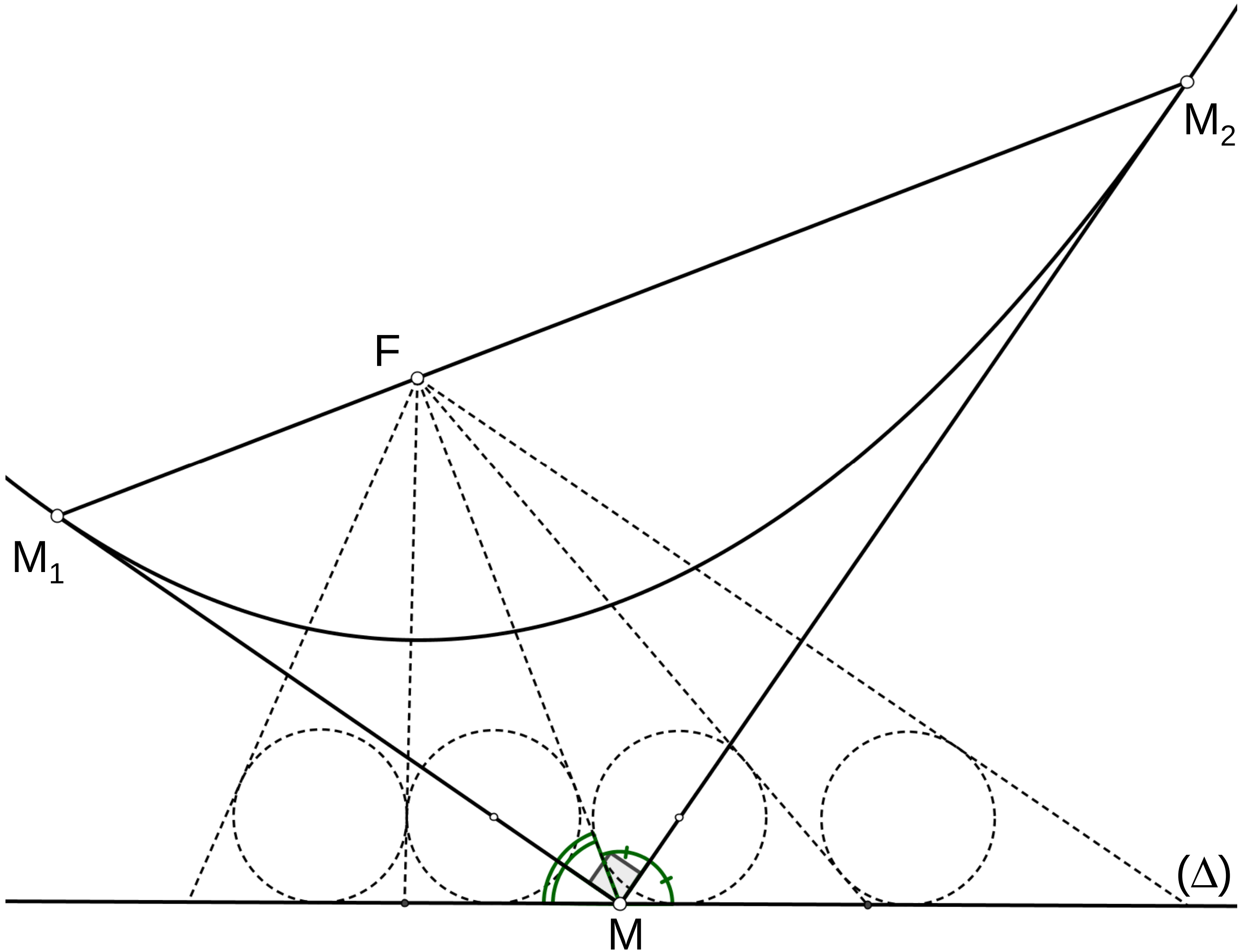
La parabole des cercles inscrits

1 point + 1 droite = 1 parabole



directrice = courbe orthoptrique de la parabole

Beauté



vrai et démontrable

Gödel (1931)