Le nombre d'or

François Dubois [1]

Kafemath
"La Grange des Doux Dingues"
Authoison (Haute-Saône)
vendredi 11 septembre 2015

[1] créateur et animateur du Kafemath.

Proportions

Rapport de longueurs...

je coupe un segment en deux morceaux "égaux"

Que vaut le rapport entre la "grande partie" et la "petite partie" ?

Que vaut le rapport entre "le tout" et la grande partie ?

Proportions *(ii)*

Rapport de longueurs...

je coupe un segment en deux morceaux "égaux"

Que vaut le rapport entre la "grande partie" et la "petite partie" ?

Que vaut le rapport entre "le tout" et la grande partie ?

$$\frac{\text{grande partie}}{\text{petite partie}} = 1 \qquad\qquad \frac{\text{le tout}}{\text{grande partie}} = 2$$

Proportions *(iii)*

Rapport de longueurs...

je recoupe le même segment

avec un des morceaux deux fois plus long que l'autre

Que vaut le rapport entre la “grande partie” et la “petite partie” ?

Que vaut le rapport entre “le tout” et la grande partie ?

Proportions *(iv)*

Rapport de longueurs...

je recoupe le même segment

avec un des morceaux deux fois plus long que l'autre

Que vaut le rapport entre la "grande partie" et la "petite partie" ?

Que vaut le rapport entre "le tout" et la grande partie ?

il y a des tiers dans l'affaire...

Ah ces fractions !

Marcel Pagnol et Alexander Korda, *Marius*, 1931

Raimu et Pierre Fresnay

Ah ces fractions ! *(ii)*

CÉSAR

C'est ça ! Insulte la clientèle au lieu de te perfectionner dans ton métier ! Eh bien, pour la dixième fois, je vais te l'expliquer, le picon-citron-curaçao. (Il s'installe derrière le comptoir.) Approche-toi ! (Marius s'avance et va suivre de près l'opération. César prend un grand verre, une carafe et trois bouteilles. Tout en parlant, il compose le breuvage.)
Tu mets d'abord un tiers de curaçao. Fais attention : un tout petit tiers. Bon. Maintenant, un tiers de citron. Un peu plus gros. Bon. Ensuite, un BON tiers de Picon. Regarde la couleur. Regarde comme c'est joli. Et à la fin, un GRAND tiers d'eau. Voilà.

MARIUS Et ça fait quatre tiers.

CÉSAR

Exactement. J'espère que cette fois, tu as compris.

(Il boit une gorgée du mélange).

Ah ces fractions ! *(iii)*

MARIUS
Dans un verre, il n'y a que trois tiers.

CÉSAR Mais, imbécile, ça dépend de la grosseur des tiers !

MARIUS
Eh non, ça ne dépend pas. Même dans un arrosoir, on ne peut mettre que trois tiers.

CÉSAR (triomphal)
Alors, explique moi comment j'en ai mis quatre dans ce verre.

MARIUS Ça, c'est de l'arithmétique.

CÉSAR
Oui, quand on ne sait plus quoi dire, on cherche à détourner la conversation.

Divine proportion

Rapport de longueurs...

je recoupe le même segment

avec un des morceaux deux fois plus long que l'autre

Que vaut le rapport entre la "grande partie" et la "petite partie" ?

Que vaut le rapport entre "le tout" et la grande partie ?

$$\frac{\text{grande partie}}{\text{petite partie}} = 2 \qquad \frac{\text{le tout}}{\text{grande partie}} = \frac{3}{2}$$

Divine proportion *(ii)*

$$\frac{\text{grande partie}}{\text{petite partie}} = 1 \qquad \frac{\text{le tout}}{\text{grande partie}} = 2$$

$$\frac{\text{grande partie}}{\text{petite partie}} = 2 \qquad \frac{\text{le tout}}{\text{grande partie}} = \frac{3}{2}$$

Comment choisir les longueurs relatives pour que

$$\frac{\text{grande partie}}{\text{petite partie}} = \frac{\text{le tout}}{\text{grande partie}} \ ?$$

Mettre le problème en équations

Introduction du livre

Kitābu 'l-mukhtaar fī isābi al-jabr wa'l-muqābalah

"[...] les hommes ont besoin pour la répartition de leurs héritages et de leurs donations, pour leurs partages et pour leurs jugements, pour leurs transactions commerciales et pour toutes les opérations qu'ils ont entre eux et qui sont relatives à l'arpentage, à la répartition des eaux de rivières, à l'architecture ainsi qu'à d'autres aspects [...]"

Problèmes pratiques posés au neuvième siècle à Bagdad...

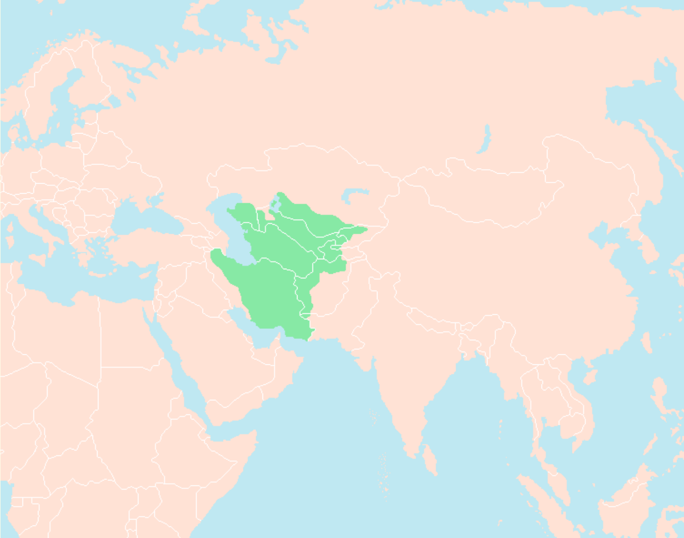
Solution de al-Khwârizmî (780-850), le "père de l'algèbre"

Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison (813 - 833)

Abdallah Muammad ibn Musa al-Khwârizmî (780-850)

Statue de al-Khwârizmî à l'université Amir Kabir de Téhéran

Empire Khwarezmid au 12 ième siècle



Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison

Mettre le problème en équations *(ii)*

Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison

al-jabr : réduction d'une fracture,
réunion des morceaux, restauration, *etc.*

objets de l'algèbre :
les nombres entiers et nombres rationnels positifs
l'inconnue (Jidhr = racine) et son carré (Mâl = bien).

Merci à Roshdi Rashed
pour son magnifique ouvrage sur al-Khwârizmî
(Editions Albert Blanchard, 2007)

Nombre d'or

Comment choisir les longueurs relatives pour que

$$\frac{\text{grande partie}}{\text{petite partie}} = \frac{\text{le tout}}{\text{grande partie}} \text{ ?}$$

On met le problème en équations :

petite longueur $=$ unité $= 1$

grande longueur $= \Phi$ et $\Phi > 1$

le tout $=$ petite longueur plus grande longueur $= \Phi + 1$

$$\frac{\text{grande partie}}{\text{petite partie}} = \frac{\Phi}{1} = \frac{\Phi + 1}{\Phi} = \frac{\text{le tout}}{\text{grande partie}} \text{ ?}$$

Equation satisfaite par le nombre d'or Φ : $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$

sans oublier l'inéquation $\Phi > 1$!

Quelques expressions du nombre d'or

Relations satisfaites par le nombre d'or : $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ et $\Phi > 1$

On remplace Φ par sa valeur au membre de droite de l'équation :

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\Phi}}$$

et on recommence !

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\Phi}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\Phi}}}}$$

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}}$$

Quelques expressions du nombre d'or *(ii)*

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\dots}}}}}}$$

On fait le calcul grâce à l'algorithme de la relation précédente !

Le mot algorithme vient du nom latinisé de al-Khwârizmî

$1 + 1 = 2 \qquad 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \simeq 1,5 \qquad 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \simeq 1,666667$

$1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} \simeq 1,6 \qquad 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8} \simeq 1,625$

$1 + \frac{8}{13} = \frac{21}{13} \simeq 1,61538\ldots \qquad 1 + \frac{13}{21} = \frac{34}{21} \simeq 1,6190\ldots$

Les nombres entiers en rouge : 1 1 2 3 5 8 13 21 34

sont ceux de la suite de Fibonacci :

Le suivant est somme des deux précédents !

Quelques expressions du nombre d'or *(iii)*

Relations satisfaites par le nombre d'or : $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ et $\Phi > 1$

On multiple par Φ : $\Phi^2 = 1 + \Phi$

On extrait la racine carrée : $\Phi = \sqrt{1 + \Phi}$

On remplace Φ au membre de droite : $\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}}$

On recommence ! $\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}}}$

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}}}}$$

$$= \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}}}}}$$

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}}}$$

Quelques expressions du nombre d'or *(iv)*

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}}$$

On utilise le nouvel algorithme :

$\sqrt{1} = 1$ $\sqrt{1+1} \simeq 1,414$ $\sqrt{1+1,414} \simeq 1,5537$

$\sqrt{1+1,5537} \simeq 1,5981$ $\sqrt{1+1,5981} \simeq 1,61185$

$\sqrt{1+1,61185} \simeq 1,6161$ $\sqrt{1+1,6161} \simeq 1,6174$

$\sqrt{1+1,6174} \simeq 1,6178$ $\sqrt{1+1,6178} \simeq 1,617978$

$\sqrt{1+1,617978} \simeq 1,618016$ $\sqrt{1+1,618016} \simeq 1,6180286$

$\Phi \simeq 1,618$.

Quelques expressions du nombre d'or *(v)*

Relations satisfaites par le nombre d'or : $\Phi = 1 + \dfrac{1}{\Phi}$ et $\Phi > 1$

On a donc une équation du second degré : $\Phi^2 - \Phi = 1$

On travaille un peu cette équation :

$$\Phi^2 - 2\ \Phi\ \frac{1}{2} = 1 \qquad \Phi^2 - 2\ \Phi\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 1$$

$$\left(\Phi - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 1 \qquad \left(\Phi - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\Phi - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

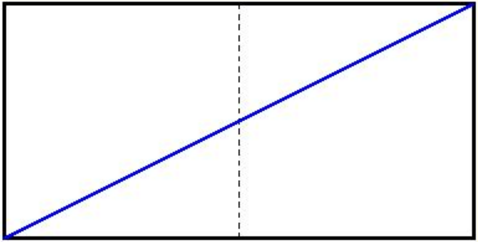
$$\Phi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \simeq 1,61803398874989$$

$$\text{ou} \quad \Phi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{négatif !}$$

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,61803398874989.$$

Construction géométrique du nombre d'or

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



Si le côté du carré vaut 1, la diagonale du rectangle vaut $\sqrt{5}$.

Donc le nombre d'or est irrationnel :

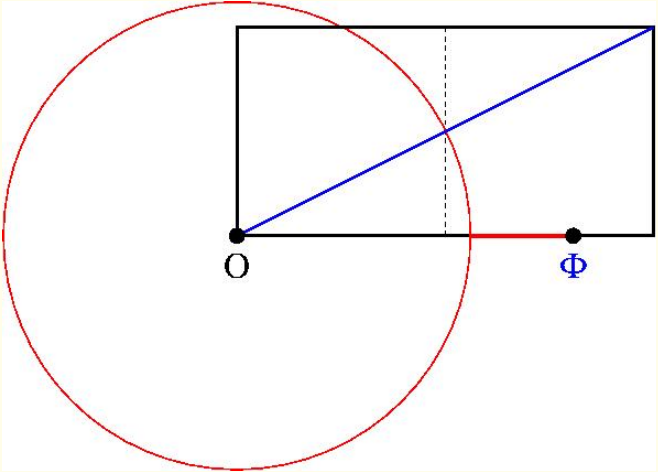
il ne peut pas être quotient de deux nombres entiers

Si c'était vrai, ce serait encore vrai pour $\sqrt{5}$

Or on sait depuis Euclide (-300) que c'est faux !

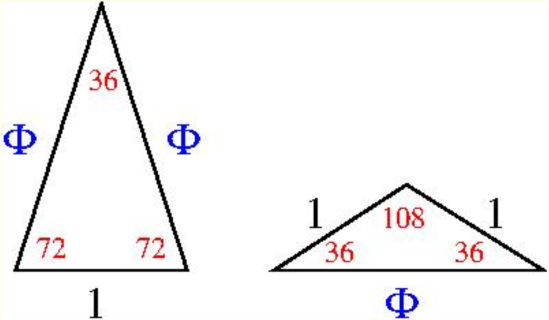
Construction géométrique du nombre d'or *(ii)*

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



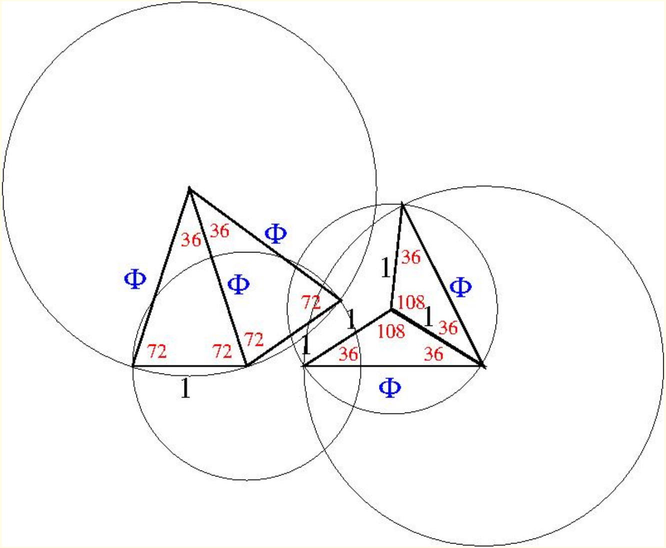
On reporte $\frac{\sqrt{5}}{2}$ avec le compas et on ajoute $\frac{1}{2}$: $\Phi = \simeq\ 1,6$.

Nombre d'or et figures géométriques remarquables



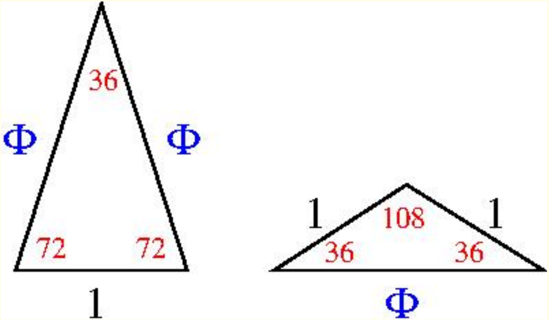
Le nombre d'or dans deux triangles isocèles

Nombre d'or et figures géométriques remarquables *(ii)*

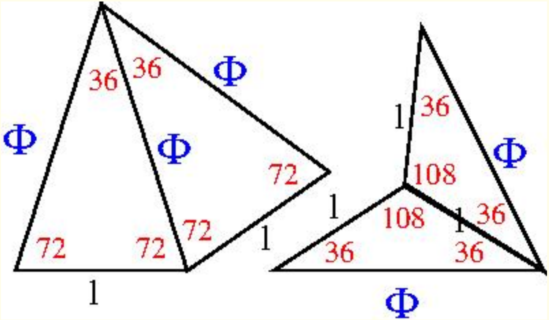


On duplique les triangles

Nombre d'or et figures géométriques remarquables *(iii)*

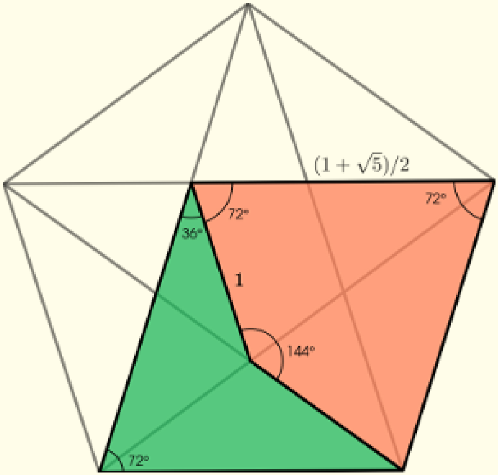


Nombre d'or et figures géométriques remarquables *(iv)*



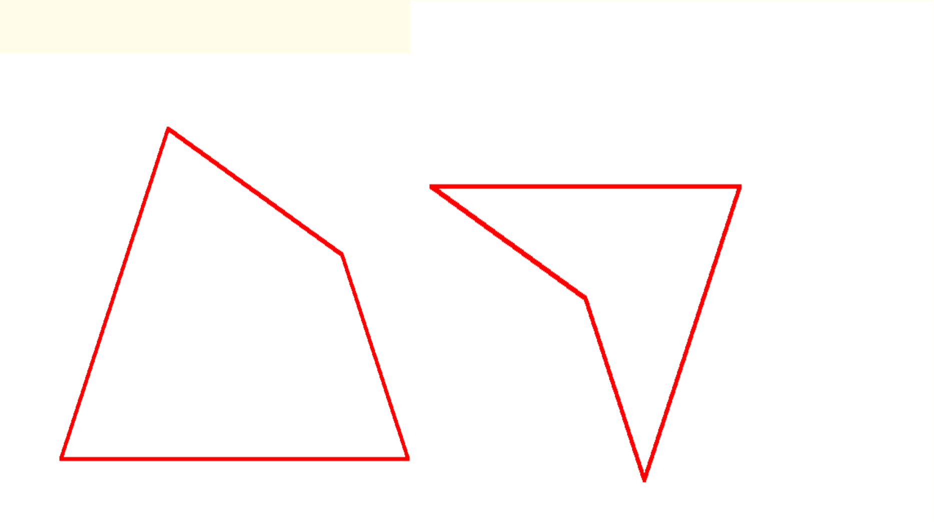
cerf volant et flèche

Nombre d'or et figures géométriques remarquables *(v)*

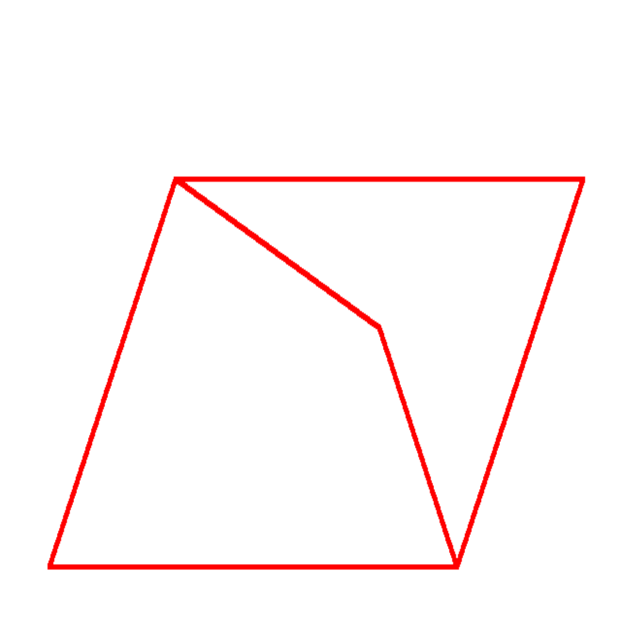


La flèche en vert et le cerf-volant en orange

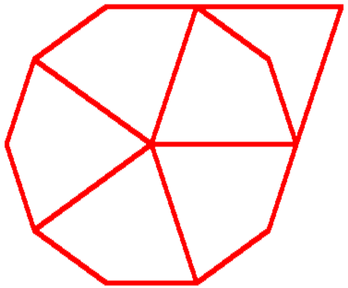
Pavages de Penrose : cerf-volant et flèche



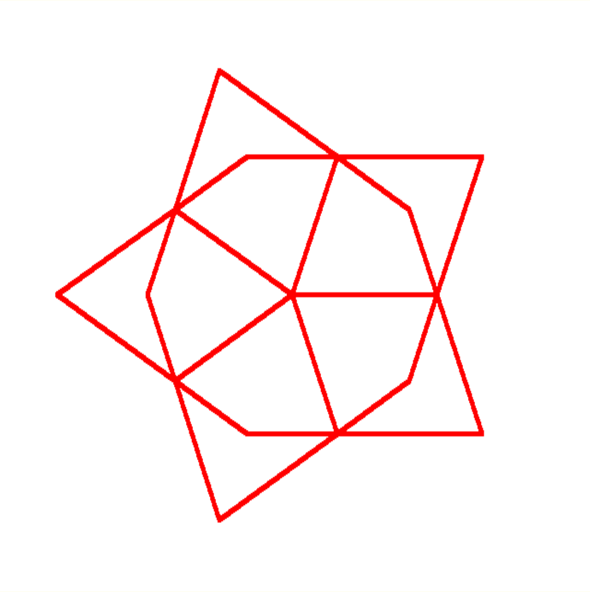
Pavages de Penrose : cerf-volant et flèche *(ii)*



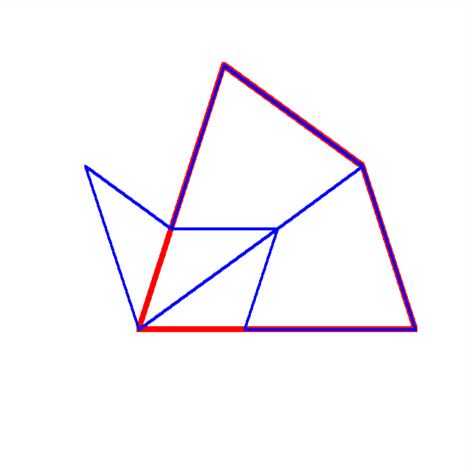
Pavages de Penrose : cerf-volant et flèche *(iii)*

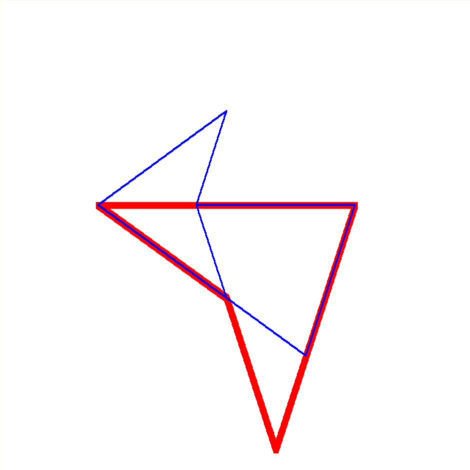


Pavages de Penrose : cerf-volant et flèche *(iv)*



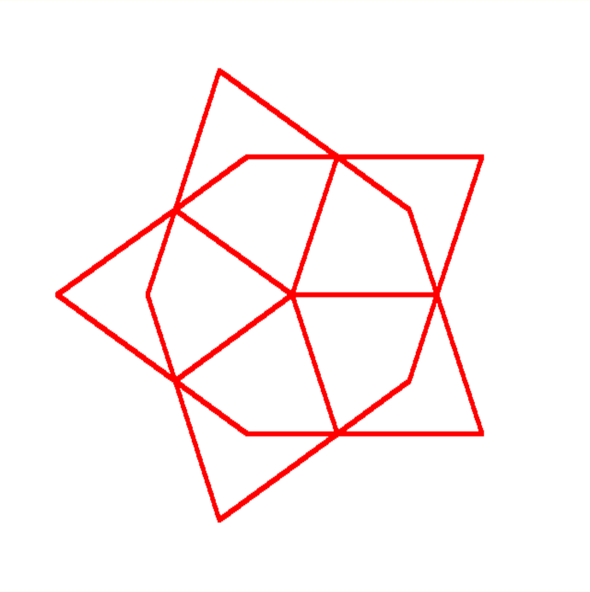
Découpage du cerf-volant et de la flèche



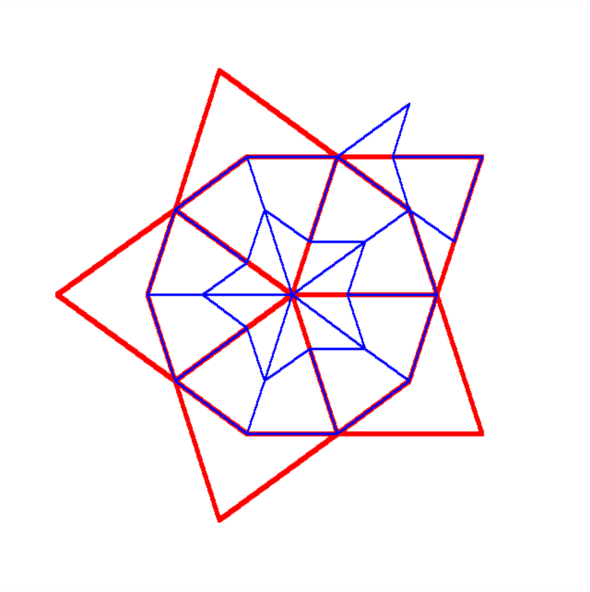


Le cerf-volant se transforme en deux cerf-volants et une flèche
la flèche se transforme en un cerf-volant et une flèche.

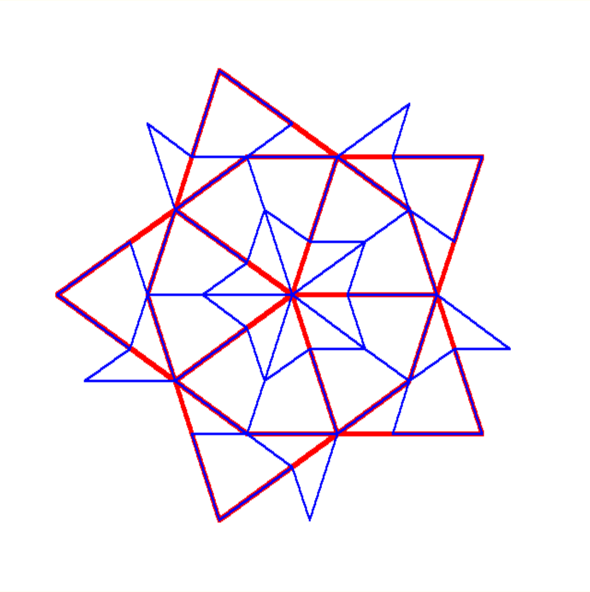
Pavages de Penrose : cerf-volant et flèche *(v)*



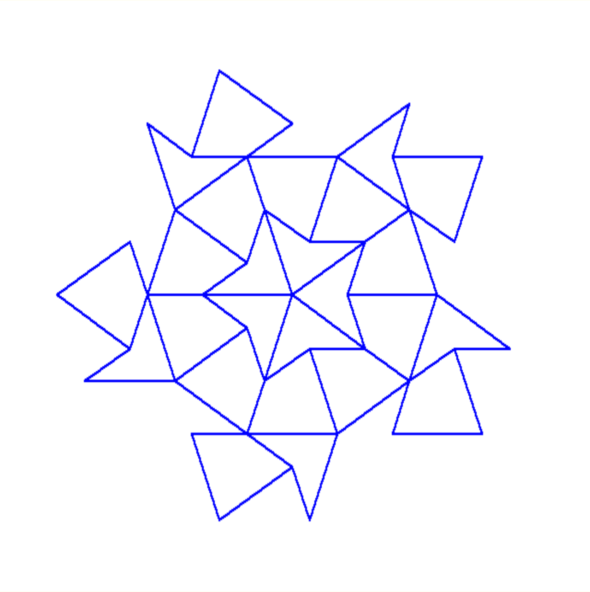
On découpe le début de pavage...



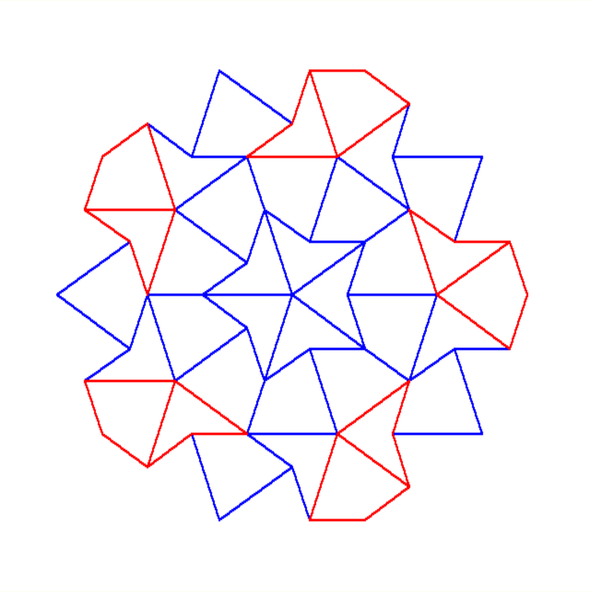
On continue le découpage



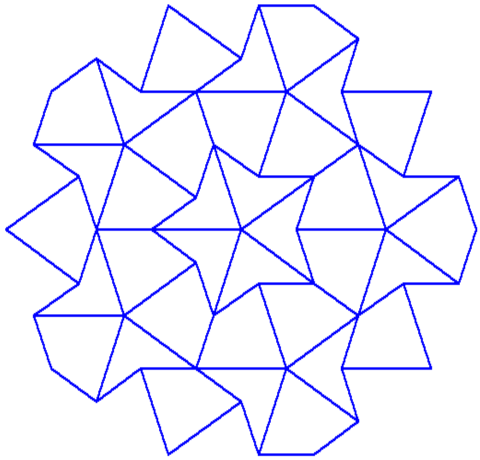
On enlève la première génération



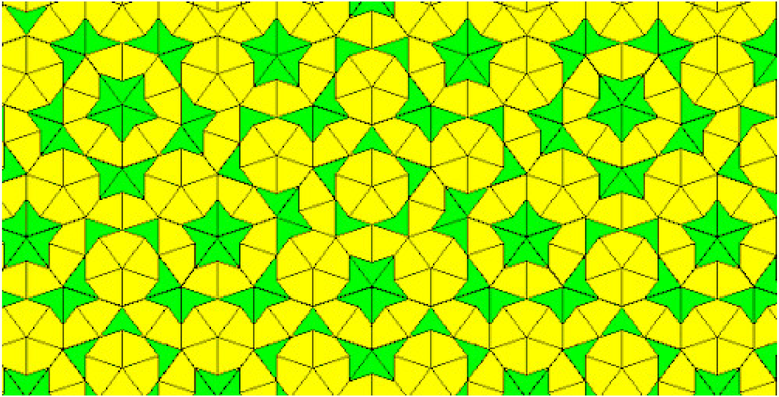
On ajoute quelques flèches et cerfs-volants



On obtient un début de pavage de Penrose

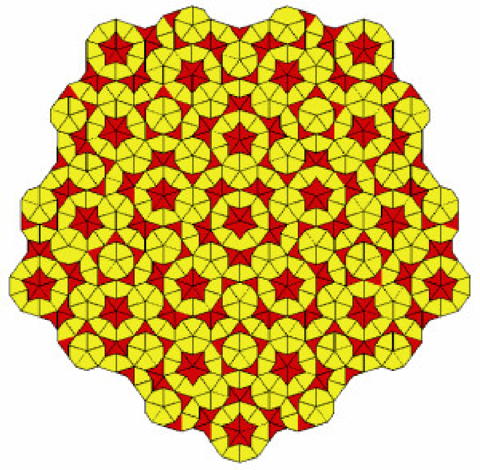


D'autres pavages de Penrose...

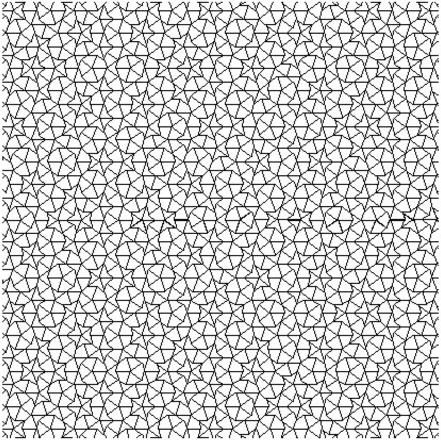


avec le cerf-volant et la flèche

D'autres pavages de Penrose *(ii)*

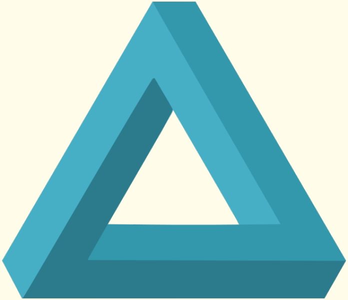


D'autres pavages de Penrose *(iii)*



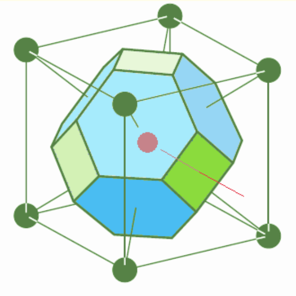
voir la page d'Yves Benoist...

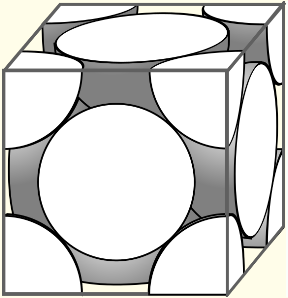
Roger Penrose

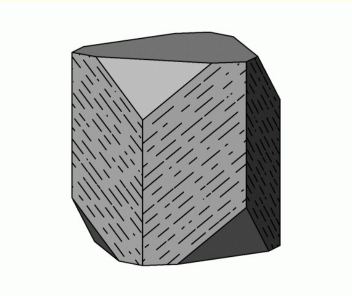


né en 1931, mathématicien, cosmologiste,
a proposé un triangle impossible dans les années 50,
les pavages apériodiques en 1974,
un modèle physique de la conscience en 1989, *etc.*

Structure régulière des cristaux





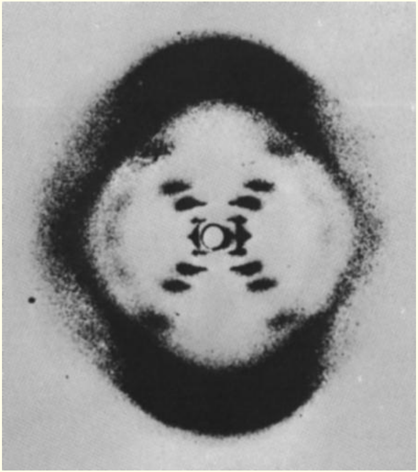


Etude classique (réseau et motif) des groupes cristallographiques :
17 groupes cristallographiques avec des symétries d'ordre 2, 3, 4, 6.

Pas de symétrie d'ordre 5 !

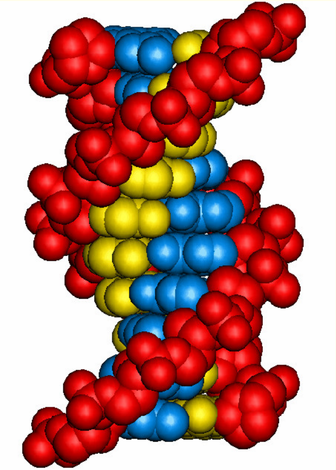
Résultat connu depuis la fin du 19 ième siècle

Double hélice



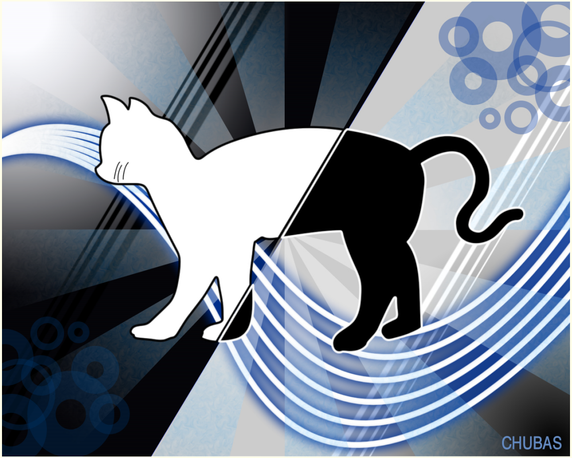
La double hélice vue en 1952 par Rosalind Franklin (1920 - 1958)
et son élève Raymond Gosling (né en 1926)

Symétrie d'ordre 5 dans la double hélice



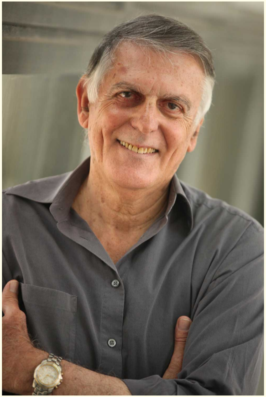
ADN-B : de l'ordre de 10 bases par tour de la double hélice
rouge: brin phosphodiester ; bleu: guanine, jaune : cytosine.
Anne Lebrun et Richard Lavery, IBCP, Lyon.

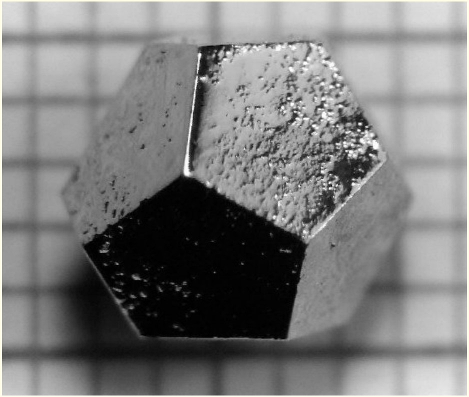
Symétrie d'ordre 5 dans la double hélice *(ii)*



Erwin Schrödinger (1887 - 1961) *Qu'est-ce que la vie ?* (1944)
idée d'un "cristal apériodique" à l'intérieur des chromosomes.

Des quasi-cristaux dans la nature...





Dan Shechtman (prix Nobel en chimie en 2011)
quasicristal "Ho-Mg-Zn" d'holmium, manganèse et zinc,
de forme très proche du dodécaèdre....

Φ à suivre...

Le nombre d'or n'est pas rationnel : $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

il ne peut pas être écrit sous la forme $\dfrac{p}{q}$

où p et q sont deux nombres entiers

Le nombre d'or est algébrique : $\Phi^2 = \Phi + 1$

il est solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers

Un nombre qui n'est pas algébrique est appelé transcendant.

Voir l'exposé suivant !

Kafemath

Première séance du "kafemath" en octobre 2004

ASSOCIATION "KAFEMATH"

Art. 1. Fondation

Il est fondé, entre les adhérents aux présents statuts, une association régie par la loi du 1° juillet 1901 ayant pour nom "Kafemath".

Art. 2. Objet

Cette association a pour objet le plaisir à faire des mathématiques, les découvrir, les redécouvrir, les faire aimer, comme l'énonce son texte fondateur, proposé par François Dubois en mars 2005 :
« Les mathématiques sont un élément fondamental de la culture. Mais elles sont souvent trop isolées dans des lieux réservés aux spécialistes ! Tout en restant ouvert à tous, au Kafemath, on parle de maths, on en découvre l'histoire, on en fait un peu, on en débat, on en apprend si on veut. On y rit et surtout, surtout, on y prend plaisir ! Ensemble. Et il suffit d'être passionné pour devenir co-animateur. »
Les mathématiques sont l'affaire de tous. En faciliter l'accès est l'objet du Kafemath.

Association créée en février 2011...

Merci de votre attention... des questions ?