Le tour de cartes d'Abdul Alafrez

François Dubois [1]

Kafemath
"La Grange des Doux Dingues"
Authoison (Haute-Saône)
vendredi 11 septembre 2015

[1] créateur et animateur du Kafemath.

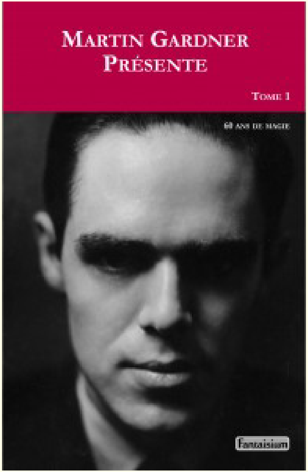
Gardner magicien ?

Gardner magicien !

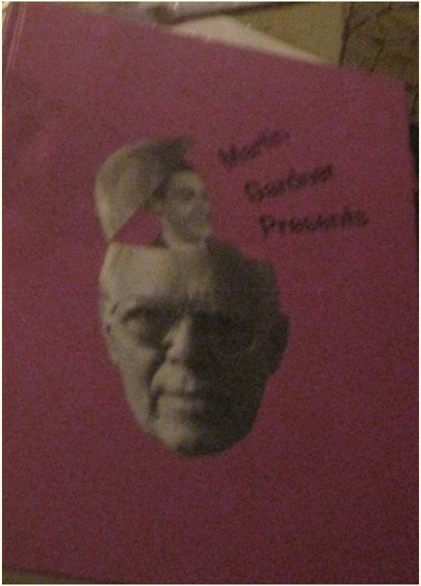
Martin Gardner avec Colm Mulcahy (mathématicien et magicien)

Gardner magicien !

Gardner magicien !



Gardner magicien !



Abdul Alafrez magicien !

Abdul Alafrez magicien !

Le tour de cartes

Tentative d'analyse du tour de cartes

rouge	(r)
noire	$(\mathbf{n})$
position paire	(p)
position impaire	(i)
face en haut	$(+)$
face en bas	$(-)$

six lettres (symboles) à faire jouer ensemble !!

Position initiale

Toutes les cartes sont face en haut $(+)$

Disposition alternée :

les cartes rouges sont en position impaire

les cartes noires en position paire

... pour fixer les idées !

$r = (i, +)\,, \qquad \mathbf{n} = (p, +)$

Couper échange les cartes en position paire

et celles en position impaire....

On néglige cette étape dans une première approche...

On remarque que les cartes rouges restent rouges

et les cartes **noires** restent **noires**

voir la notion d'invariant,

fondamentale dans la science moderne !

Opération fondamentale

Retourner deux cartes qui se suivent

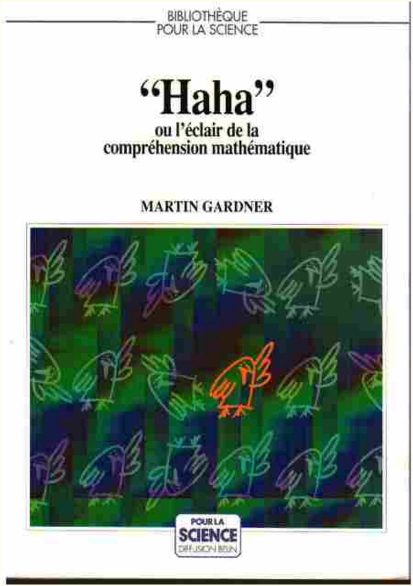
les cartes en position supérieure $+$
passent en position inférieure $-$
et réciproquement

On retourne deux cartes qui se suivent
Donc l'une est "paire" et l'autre est "impaire".

On remarque aussi qu'une carte "paire" devient "impaire"
et réciproquement !

Cette remarque a été faite
en faisant explicitement les mouvements avec les cartes...

Ici se produit le fameux “Haha” de Martin Gardner



Un peu de technique...

Transformation des caracteristiques d'une carte retournée

$$(p, +) \longrightarrow (i, -)$$
$$(p, -) \longrightarrow (i, +)$$
$$(i, +) \longrightarrow (p, -)$$
$$(i, -) \longrightarrow (p, +)$$

On remarque une conservation du produit "parité-face" :

$(p, +)$ et $(i, -)$ séchangent deux à deux

idem pour $(p, -)$ et $(i, +)$.

On décide d'écrire

$$(p, +) \longleftrightarrow (i, -)$$
$$(p, -) \longleftrightarrow (i, +).$$

Après l'invariant des couleurs,

on a un invariant supplémentaire !

Théorème de Noether

www-history.mcs.st-and.ac.uk
Emmy Noether (Allemagne, 1882-1935)

Théorème de Noether

Lien entre le groupe d'invariance de l'espace (de symétrie)
et les lois de conservation

L'espace est invariant par translation ...
donc on a conservation de l'impulsion
Le temps s'écoule toujours de la même façon...
donc on a conservation de l'énergie
L'espace est invariant par rotation...
donc on a conservation du moment cinétique.
Et réciproquement !

Un résultat tout à fait fondamental...

Autres lois de conservation :
charge électrique, flux magnétique, la charge de couleur...

Autant de géométries
proposées par la description du monde physique...

La physique moderne est fondée sur le Théorème de Noether !

Condition initiale et dynamique du tour de cartes

Condition initiale

$$r = (i, +)\,, \quad \mathbf{n} = (p, +)$$

Dynamique lors du retournement de deux cartes

$$(p, +) \longleftrightarrow (i, -)$$
$$(p, -) \longleftrightarrow (i, +).$$

Propriété d'invariance lors de cette dynamique

$$r \in \big\{(i, +), (p, -)\big\}$$
$$\mathbf{n} \in \big\{(p, +), (i, -)\big\}$$

Une carte rouge est soit face dessus en position impaire,
soit face dessous en position paire

Une carte **noire** est soit face dessus en position paire,
soit face dessous en position impaire

Que se passe-t-il “sous la table” ?

On retourne une carte sur deux,
les cartes paires pour fixer les idées.

En conséquence, les cartes paires restent paires
et de même pour les cartes impaires
on remarque qu'on vient de construire un invariant
pour cette dernière transformation

Nouvelle dynamique

$$(p, +) \longrightarrow (p, -)\,, \quad (p, -) \longrightarrow (p, +)$$
$$(i, +) \longrightarrow (i, +)\,, \quad (i, -) \longrightarrow (i, -)$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$(p, +) \longleftrightarrow (p, -)\,, \quad (i, +) \longleftrightarrow (i, +)\,, \quad (i, -) \longleftrightarrow (i, -).$$

Finalement, c'est très simple !

On avait la propriété

$$r \in \{(i, +), (p, -)\}$$
$$\mathbf{n} \in \{(p, +), (i, -)\}$$

et on effectue la transformation

$$(p, +) \longleftrightarrow (p, -)\,, \quad (i, +) \longleftrightarrow (i, +)\,, \quad (i, -) \longleftrightarrow (i, -).$$

On en déduit la nouvelle propriété des cartes rouges et noires :

$$r \in \{(i, +), (p, +)\}\,,$$
$$\mathbf{n} \in \{(p, -), (i, -)\}$$

ce qui signifie que

les cartes rouges sont toutes orientées vers le haut

les cartes **noires** sont toutes orientées vers le **bas**. . .

ce qu'il fallait démontrer !

Commentaire d'Abdul Alafrez

"Ce tour repose sur ce que les magiciens appellent le principe de Gilbreath, du nom de son inventeur Norman Gilbreath."

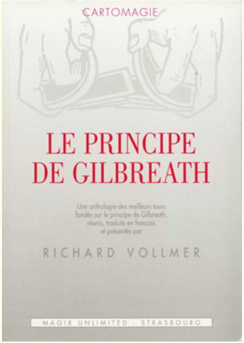
"Ce principe est apparu dans les années 60 et de nombreux magiciens ont créé des tours plus ou moins élaborés à partir de ce principe".

"En tout cas, la première mention de ce tour est dans un compte rendu d'une réunion I.B.M. à Hollywood en 1955."

...Norman Gilbreath "a visitor"
[The Lining Ring, official publication of Magicians "International Brotherhood of Magicians", juillet 1955]

Mélange de Gilbreath :
"C'est un mélange qui ne mélange rien du tout, même entre les mains d'un spectateur !"

Principe de Norman Gilbreath



Un livre de Richard Vollmer

Norman Gilbreath (Etats Unis, né en 1936 ?)

Norman Gilbreath, informaticien et magicien amateur

Conjecture de Gilbreath (mathématicien ?), 1958

Concernant les nombres premiers...

et due à François Proth (France, 1878)

On écrit sur une première ligne la suite des nombres premiers, soit :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

et on écrit sur chaque ligne suivante la valeur absolue de la différence entre deux valeurs consécutives de la ligne précédente,

On obtient ainsi une succession de lignes :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...
1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, ...
1, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4, ...
1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 2, ...
1, 2, 0, 0, 0, 0, 2, ...
1, 2, 0, 0, 0, 2, ...
1, 2, 0, 0, 2, ...

Conjecture de Gilbreath

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots$$
$$1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, \ldots$$
$$1, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4, \ldots$$
$$1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 2, \ldots$$
$$1, 2, 0, 0, 0, 0, 2, \ldots$$
$$1, 2, 0, 0, 0, 2, \ldots$$

La “conjecture de Gilbreath” s'énonce ainsi :

la première valeur de chaque ligne est 1,

sauf dans la première ligne

Elle a été vérifiée pour tous les nombres premiers inférieurs à 10^{13}

i.e. jusqu'à la $3,4\,.10^{11}$ième ligne

voir Andrew Odlyzko [Maths. of Comp., 1993]

Andrew Odlyzko (Etats Unis, né en 1949)