La théorie mathématique de la jonglerie : la quadrature de la balle

Laurent Di Menza

Laboratoire de Mathématiques, URCA

Kafémath, La coulée douce, Paris

Jeudi 4 juin 2015

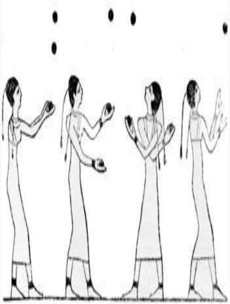
Commençons par le commencement

Jonglerie (ou jonglage, jongle) : (*lat. joculare*)

- Exercice d'adresse consistant à lancer, rattraper et relancer de manière continue des objets en l'air
- Manipulation d'objets demandant de l'entraînement
- Considérée selon les cas comme un jeu, un art, un rite religieux ou bien une perte de temps !

Sur www.google.fr : environ 20 millions de résultats pour "juggling" !

Jongler : un art ancien !



Egypte

2000 av. J. C.

Rome

400 av. J. C.

Moyen-Âge

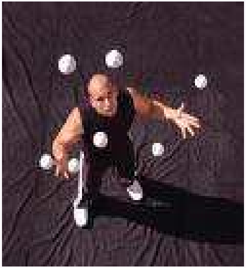
XIIè siècle

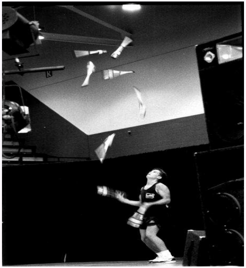
Une idée reçue tenace...





Pas forcément ! !





La jonglerie peut être vue comme un sport à part entière et il existe chaque année des championnats, des conventions, des records homologués, etc.

Rêvons un peu...

Records du monde :

- Balles : 13, 15 lancers (A. Barron, 2013)
- Massues : 9, 9 lancers (E. Dahl, 2013)
- Anneaux : 13, 13 lancers (A. Lucas, 2002)

Ordres de grandeur :

- quelques heures pour apprendre avec 3 balles,
- quelques semaines pour apprendre avec 4 balles,
- quelques années pour apprendre avec 5 balles :-(

Apprendre à jongler...

Façon naturelle :

- S'initier en présence d'un jongleur qui décompose le mouvement et permet de comprendre la structure de la figure
- Apprendre sur internet (vidéos sur youtube)
- Pratiquer régulièrement sans se décourager et ne pas avoir peur de se baisser pour ramasser les balles au début ! !

Musique et partition

Pratique d'un instrument

Structure du morceau

Jonglerie et partition ?

Entraînement

Structure de la figure

Principale difficulté

La jonglerie est tout d'abord visuelle !

Expliquer une figure par un texte ou la parole est très lourd et peut être interprété différemment selon l'individu qui enseigne et celui qui apprend.

Il est donc nécessaire d'introduire un langage adapté permettant de décrire n'importe quelle figure de jonglerie de façon non ambiguë.

Comment “écrire” une figure ?

Réponse : le siteswap (“permutation de sites”)

- Notion permettant de décrire le rythme des lancers et la trajectoire des objets dans l’espace
- Inventée en 1985 par 4 scientifiques passionnés de jonglerie (Tiemann, Magnusson, Klimek et Day)
- A permis une diffusion rapide de ces notions au sein de la communauté de jongleurs à travers le monde

Une hypothèse...

Hypothèse :

On se place dans le cas le plus simple où chaque main lance au plus une balle et reçoit au plus une balle : il s'agit de la jonglerie asynchrone.

Cas plus compliqués :

- On peut lancer en même temps de chaque main
- On peut lancer plusieurs balles d'une même main
- On peut échanger des balles avec un partenaire

Principe : cas asynchrone

Hypothèse : on suppose que chaque main lance alternativement une balle, aux temps discrets 0, 1, 2, 3, etc.

- Temps 0 : la main droite lance une balle
- Temps 1 : la main gauche lance une balle
- Temps 2 : la main droite lance une balle, etc.

Donc : la main droite lance aux temps pairs et la main gauche lance aux temps impairs.

Principe : cas asynchrone

Description du temps :

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
D	G	D	G	D	G	D	G	D	G

Description de l'espace :

On rajoute à chaque fois un nombre à droite, qui donne le "temps de vol" de l'objet lancé au temps considéré (exprimé en unité de temps). Exemple : si la balle retombe 3 temps plus tard, on met 3.

Principe : cas asynchrone

Exemple : la cascade à 3 balles :

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
D3	G3	D3	G3	D3	G3	D3	G3	D3	G3

(temps de vol de chaque balle toujours égal à 3)

Remarque :

Les temps de vol sont indépendants de la rapidité d'exécution de la figure : le temps est ici uniquement une unité relative entre 2 lancers et le siteswap ne donne pas le tempo.

Simplifications

- Pourquoi donner les valeurs des temps ? D3 G3 D3 G3... suffit pour comprendre !
- Pourquoi écrire successivement D et G ? On sait que les lancers sont ici asynchrones...

  La séquence 3 3 3 3 3 3 3... suffit ! !
- Pourquoi répéter indéfiniment la séquence lorsque celle-ci se répète ? ?

  Le chiffre 3 suffit pour coder 3 3 3 3 3 3 3...

Périodicité d'une séquence

Généralement, une figure de jonglerie est périodique, c'est-à-dire conduit à répéter les mouvements au bout d'un temps fini.

Cela se traduit par une périodicité de la séquence :

Exemple :

5 3 4 5 3 4 5 3 4 5 3 4 5 3 4 5 3 4

Périodicité d'une séquence

Généralement, une figure de jonglerie est périodique, c'est-à-dire conduit à répéter les mouvements au bout d'un temps fini.

Cela se traduit par une périodicité de la séquence :

Exemple :

5 3 4 5 3 4 5 3 4 5 3 4 5 3 4 5 3 4

Périodicité d'une séquence

Généralement, une figure de jonglerie est périodique, c'est-à-dire conduit à répéter les mouvements au bout d'un temps fini.

Cela se traduit par une périodicité de la séquence :

Exemple :

5 3 4

On ne retient sur les 3 premiers chiffres et on dit que la période de la séquence est 3.

Au final...

Méthode :

- **Etape 1 :** On détermine la suite de chiffres (la séquence) obtenue en regardant à chaque fois au bout de combien de temps la balle sera rattrapée.
- **Etape 2 :** Comme la séquence ainsi calculée va se répéter au bout d'un certain temps, on la tronque pour ne retenir celle-ci que sur une période.

Le siteswap de la figure désigne alors la séquence écrite uniquement sur une période.

Quelques règles

On souhaite également pouvoir traduire quelques cas très particuliers : on écrira alors

- 0 si la main reste vide (ne lance rien)
- 1 si la balle passe d'une main dans l'autre
- 2 si la balle est gardée (donc non lancée)

Quelques exemples

- Fontaine à 4 balles : 4
- Cascade à 5 balles : 5
- Yo-yo : 42
- Serpent à 2 balles : 303
- Flash à 3 balles : 55500

Les siteswap les plus simples ?

- 0 : les 2 mains sont vides :-)
- 1 : la balle passe d'une main à l'autre :-)
- 2 : chaque main a une balle et ne fait rien :-)
- p (p entier impair) : c'est la *cascade à p balles*. Chaque balle passe alternativement d'une main à l'autre et chaque main enverra toutes les balles.
- q (q entier pair) : c'est la *fontaine à q balles*. Chaque balle reste dans la même main et chaque main gère séparément la moitié des balles.

Quelques propriétés

- La figure est symétrique si la période de la séquence siteswap est impaire : chaque main sera amenée à faire alternativement les mêmes lancers
- La figure est asymétrique si la période de la séquence siteswap est paire : la main droite ne fera pas les mêmes lancers que la main gauche
- Etant donnée une séquence siteswap, le nombre de balles jonglées est la moyenne arithmétique des nombres constituant la séquence

Règle de la moyenne

Analyse sur un exemple :

Soit la séquence 531 définissant une figure de jonglerie à n balles appelée figure 1. On cherche la valeur de n.

Au lieu de faire cette figure, on peut décider de faire avec le même nombre de balles une cascade (si n est impair) ou bien une fontaine (si n est pair), que l'on appelle figure 2, de siteswap nnn (écrit sur la période de la figure 1).

Règle de la moyenne

Or la somme de tous les temps de vol ne varie pas entre la figure 1 et la figure 2. On a donc

$$\mathsf{n}+\mathsf{n}+\mathsf{n}=5+3+1=9 \qquad \Longrightarrow \quad \mathsf{n}=9/3=3.$$

La raisonnement est identique pour n'importe quelle figure, donc

$$\begin{aligned} \text{nombre de balles} \quad &= \quad \frac{\text{somme du siteswap}}{\text{période du siteswap}} \\ &= \quad \text{moyenne arithmétique.} \end{aligned}$$

Siteswap et tempo

Même si le siteswap est rythmé par une unité de temps relative, à unité de temps donnée, on peut adapter celui-ci pour moduler vitesse et hauteur.

Exemple :

- 3 : cascade "normale"
- 522 : cascade plus lente (et plus haute)
- 72222 : cascade encore plus lente (et encore plus haute)

Limitations du siteswap

- Ne permet pas de savoir de quelle façon les balles sont lancées
- Ne permet pas de gérer des passages de balles derrière le dos ou bien sous les jambes
- Ne permet pas de savoir si la figure est réalisable de par le nombre d'objets (jongler à 19 balles ?) et leur taille (jongler avec 3 balles d'un mètre de diamètre ?)

Une question...

On sait qu'à une figure de jonglerie correspond une séquence siteswap.

On se pose maintenant la question inverse : une séquence finie de nombre entiers définit-elle une figure jonglable (au sens : il existe un jongleur capable de la réaliser) ? ?

Il existe des tests arithmétiques permettant de répondre simplement à la question.

Exemple : 431 n'est pas jonglable, 432 n'est pas jonglable, mais 423 est jonglable.

Une question...

Exemple 1

Séquence 431 : $(4 + 3 + 1)/3 = 8/3 = 2.666...$

La moyenne arithmétique n'est pas un nombre entier, donc ce n'est pas la peine d'aller plus loin : on ne peut pas jongler avec 2.6666 balles ! !

Une question...

Exemple 2

Séquence 432 : $(4+3+2)/3 = 9/3 = 3$

La moyenne arithmétique est un nombre entier, donc on ne peut pas exclure d'emblée cette séquence ! Il faut regarder plus précisément ce qui se passe...

Une question...

Comment faire ?

Séquence 432 : 4 3 2 4 3 2 4 3 2 4 3

On place les temps d'arrivée des balles en tenant compte de leurs temps de vol.

Une question...

Comment faire ?

Séquence 432 : 4 3 2 4 3 2 4 3 2 4 3

o o o

On place les temps d'arrivée des balles en tenant compte de leurs temps de vol.

Une question...

Comment faire ?

Séquence 432 :	4	3	2	4	3	2	4	3	2	4	3
		o			o			o			
		o			o			o			

On place les temps d'arrivée des balles en tenant compte de leurs temps de vol.

Une question...

Comment faire ?

Séquence 432 :	4	3	2	4	3	2	4	3	2	4	3
		o			o			o			
		o			o			o			
		o			o			o			

On place les temps d'arrivée des balles en tenant compte de leurs temps de vol.

Une question...

Comment faire ?

Séquence 432 :	4	3	2	4	3	2	4	3	2	4	3
		o			o			o			
		o			o			o			
		o			o			o			

Conclusion : une main va se retrouver avec 3 balles en même temps. C'est contraire au caractère asynchrone donc la séquence n'est pas jonglable !

Une question...

Comment faire ?

Séquence 432 :
$$\begin{array}{ccccc} 4 & + & 0 & = & 4 \\ 3 & + & 1 & = & 4 \\ 2 & + & 2 & = & 4 \end{array}$$

Etape 1 : On ajoute à chaque numéro le temps auquel la balle est lancée : 4 lancée au temps 0, 3 lancée au temps 1, 2 lancée au temps 2.

Une question...

Comment faire ?

$$\text{Séquence } 432 : \begin{array}{ccccccccc} 4 & + & 0 & = & 4 & = & 3 * 1 & + & 1 \\ 3 & + & 1 & = & 4 & = & 3 * 1 & + & 1 \\ 2 & + & 2 & = & 4 & = & 3 * 1 & + & 1 \end{array}$$

Etape 2 : on effectue la division euclidienne des nombres obtenus par la période de la séquence (donc par 3) et on regarde si les restes sont tous différents. Ici, non donc la séquence 432 n'est pas jonglable ! !

Une question...

Exemple 3

Séquence 423 : $(4 + 2 + 3)/3 = 9/3 = 3$

La moyenne arithmétique est un nombre entier, donc on ne peut pas exclure d'emblée cette séquence ! Il faut regarder plus précisément ce qui se passe...

Une question...

Comment faire ?

Séquence 423 : 4 2 3 4 2 3 4 2 3 4 2

On place les temps d'arrivée des balles en tenant compte de leurs temps de vol.

Une question...

Comment faire ?

Séquence 423 : 4 2 3 4 2 3 4 2 3 4 2

o o o

On place les temps d'arrivée des balles en tenant compte de leurs temps de vol.

Une question...

Comment faire ?

Séquence 423 :	4	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2
		o			o			o			
				o			o			o	

On place les temps d'arrivée des balles en tenant compte de leurs temps de vol.

Une question...

Comment faire ?

Séquence 423 :	4	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2
		o			o			o			
				o			o			o	
			o			o			o		

On place les temps d'arrivée des balles en tenant compte de leurs temps de vol.

Une question...

Comment faire ?

Séquence 423 :	4	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2
		o			o			o			
				o			o				o
			o			o			o		

Conclusion : une main va se retrouver avec exactement 1 balle en même temps, donc la séquence est bien jonglable !

Une question...

Comment faire ?

$$\text{Séquence } 423 : \begin{array}{ccccc} 4 & + & 0 & = & 4 \\ 2 & + & 1 & = & 3 \\ 3 & + & 2 & = & 5 \end{array}$$

Etape 1 : On ajoute à chaque numéro le temps auquel la balle est lancée : 4 lancée au temps 0, 2 lancée au temps 1, 3 lancée au temps 2.

Une question...

Comment faire ?

Séquence 423 :
$$\begin{array}{ccccccccc} 4 & + & 0 & = & 4 & = & 3*1 & + & 1 \\ 2 & + & 1 & = & 3 & = & 3*1 & + & 0 \\ 3 & + & 2 & = & 5 & = & 3*1 & + & 2 \end{array}$$

Etape 2 : on effectue la division euclidienne des nombres obtenus par la période de la séquence (donc par 3) et on regarde si les restes sont tous différents. Ici, oui donc la séquence 423 est jonglable ! !

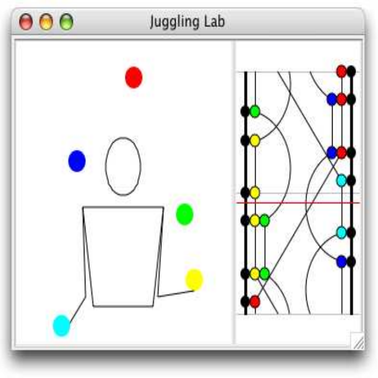
Généralisations

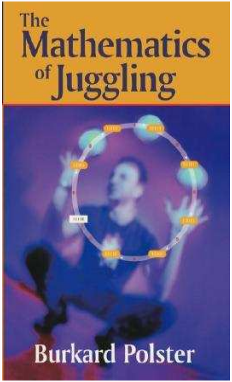
- Transition d'une figure donnée à une autre
- Jonglerie non asynchrone
- Jonglerie avec des massues
- Multiplex : lancer de plusieurs objets en même temps
- Jonglerie avec des passing : possibilité d'échanges de balles avec plusieurs partenaires

Connexions avec les mathématiques

- Théorie des ensembles et combinatoire
- Théorie des graphes et matrices
- Théorie des groupes de Weyl et des groupes de tresses

Connexions avec les mathématiques





Vers un jonglinator ?

Des robots jongleurs ont été construits mais il est difficile de faire mieux que la cascade à 3 balles...

L'être humain est donc (jusqu'à présent) le meilleur jongleur !