Les ponts de Königsberg

François Dubois

30 mai 2015 [1]

• Prologue. En 1735, Leonhard Euler a 28 ans. Comme de nombreux mathématiciens, il est joueur. Et transforme l'étude d'un problème sans solution en une nouvelle théorie mathématique ! Le texte qu'il a laissé [3] fut présenté devant l'Académie de Saint-Pétersbourg le 26 août 1736, comme le rapporte Gerald Alexanderson [1]. On peut lire dans l'article d'Euler [en Latin, nous avons emprunté à Edouard Lucas [5] sa traduction en Français] : "Récemment, j'ai entendu parler d'un problème qui paraît se rapporter à la Géométrie de situation, puisqu'il ne contient, dans son énoncé, que des considérations d'ordre et non de mesure ; aussi ai-je résolu d'exposer ici, comme un spécimen, la méthode que j'ai trouvée pour résoudre ce problème".

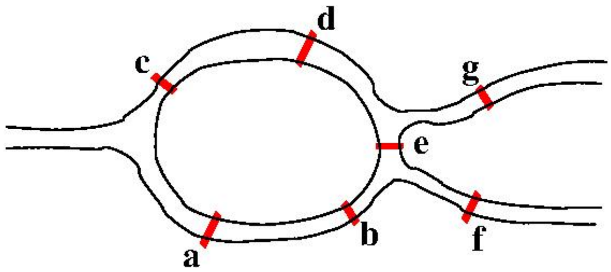


Figure 1. Vue schématique des ponts de la ville de Königsberg (d'après Euler [3]).

• Königsberg. Cette ville était à l'époque (ce n'est plus le cas de nos jours, voir à ce sujet l'article de Roger Mallion [6]) divisée en quatre districts traversés par la rivière Pregel. Euler nous dit : "A Koenigsberg, en Poméranie, il y a une île appelée Kneiphof ; le fleuve qui l'entoure se divise en deux bras (fig. 1), sur lesquels sont jetés les sept ponts a, b, c, d, e, f, g. Cela posé, peut-on arranger son parcours de telle sorte que l'on ne puisse y passer qu'une seule fois ? Cela semble possible, disent les uns ; impossible, disent les autres ; cependant personne n'a la certitude de son sentiment." Puis Euler généralise le problème et en donne une solution qui fonde une nouvelle branche des mathématiques, la théorie des graphes. Nous invitons le lecteur aux délices de cette théorie, par exemple en compagnie de Claude Berge [2]. Nous allons décrire ci-dessous le raisonnement d'Euler en langage moderne, justement avec l'aide de la théorie des graphes. Comme le rappellent par exemple Brian Hopkins et Robin Wilson [4], que ce n'est pas du tout ce qu'a écrit Euler...

[1] Support pour une présentation du Kafemath au "CIJM", salon de la culture et des jeux mathématiques, place Saint Sulpice à Paris 6e, du 28 au 31 mai 2015.

• Raisonnement. Le lecteur peu se convaincre, en regardant la figure 1 et en imaginant un parcours qui passerait une seule fois par chacun des sept ponts, que le problème est difficile. En fait, le problème posé par Euler n'a pas de solution... Et il y a une véritable difficulté à montrer qu'un problème n'a pas de solution. Qui sait ? Peut-être qu'une solution existe mais qu'on n'a pas su la trouver. Le raisonnement qui suit est fondé sur la logique. On part d'une éventuelle solution au problème. On en déduit une conséquence précise. Si l'hypothèse est vraie et que le raisonnement est sans erreur, la conséquence tirée de ce raisonnement est encore vraie. Or on se rend compte finalement que la conséquence logique de l'hypothèse faite n'est pas satisfaite par le problème posé. L'hypothèse initiale de l'existence d'une solution est donc fausse. Le problème n'a pas de solution.

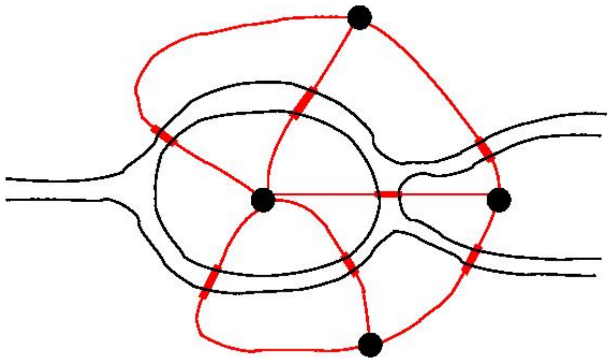
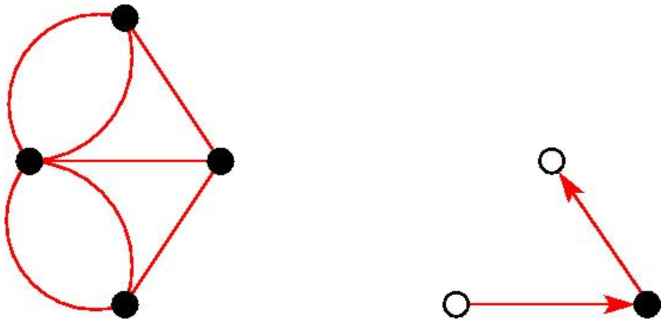


Figure 2. Représentation du problème avec un graphe. Chacun district est modélisé par un sommet du graphe. Chaque pont est représenté par une arête du graphe qui relie deux districts, c'est à dire deux sommets.

• Graphes. On transforme l'expression de l'énoncé du problème initial grâce à un modèle mathématique. Pour cela on construit un graphe comme proposé Figure 2. Un graphe est composé d'une part de sommets et d'autre part d'arêtes qui rejoignent deux des sommets. Chacun district est modélisé par un sommet du graphe. Pour le problème de Königsberg, les arêtes du graphe symbolisent les ponts qui rejoignent les différents quartiers. On dispose de quatre districts et de sept ponts au total. Le graphe a donc quatre sommets et sept arêtes. Nous l'avons représenté Figure 3 (à gauche).



Figures 3. A gauche : graphe qui schématise les discricts et les ponts de la ville de Königsberg. A droite : sommet intérieur à un parcours. Pour un tel sommet, les arêtes vont par paire car il faut arriver au sommet concerné, puis il faut ensuite en repartir !

• Parcours. Qu'est-ce qu'un parcours ? Pour notre étude, un parcours est une suite de sommets séparés par des arêtes du graphe. On dispose donc d'un sommet initial, de sommets intérieurs et d'un sommet final. Le sommet initial peut être identique au sommet final, mais nous ne nous donnons pas cette contrainte. Le cœur du raisonnement est illustré Figure 3 (à droite). Il concerne les sommets intérieurs au parcours. Considérons un tel sommet intérieur. Il faut d'une part y arriver et d'autre part en repartir. Si on ne doit passer qu'une seule fois sur chaque pont, on doit toujours utiliser deux arêtes différentes du graphe pour arriver et repartir. Chaque passage par un sommet intérieur utilise donc **deux** arêtes du graphe. Quel que soit le nombre de passages par ce sommet intérieur, le nombre d'arêtes qui le lient aux autres sommets est donc nécessairement **pair**.

• Contradiction. Nous venons d'établir que pour qu'un parcours utilise une seule fois chaque arête, le nombre d'arêtes qui aboutissent à tout sommet intérieur est pair. Or que constatons nous sur la figure 3 (à gauche) qui représente l'ensemble du graphe ? Chaque sommet du graphe possède **trois** ou **cinq** arêtes qui le lient aux autres sommets. Avec la contrainte précédente, aucun des sommets ne peut être intérieur au parcours demandé, ce qui est impossible car avec un parcours construit sur un ensemble de quatre sommets, on doit nécessairement avoir au moins deux sommets intérieurs au parcours. Le problème des ponts de Königsberg n'a pas de solution. La méthode de démonstration de cette impossibilité se généralise sans difficulté, ainsi que l'a traité Euler dans sa communication.

• Epilogue. Le philosophe Emmanuel Kant (1724-1804) n'a jamais quitté sa ville natale de Königsberg. Il se promenait tous les jours le long d'une trajectoire quasi-immuable. Je ne sais s'il a lu l'article d'Euler, publié en 1741 alors qu'il avait dix-sept ans. Et je ne sais si sa promenade l'amenait à passer deux fois sur le même pont !

References bibliographiques

[1] G.L. Alexanderson. "Euler and Königsberg's bridges: a historical view", *Bulletin (new series) of the American Mathematical Society*, volume 43, pages 567-573, 2006.

[2] C. Berge. *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1958.

[3] Leonh. Eulero. "Solutio Problematis ad geometriam Situs Pertinentis", [Solution d'un problème lié à la géométrie la position], *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, [Mémoires de l'académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg], volume 8, pages 128-140, 1736 (pulication en 1741). Voir aussi *Opera Omnia*, Series 1, volume 7, pages 1-10.

[4] B. Hopkins, R.J. Wilson. "The Truth about Königsberg", *The College Mathematics Journal*, volume 35, number 3, pages 198-207, 2004.

[5] E. Lucas. *Récréations mathématiques*, Delannoy, Laisant et Lemoine, Paris, 1891.

[6] R.B. Mallion. "The Six (or Seven) Bridges of Kaliningrad: a Personal Eulerian Walk", *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, volume 58, pages 529-556, 2007.