

16<sup>ème</sup> Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques  
Place Saint Sulpice, Paris  
Les p'tits dix heures, les p'tits quatre heures

## P'tit quatre heures chinois

Un phare émet un signal lumineux jaune toutes les 15 minutes et un signal rouge toutes les 28 minutes.

On aperçoit le signal jaune à minuit deux et le signal rouge à minuit huit. À quelle heure verra-t-on pour la première fois les deux signaux émis ensemble ? Toutes les autres fois ?

### *Solution*

Soit  $x$  en minutes les temps écoulés depuis minuit où les deux signaux émettent en même temps,

$$\text{on a : } x \equiv 2[15] \quad \text{et} \quad x \equiv 8[28]$$

En d'autres termes,  $x$  peut s'écrire :  $x = 15k + 2, k \in \mathbb{N}$  et  $x = 28l + 8, l \in \mathbb{N}$

On a donc :  $15k + 2 = 28l + 8$ , les premiers entiers qui conviennent sont :  $k = 6, l = 3$

C'est à **1h32** que les deux signaux émettront ensemble pour la première fois.

$$\text{Les autres valeurs de } x \text{ sont : } \begin{cases} 15k + 2 = 28l + 8 \\ 15 \times 6 + 2 = 28 \times 3 + 8 \end{cases} \Rightarrow 15 \times (k - 6) = 28 \times (l - 3)$$

15 et 28 sont premiers entre eux, on peut donc appliquer le théorème de Gauss :

$$l - 3 = 15L, \quad L \in \mathbb{N} \quad k - 6 = 28K, \quad K \in \mathbb{N}$$

Réciproquement, soit  $L \in \mathbb{N}, K \in \mathbb{N}$  et  $l = 15L + 3, k = 28K + 6$

Les signaux émettront en même temps, au bout d'un temps  $x = 420K + 92 = 420L + 92$  exprimée en minutes. Or : 420 minutes = 7 heures, donc les heures de simultanéité : **1h32, 8h32, 15h32, 22h32...**