

DUALITES



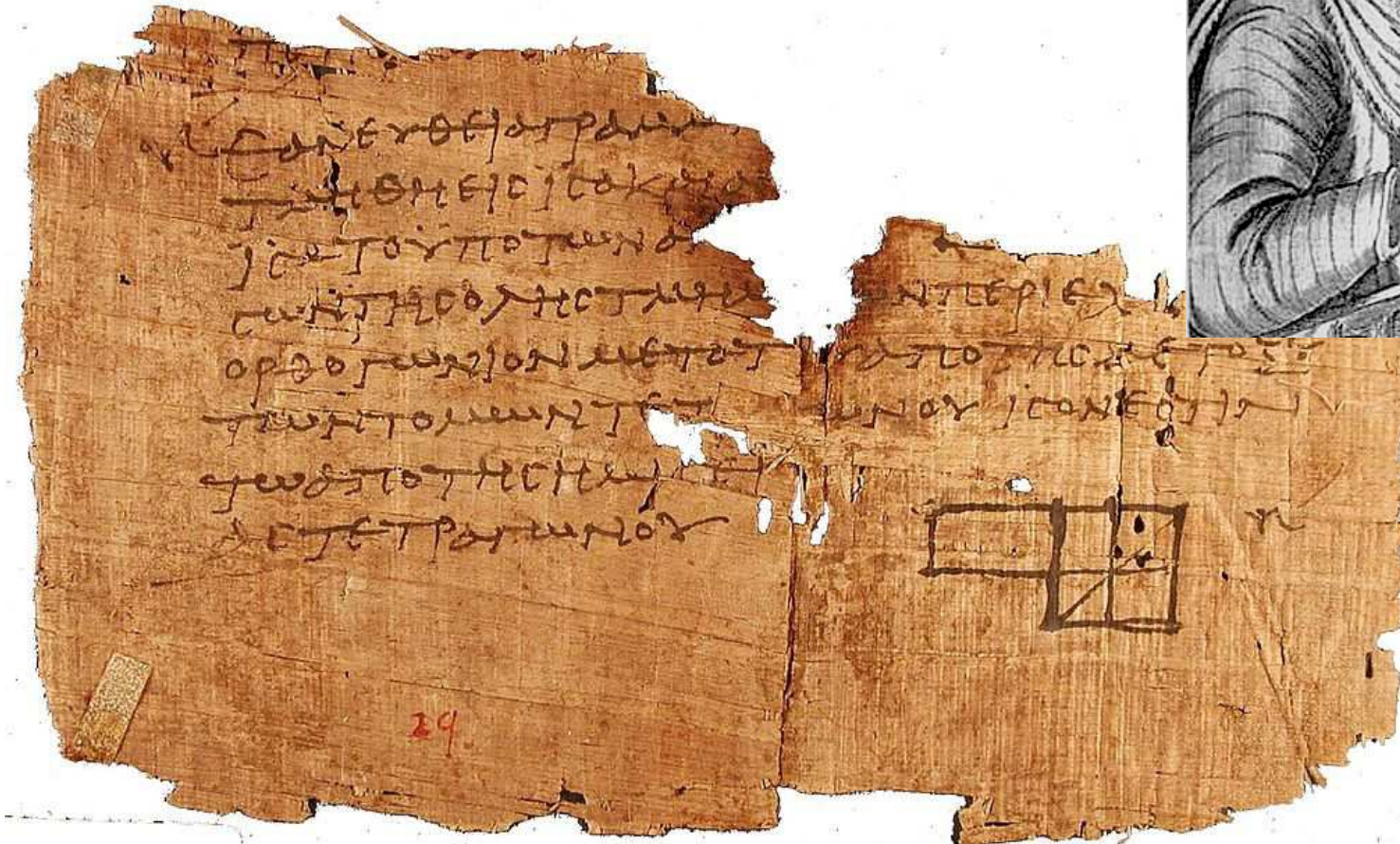
Babylone
vers - 1700



Papyrus de Rhind
vers - 2000

Les *Eléments* d'Euclide

vers - 300



Papyrus Oxyrhyncus 29, vers II^e siècle

Les *Eléments* d'Euclide (-325; -265)

Eléments: 465 propositions en 13 livres

Livres I à IV : Géométrie plane

(Pythagore, cercle, polygones réguliers)

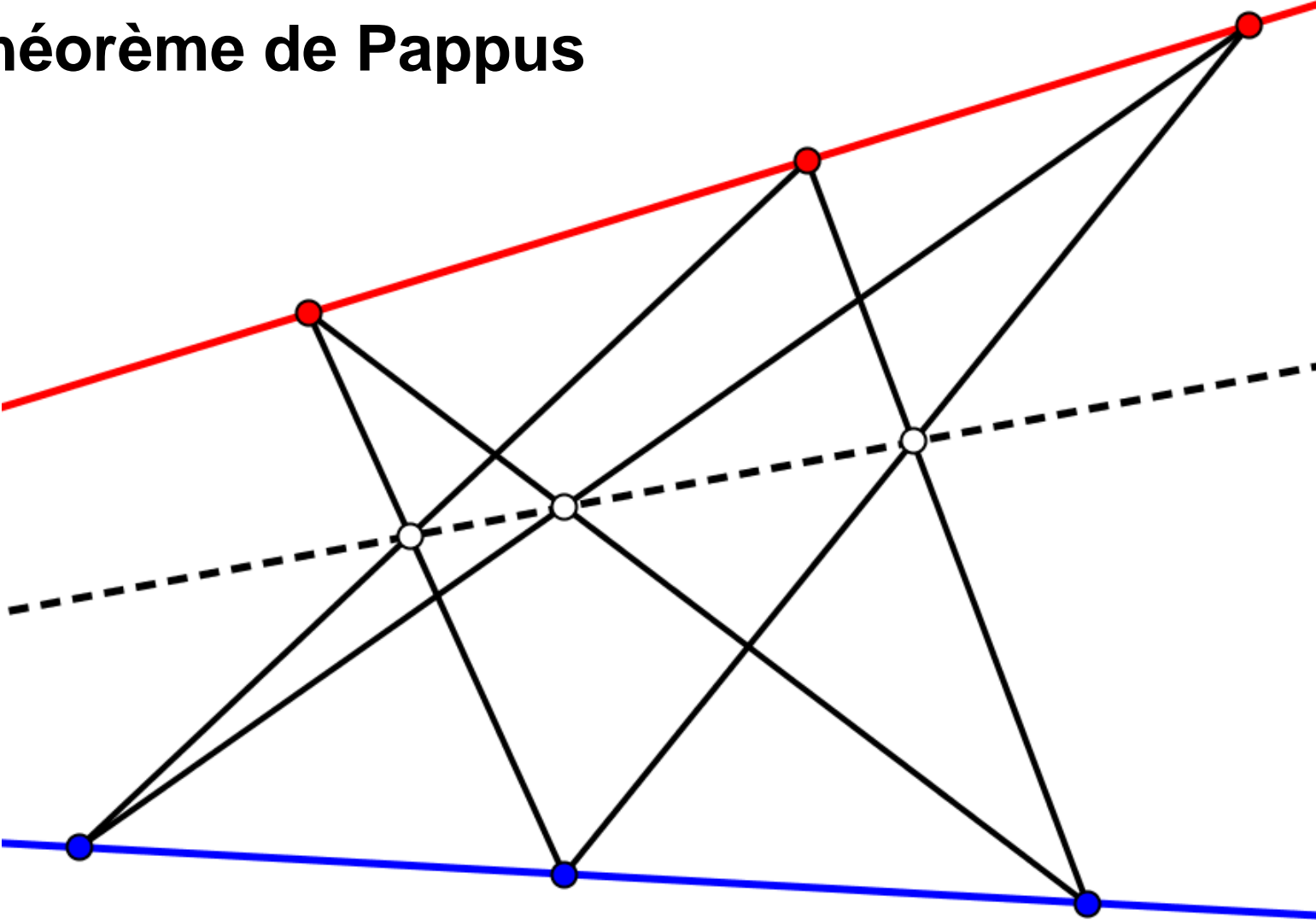
Livres V à X : Proportions

(Thalès, $\sqrt{2}$)

Livres XI à XIII : Géométrie dans l'espace

(Polyèdres réguliers, aires, volumes cône, cylindre, sphère)

Théorème de Pappus



conique dégénérée

La naissance de la science moderne

Galileo Galilei
(1564 - 1642)



L'essayeur (1623) :

«[le grand livre de l'Univers] est écrit dans le langage des mathématiques, et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques. »

Géométrie Analytique

René Descartes (1596 - 1650)



Dualité de l'âme et du corps
Géométrie



Pierre de Fermat († 1665)

Ad locos planos et solidos Isagoge

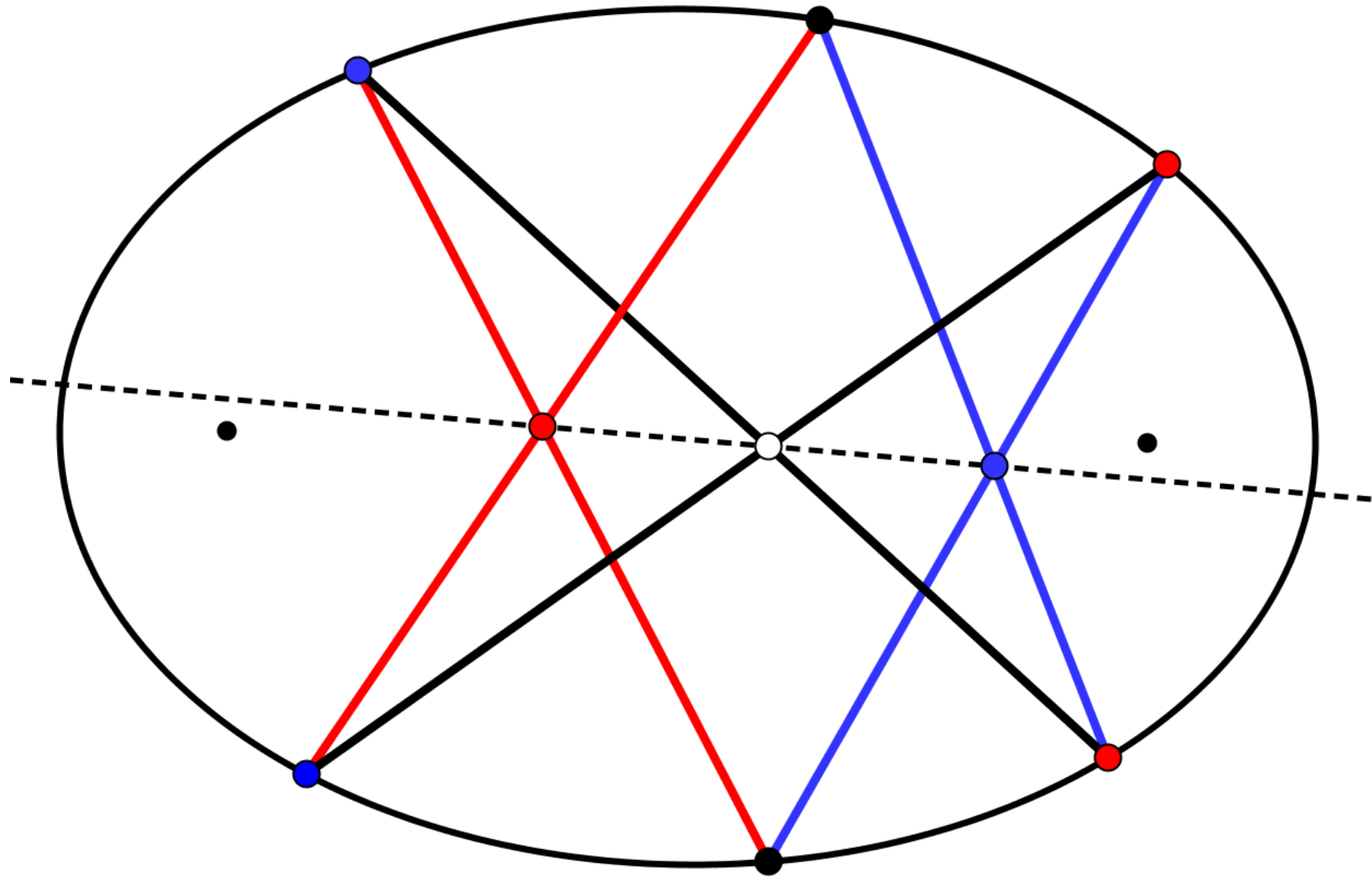
Blaise Pascal (1623 - 1662)



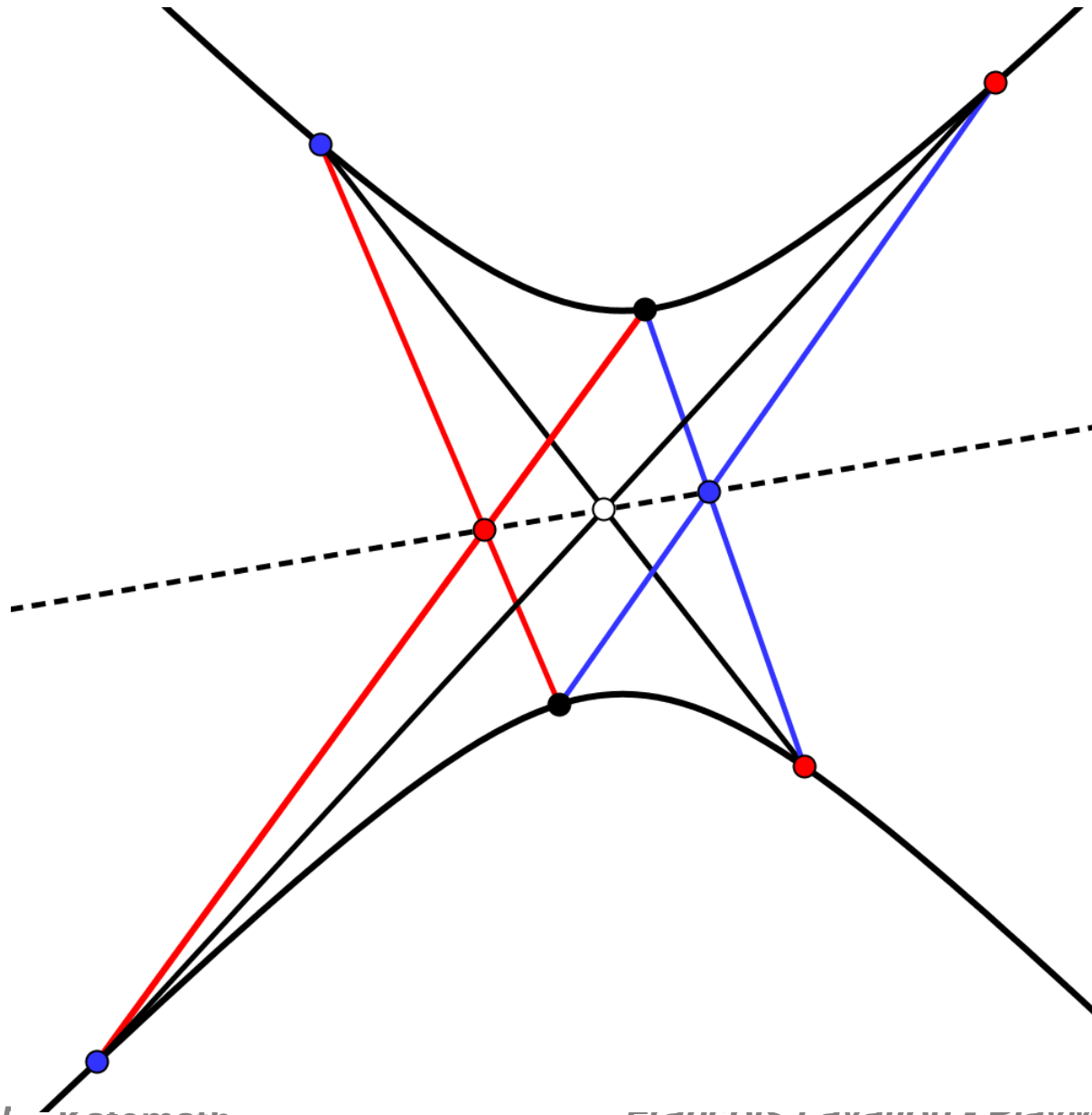
« Car on croit qu'il n'est mort si jeune, que pour n'avoir pas assez ménagé les forces et l'étendue de son imagination. Les grands efforts qu'il étoit nécessairement obligé de faire pour imaginer & pour démêler ce nombre prodigieux de lignes & de figures embarrassées, & pour les embrasser d'une seule vüe luy attirèrent cet épuisement général du cerveau, qui l'enleva dans la force de son âge. On ne doit pas craindre le même danger des sciences qu'on explique ici. »

Jean Prestet (1648-1691) - 1689

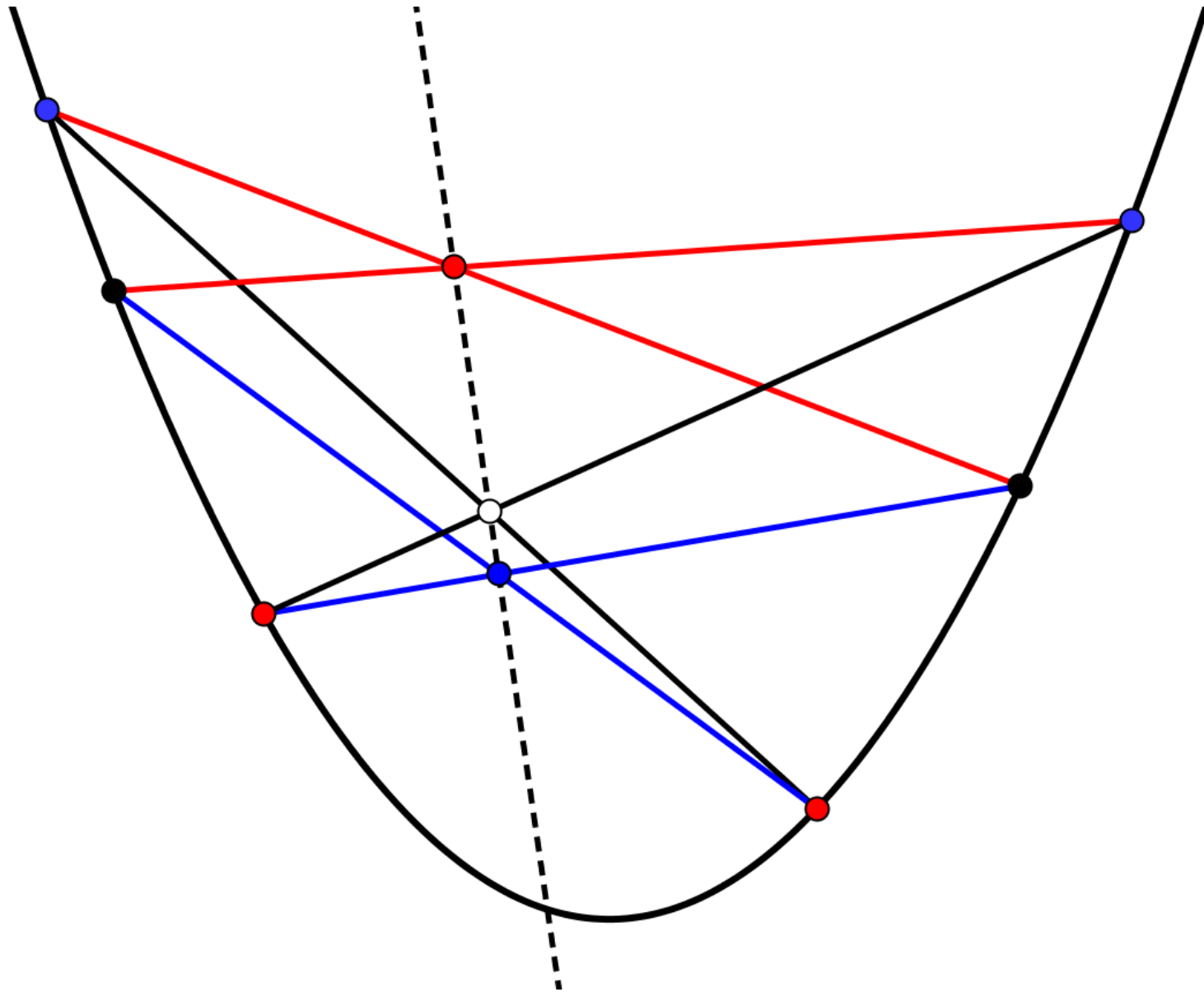
Théorème de Pascal



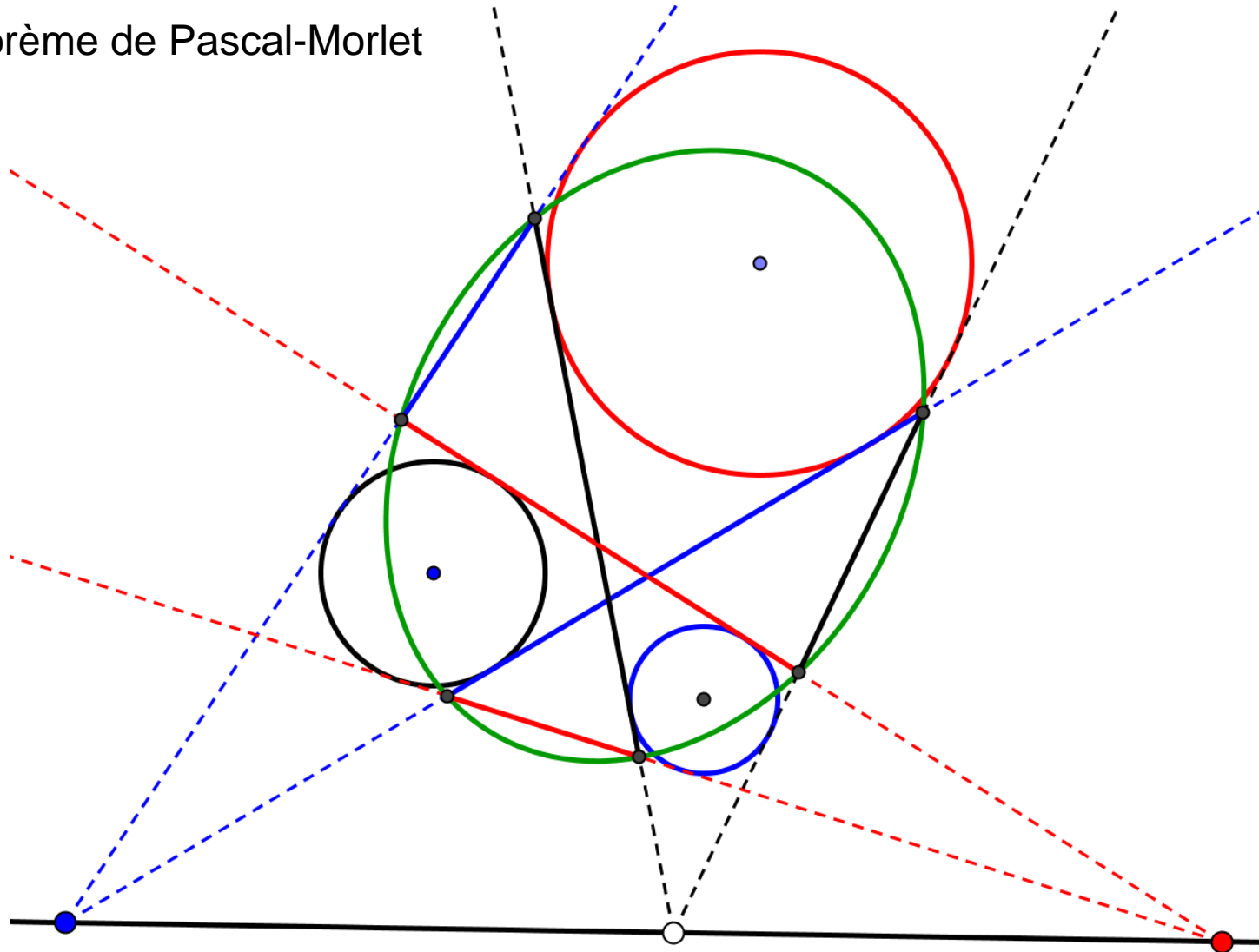
Théorème de Pascal



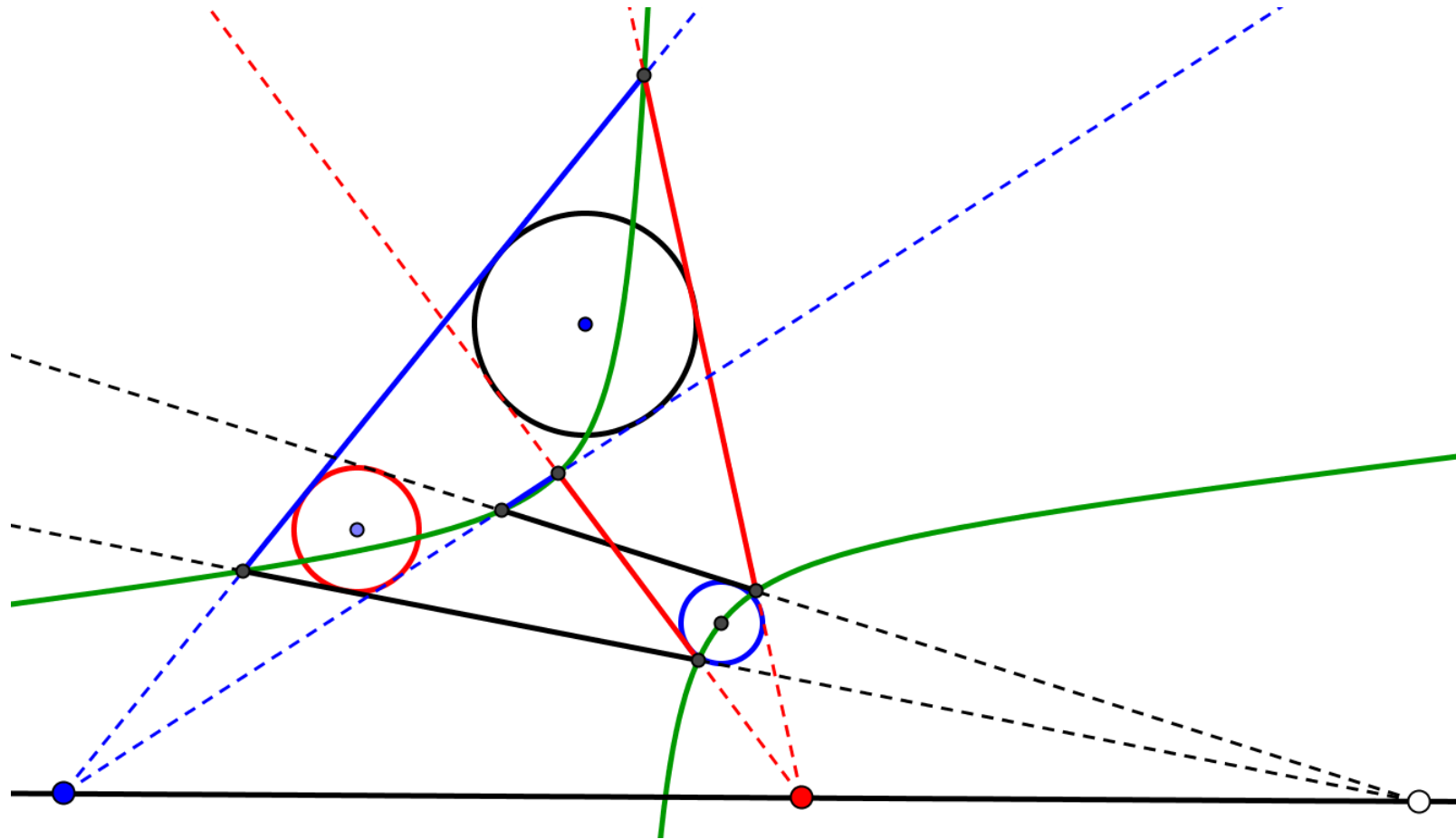
Théorème de Pascal



Théorème de Pascal-Morlet



Théorème de Pascal-Morlet



Girard Desargues (S.G.D.L.) (1591 - 1661)

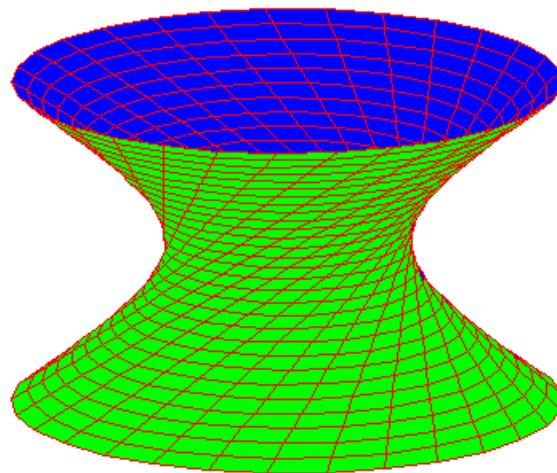
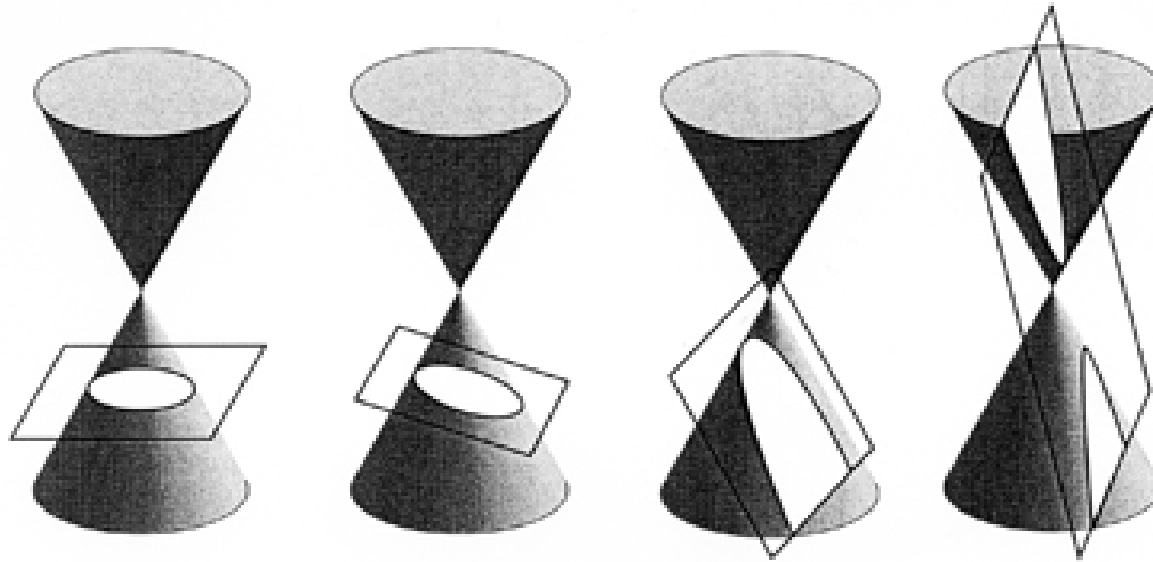
perspectives



Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan (1639)

Coniques comme projection d'un cercle, point à l'infini, ...

Diaboliques Coniques



perspectives



perspectives



perspectives

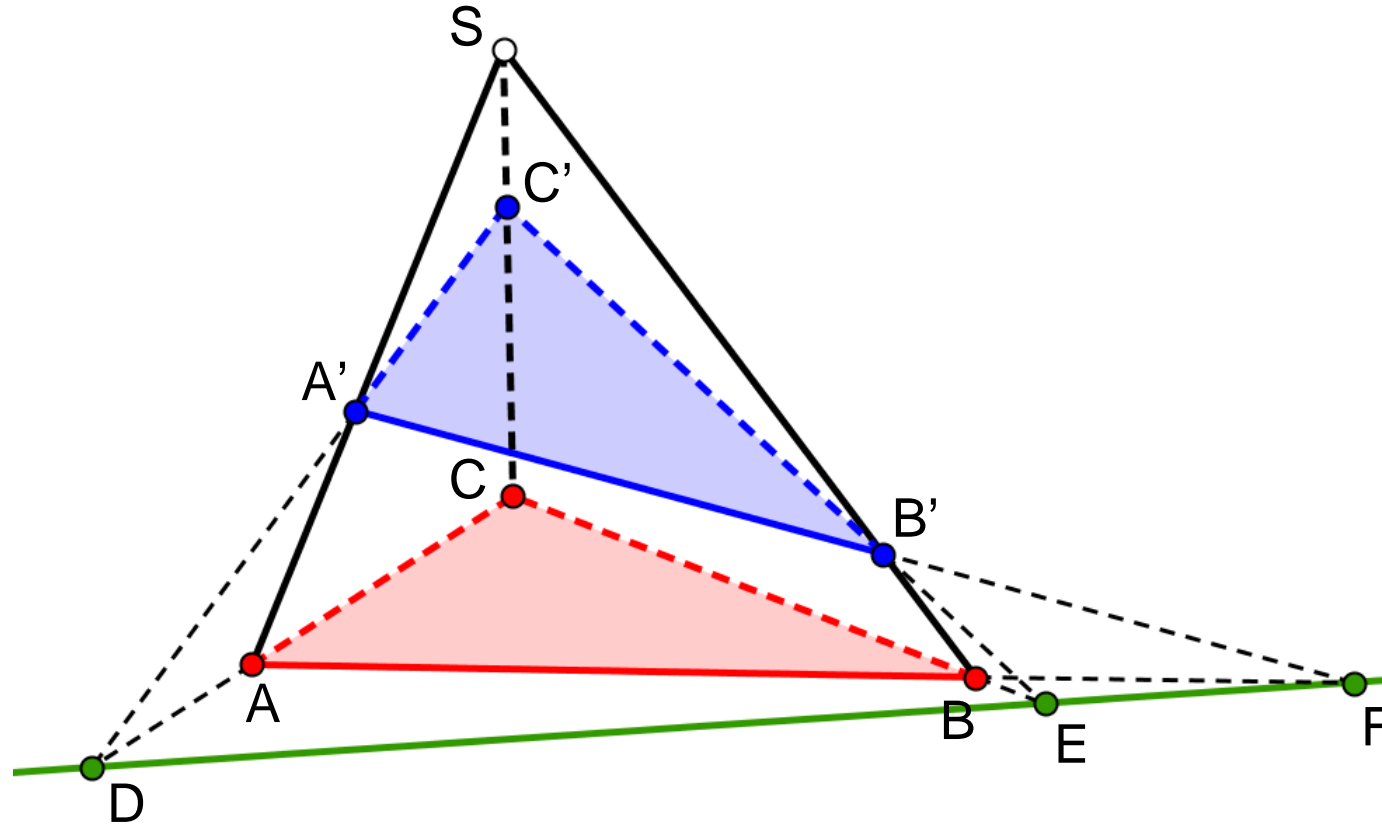


perspectives



Théorème de Desargues

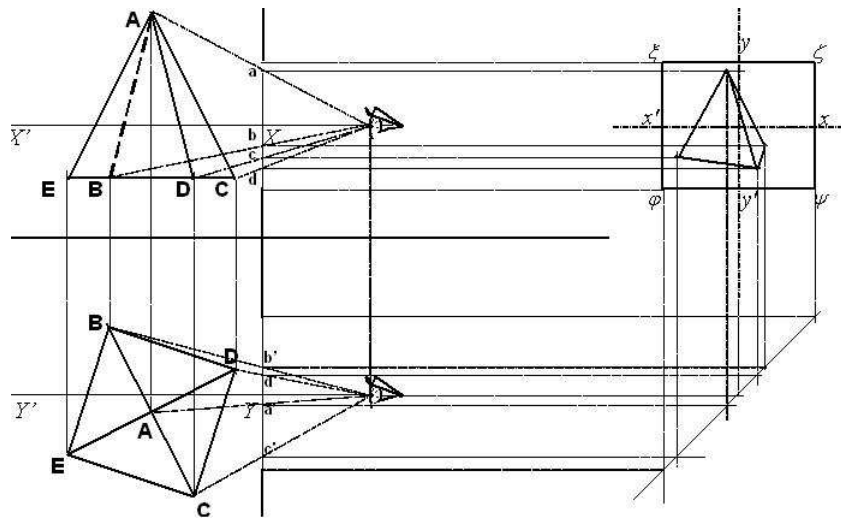
perspectives



D, E, F alignés \longleftrightarrow (AA') , (BB') , (CC') concourantes

Gaspard Monge (1746 - 1818)

Géométrie descriptive

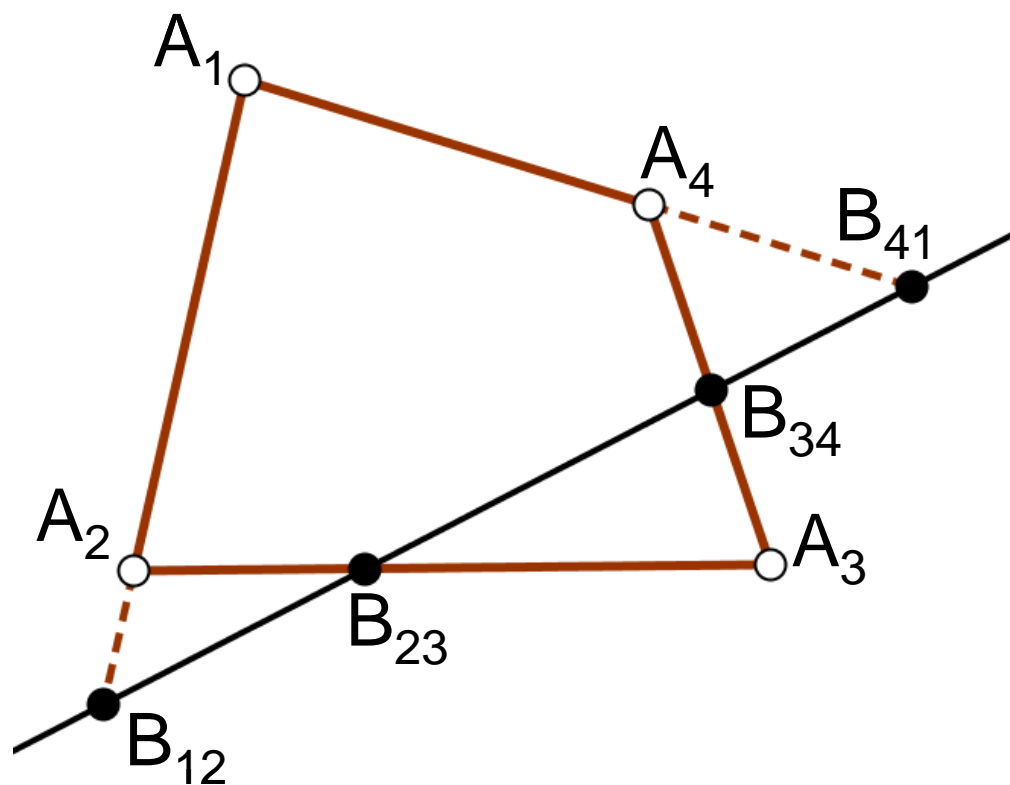


Lazare Carnot (1753 - 1823)

L'organisateur de la victoire

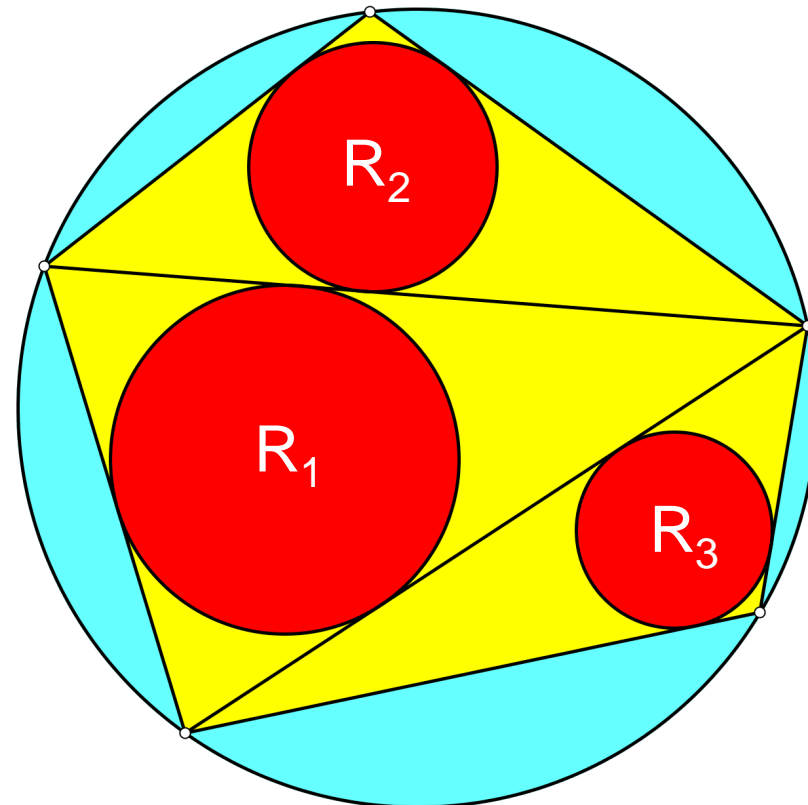
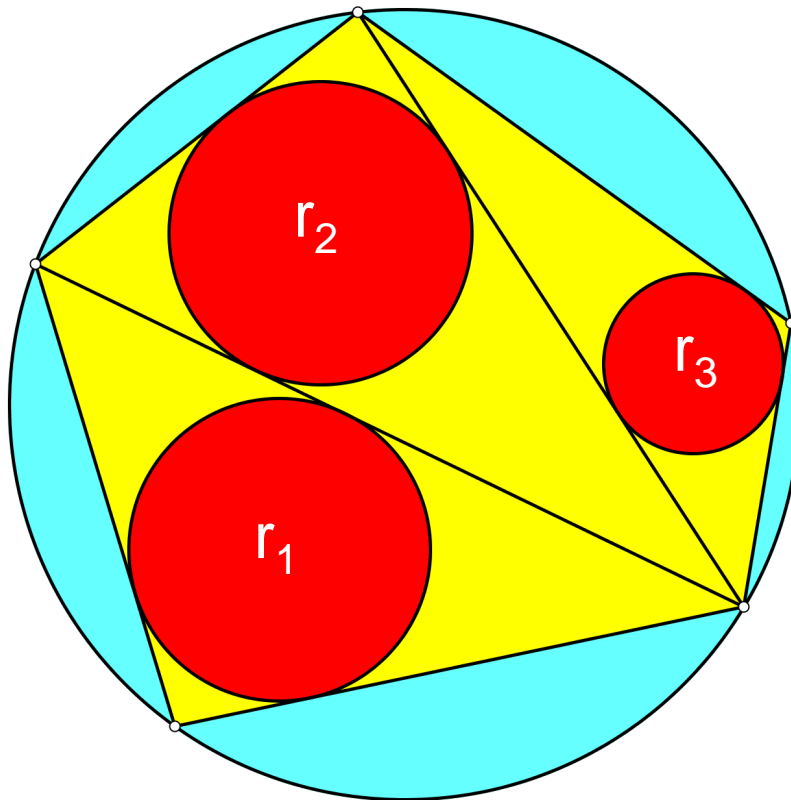
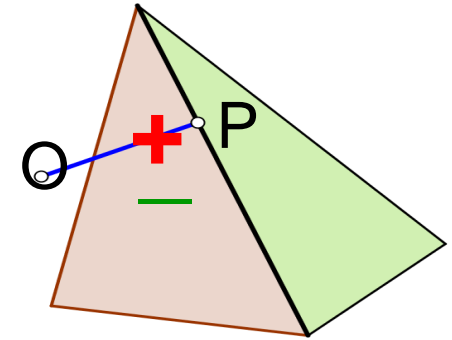
Principe de continuité

Géométrie de Position



$$\prod_{i=1}^n d_i = \prod_{i=1}^n D_i$$

Théorème japonais



$$R_1 + R_2 + R_3 = r_1 + r_2 + r_3$$

Jean-Victor Poncelet (1788 - 1867)

Introduction de l'expression « à l'infini »
dans deux textes (1818):

*Considérations philosophiques et techniques sur
le principe de continuité dans les lois
géométriques*
terme « à l'infini » lié au **principe de continuité**.

Traité des propriétés projectives des figures
la notion d'éléments à l'infini,
même si elle reste liée au principe de continuité,
sert à exposer les **principes de projection**.



Le général Poncelet.

Jean-Victor Poncelet

Principe de continuité : Permanence des propriétés dans les cas où les éléments deviennent imaginaires.

→ nécessité d'introduire des «expressions figurées qui peuvent servir à caractériser les êtres de non-existence.»

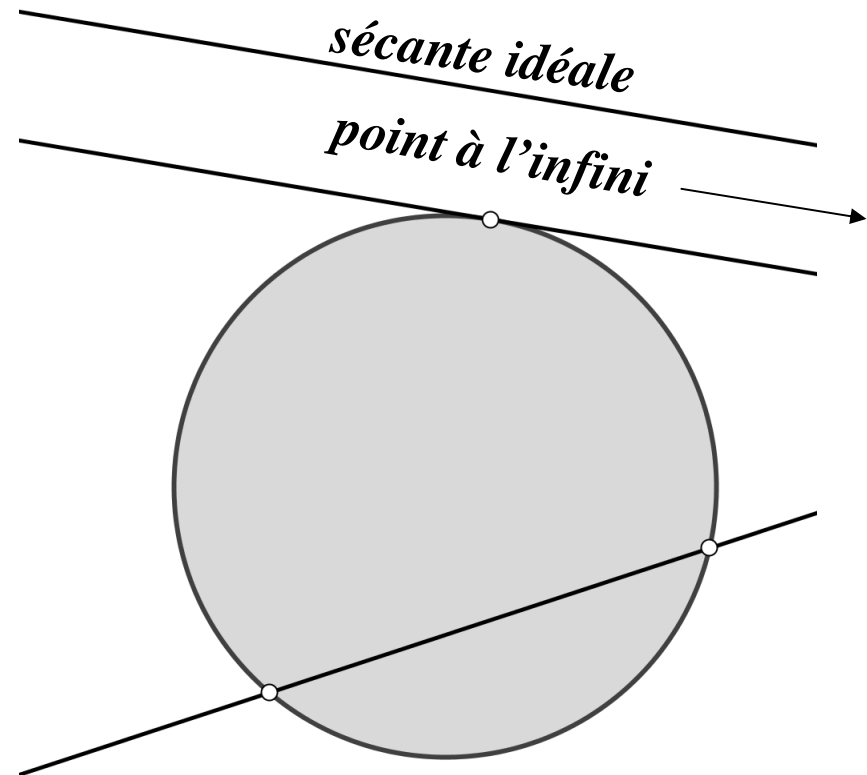
Considérations philosophiques

Nouveau vocabulaire:

- imaginaires
- sécante idéale

Droite : un (!) point à l'infini

Plan : une (!) droite à l'infini



Jean-Victor Poncelet

Le premier à se servir explicitement de la notion d'élément à l'infini.

[...] il est aisé de voir que **l'hyperbole a deux points à l'infini** avec deux tangentes en ces points nommées asymptote, et que, pour la **parabole**, ces deux points et ces deux tangentes se confondent en **un seul point** et une seule tangente située tout entière à l'infini. [Poncelet 1822]

Deux cercles coplanaires ont quatre points communs, deux réels ou imaginaires par lesquels passe une sécante réelle ou idéale et deux points imaginaires à l'infini par lesquels passe une sécante à l'infini.

APPLICATIONS D'ANALYSE ET DE GÉOMÉTRIE,

QUI ONT SERVI, EN 1822, DE PRINCIPAL FONDAMENT AU

TRAITÉ

DES

PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DES FIGURES,

PAR J.-V. PONCELET;

COMPRENANT LA MATIÈRE DE

SEPT CAHIERS MANUSCRITS

RÉDIGÉS A SARATOFF DANS LES PRISONS DE RUSSIE (1813 A 1814),

ET ACCOMPAGNÉS DE DIVERS AUTRES ÉCRITS, ANCIENS OU NOUVEAUX,

Annités par l'Auteur et saisis d'éditeurs par MM. MANSSEUR et BOUTARD,
anciens Elèves de l'École polytechnique.

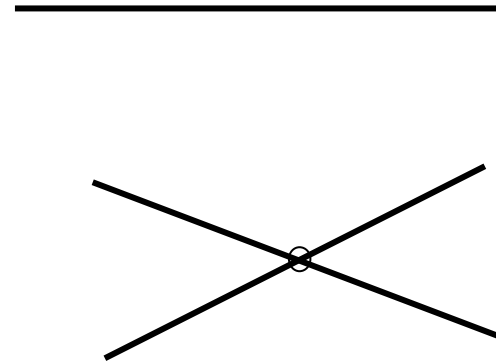
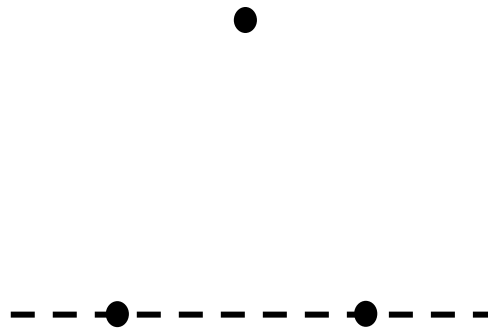
PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
Quai des Augustins, 55.

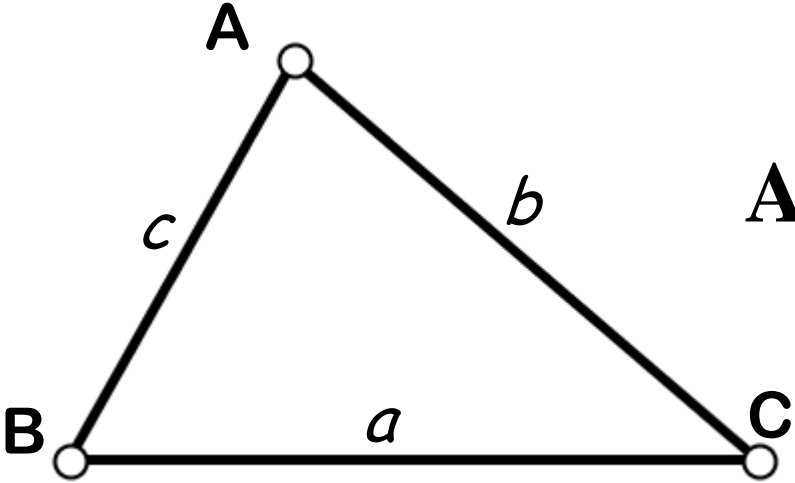
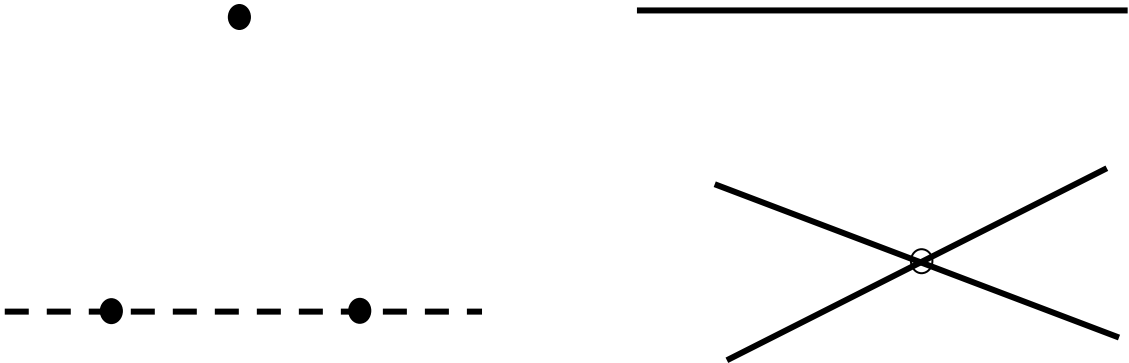
1862

(L'Auteur et l'Éditeur de cet ouvrage se réservent le droit de traduction.)

Dualité point - droite



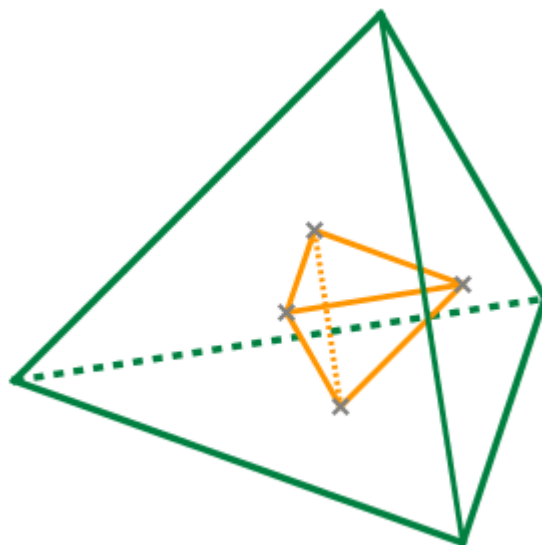
Dualité point - droite



Auto-Dualité

Formule d'Euler : $(F + S) - A = 2$

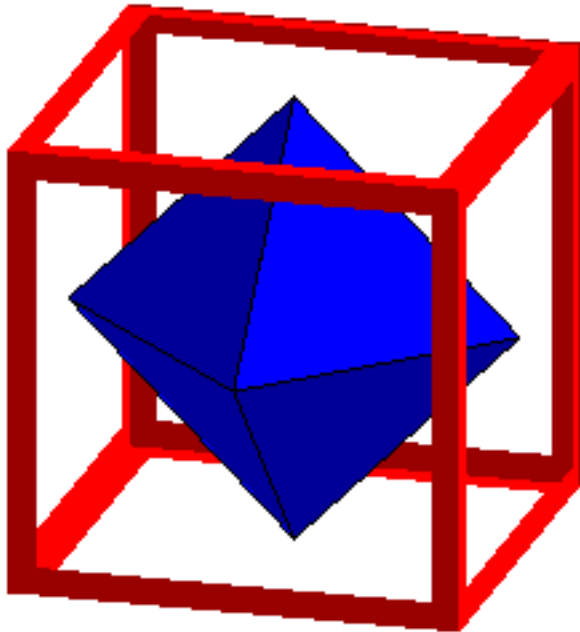
Auto-Dualité



$(4,4)$

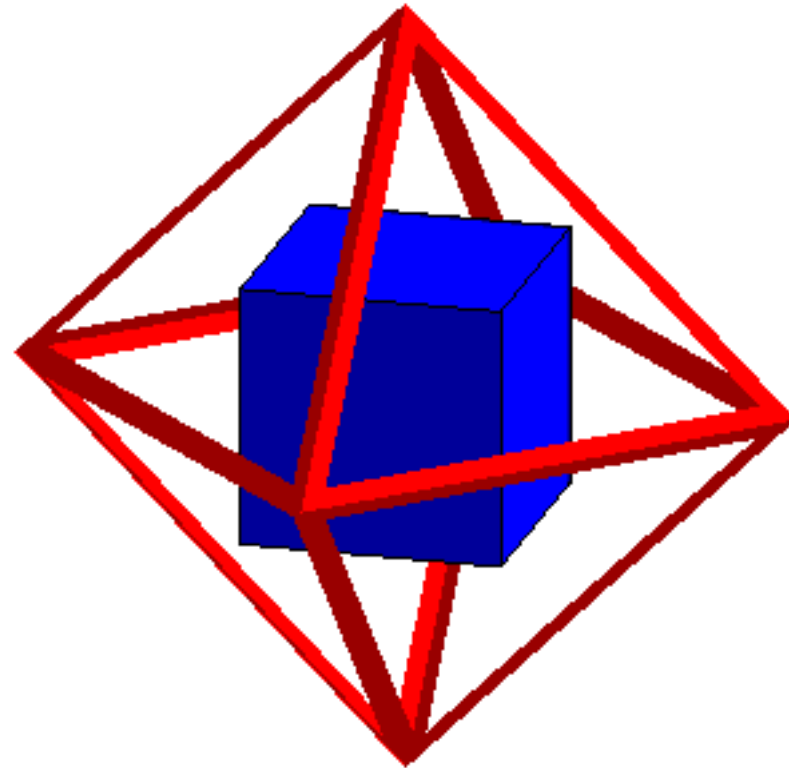
Dualité platonicienne

Cube



$(3,4)$

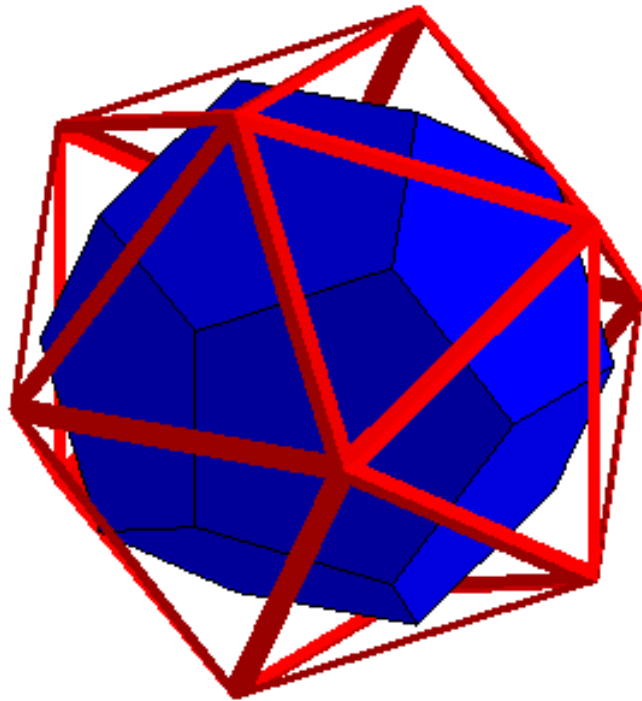
Octaèdre



$(4,3)$

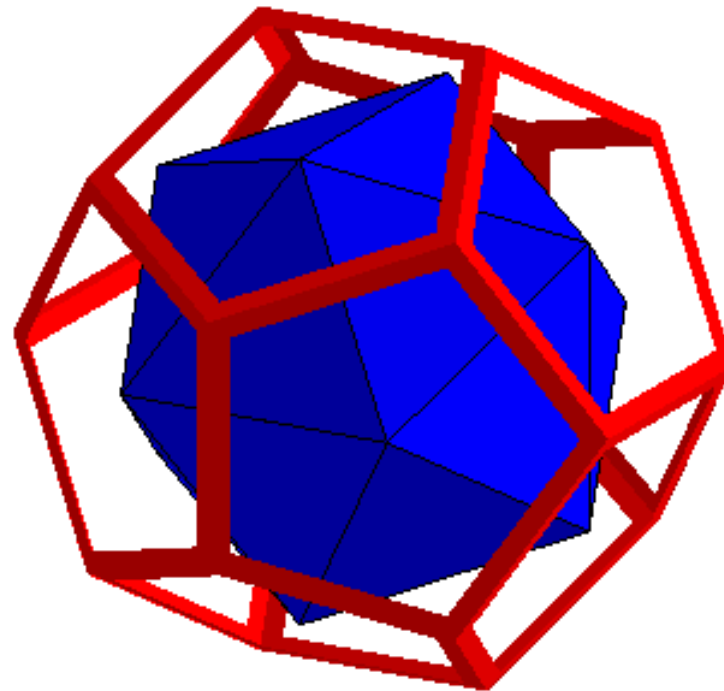
Dualité platonicienne

Icosaèdre

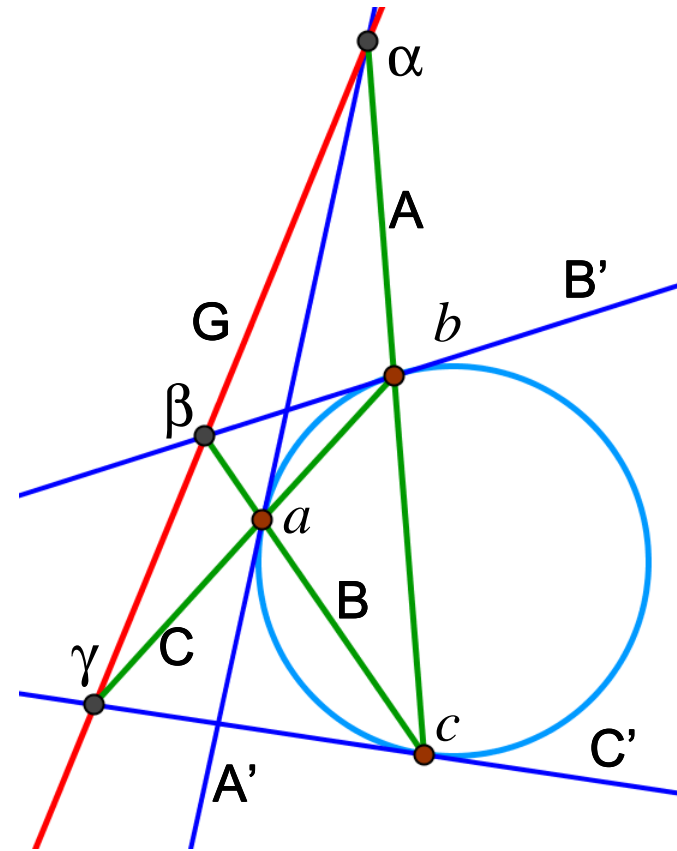
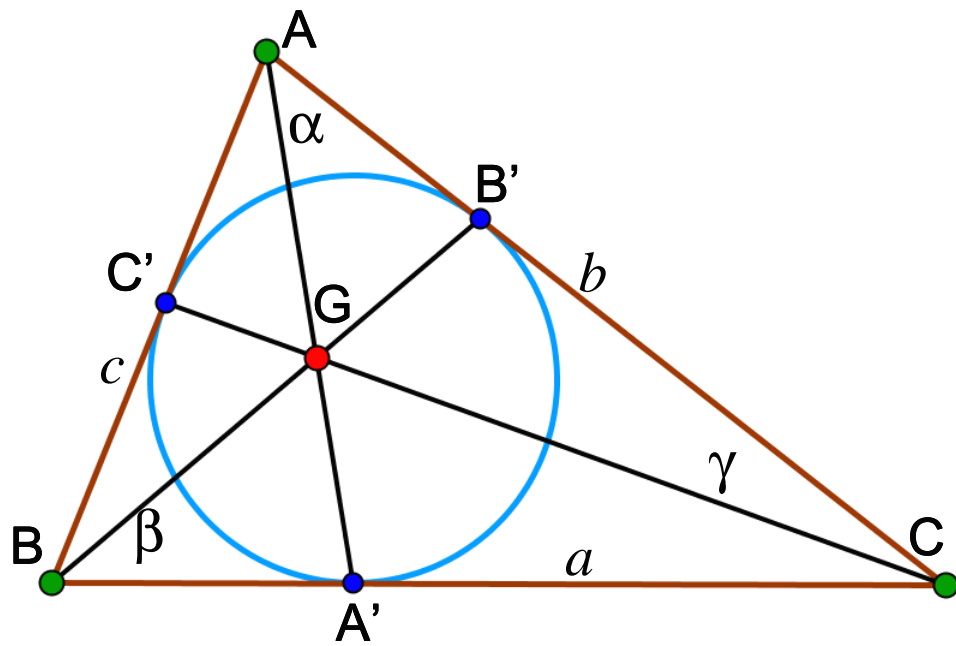


$(5,3)$

Dodécaèdre



$(3,5)$



Joseph Diez Gergonne (1771 - 1859)

Annales de Mathématiques Pures et Appliquées
(*Annales de Gergonne, JG*)

Provoque Poncelet en dualité

Querelle de paternité,
mais surtout querelle ontologique



Gergonne
pas métrique
tout est double

Poncelet
aussi métrique
tout n'est pas double

Michel Chasles (1793 - 1880)

synthèse

Aperçu historique (!)

Dualité

Homographie



Géométrie projective

JVP justifie cette notion « métaphysique » par l'étude de propriétés projectives (qui se conservent par projection centrale).

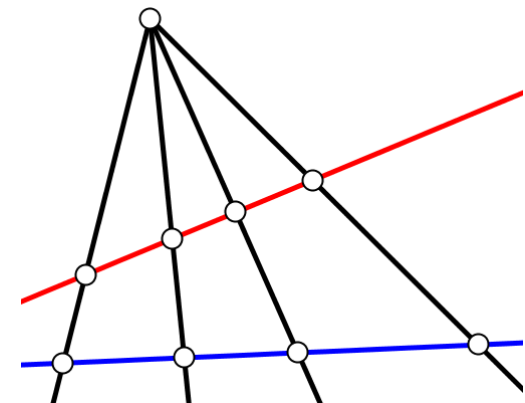
Mathématiques = recherche d'invariants

Géométrie projective :

Propriétés qui se conservent par projection?

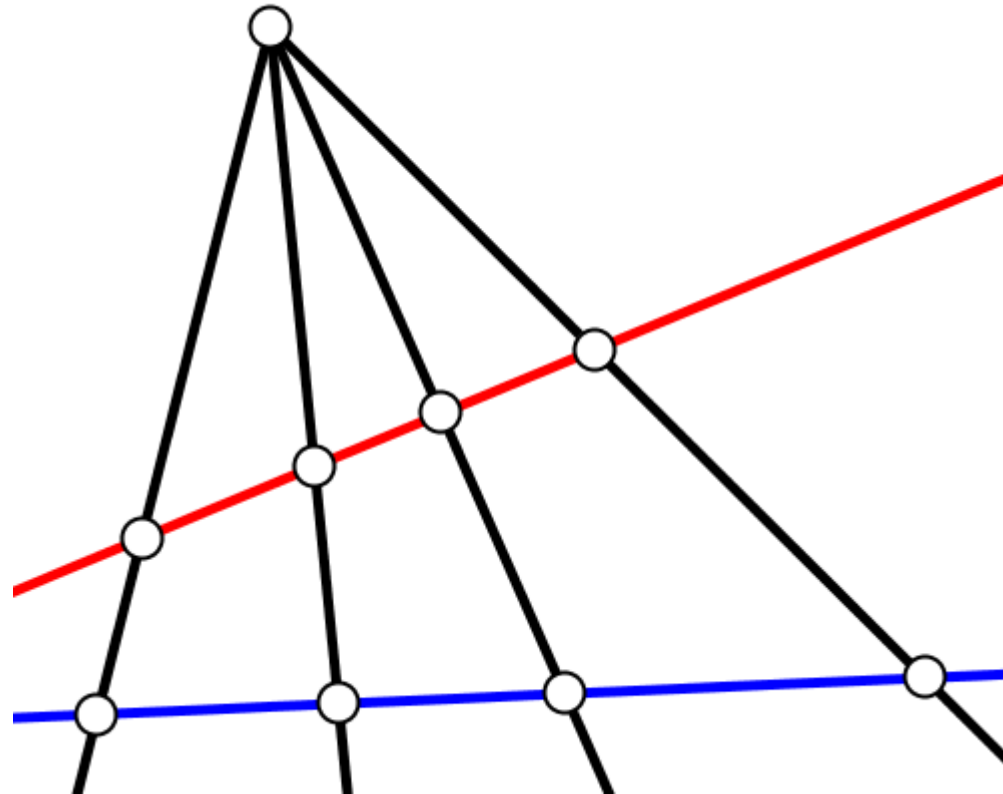
Deux principes fondamentaux:

- Principe de continuité
- Dualité

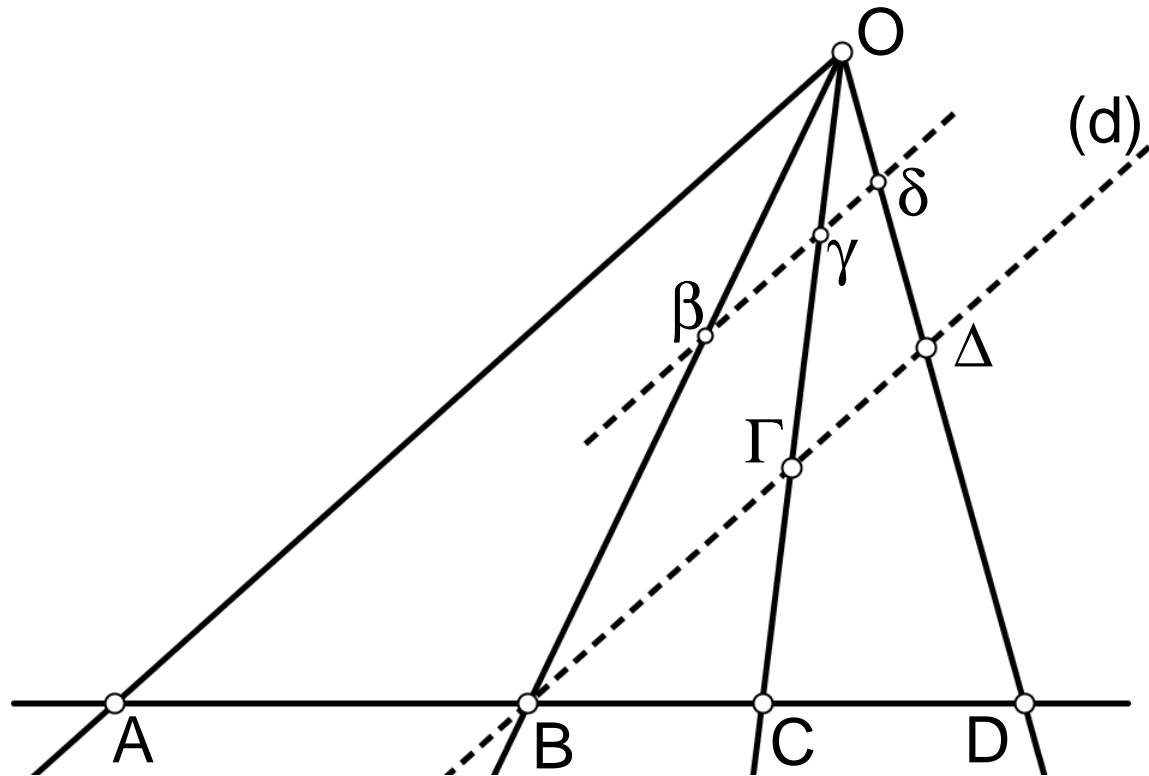


non conservation de toutes les propriétés métriques

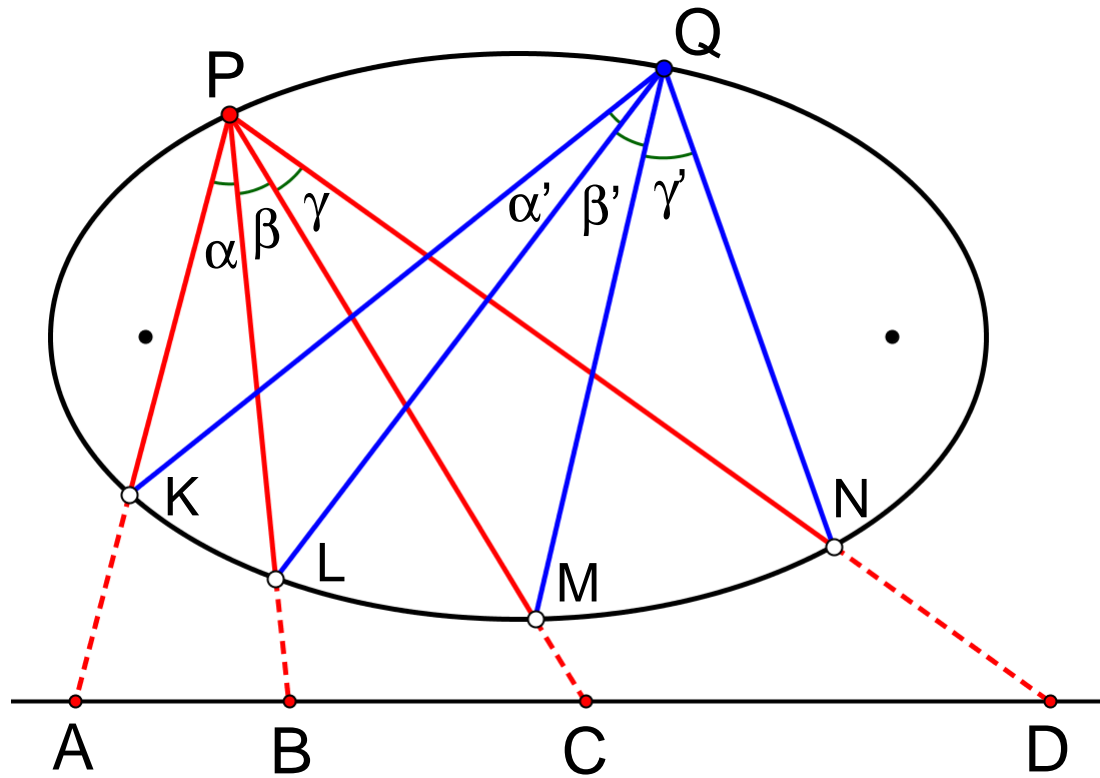
l'après Pappus : le birapport

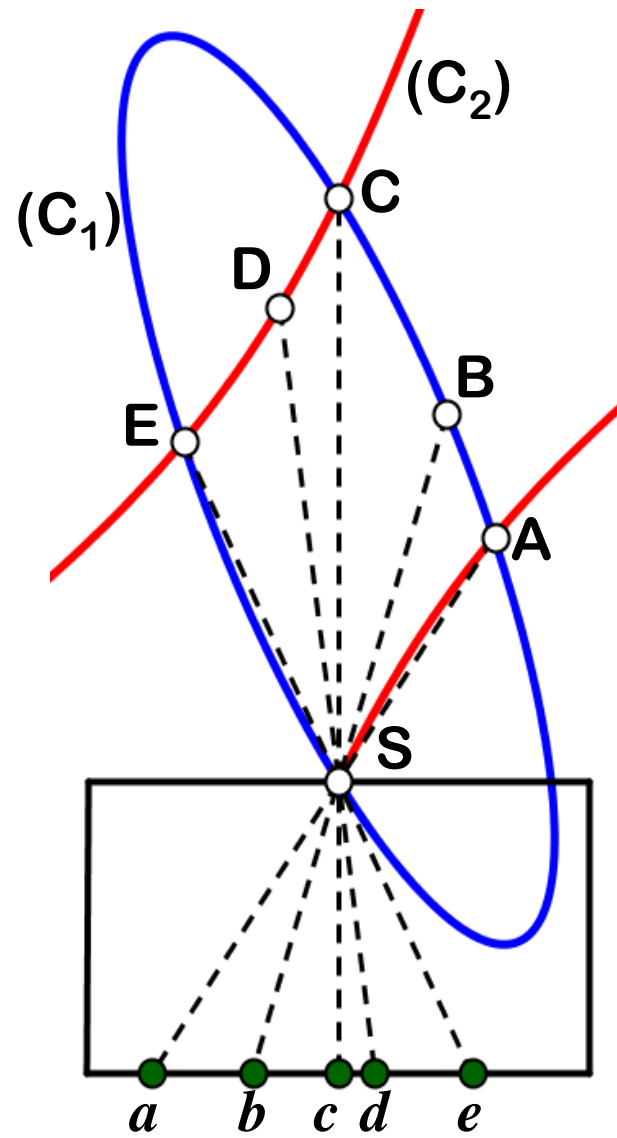


Démonstration de Pappus

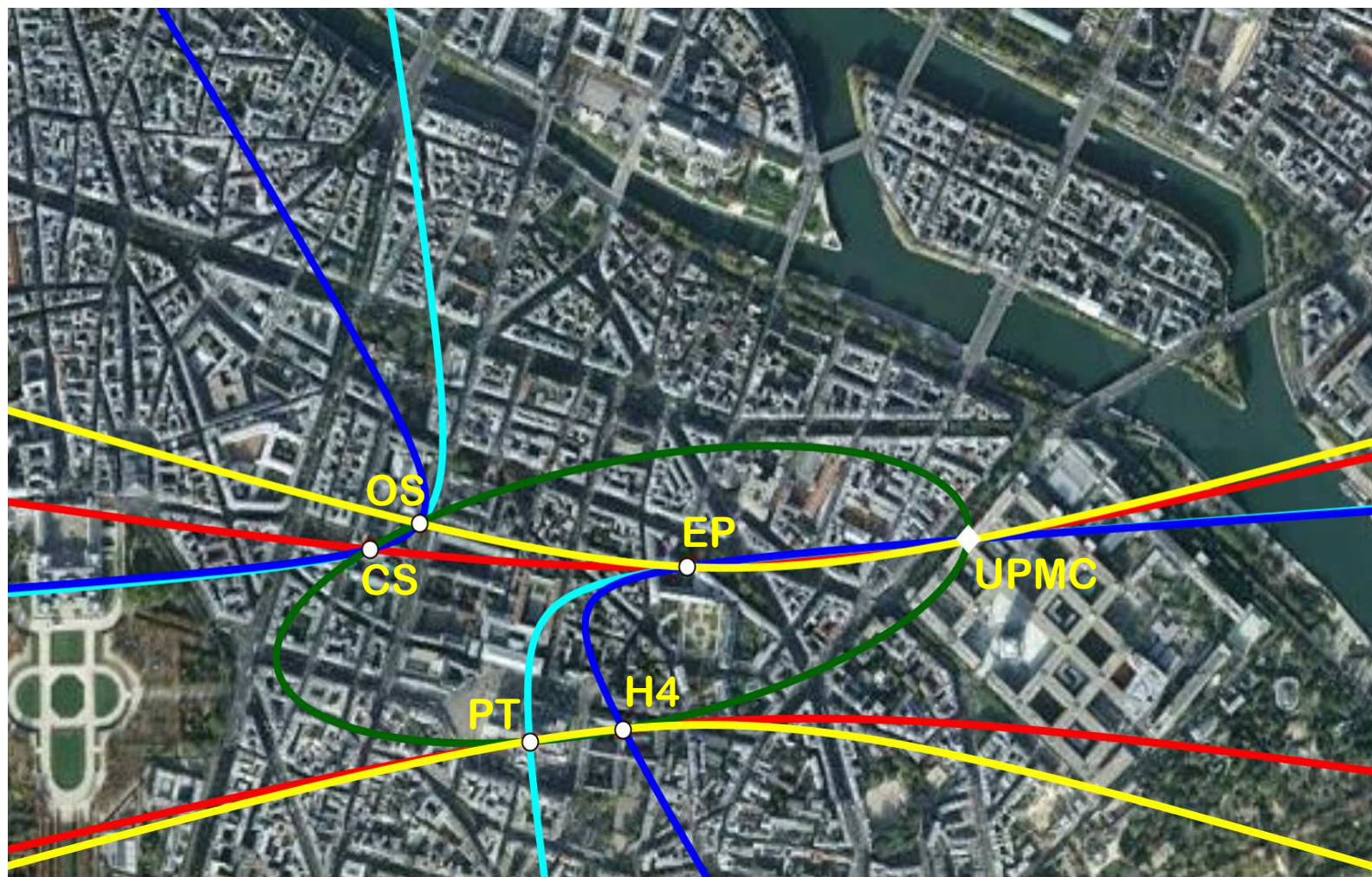


$$[A, B, C, D] = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = \frac{B\Delta}{B\Gamma}$$

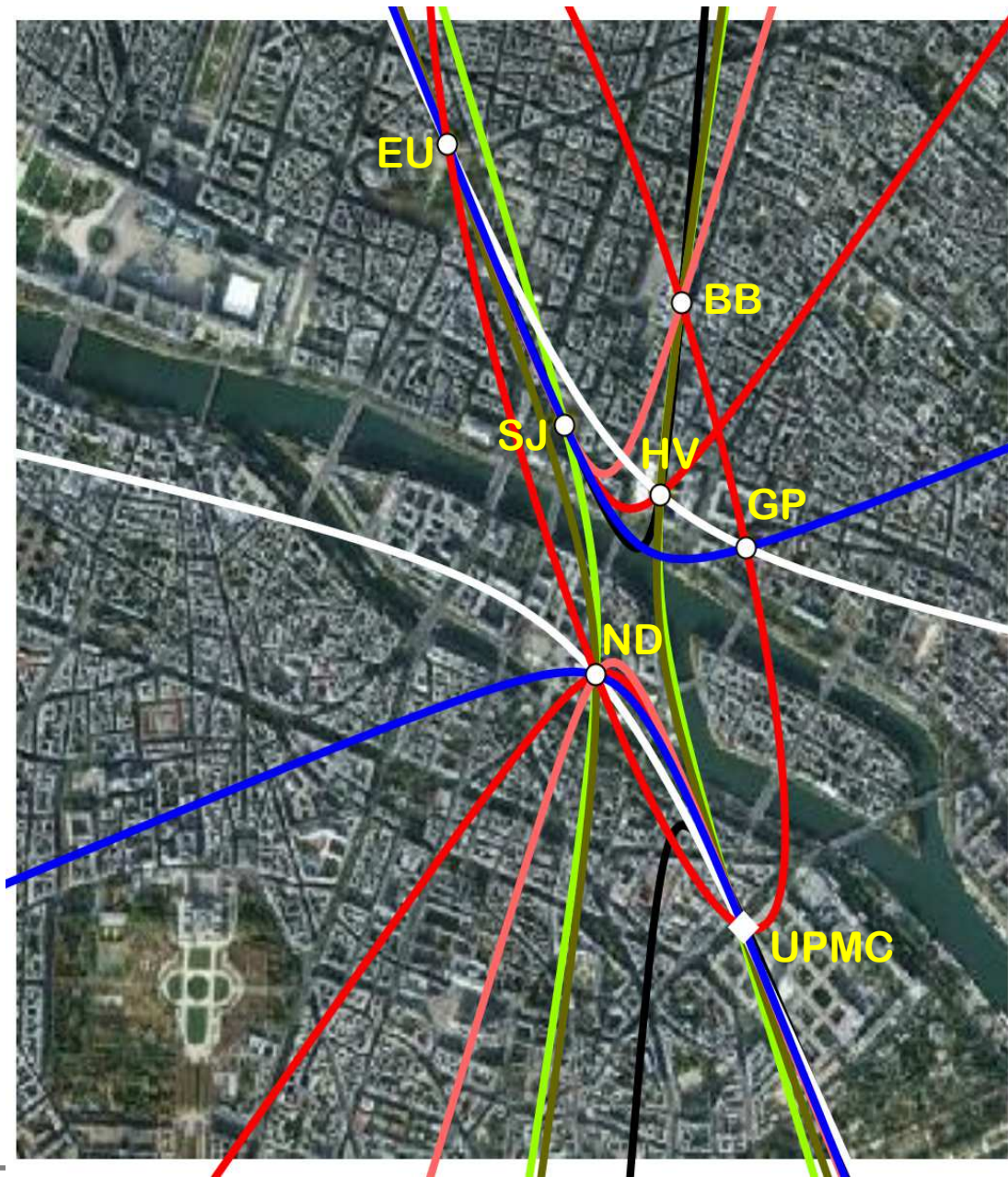




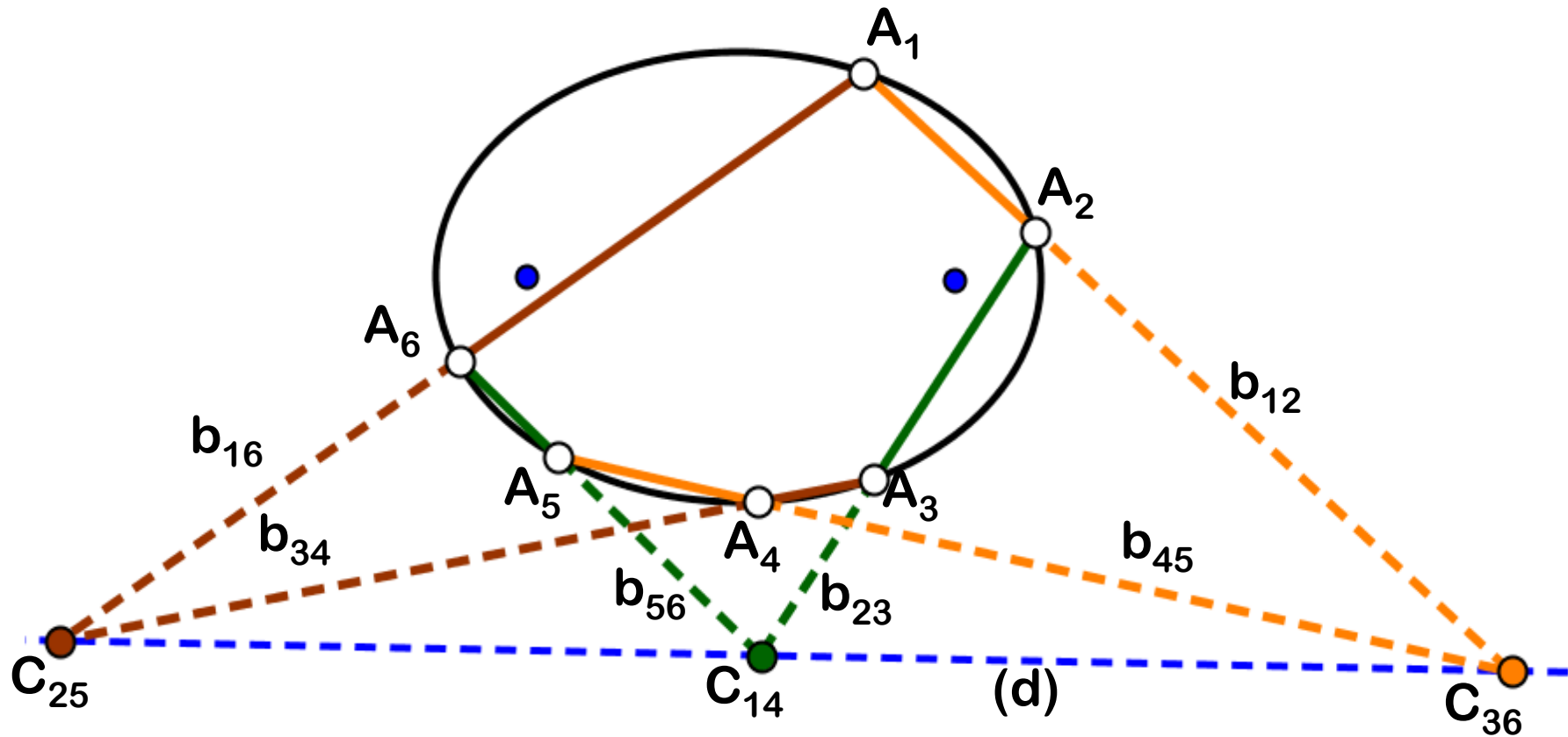




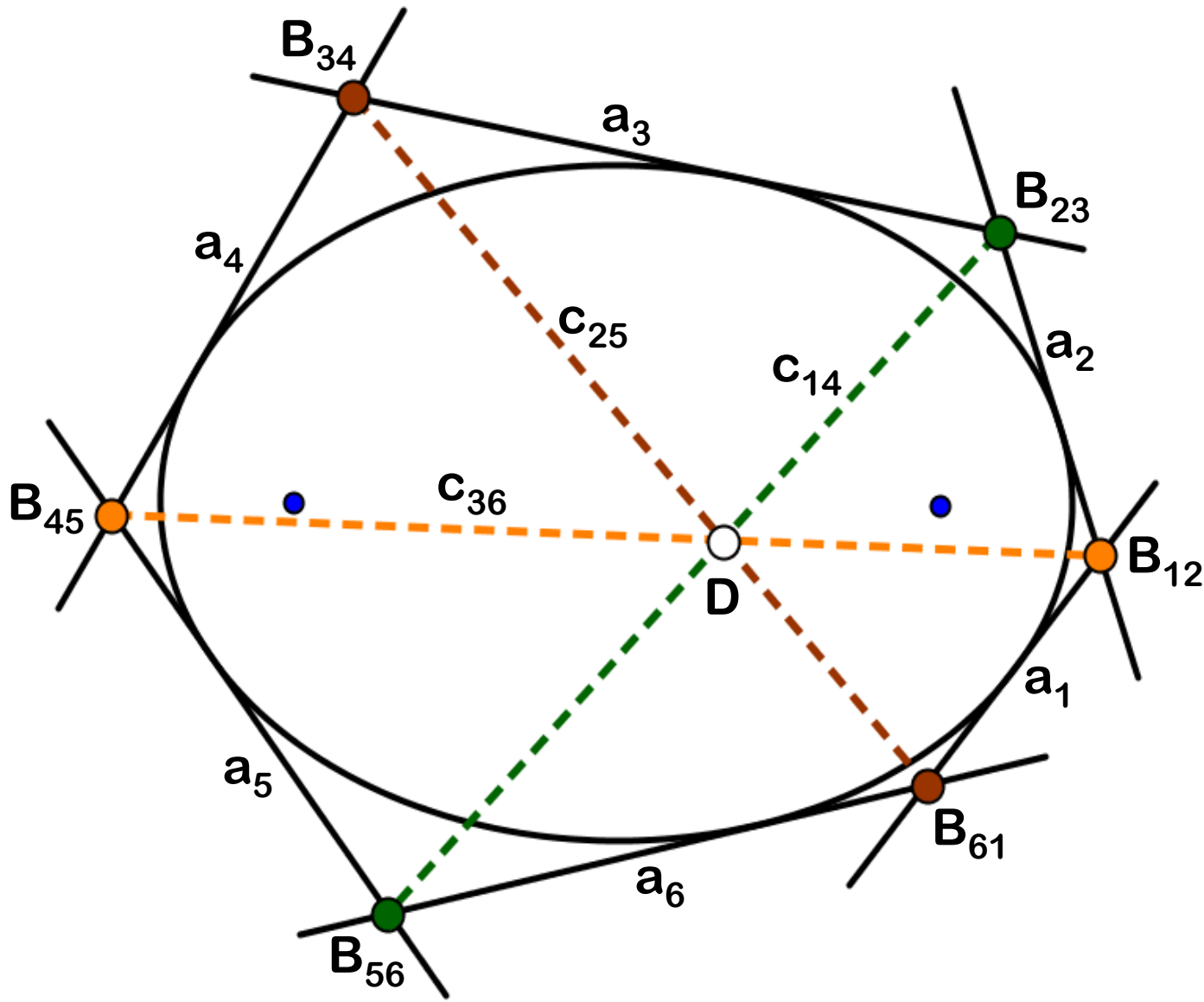




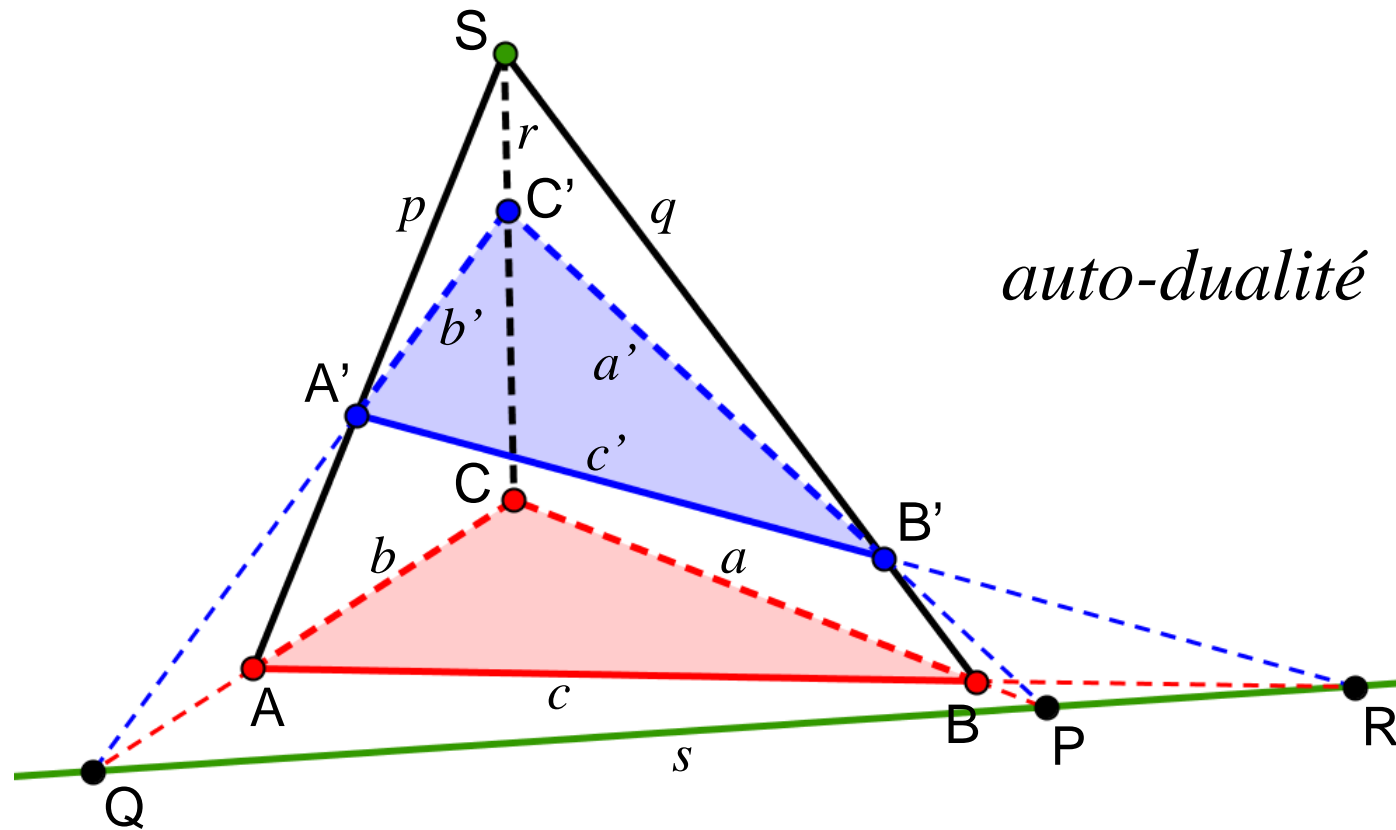
Théorème de Pascal



Théorème de Brianchon



Théorème de Desargues



p, q, r concourantes au point S
 alors
 P, Q, R appartiennent à la droite s

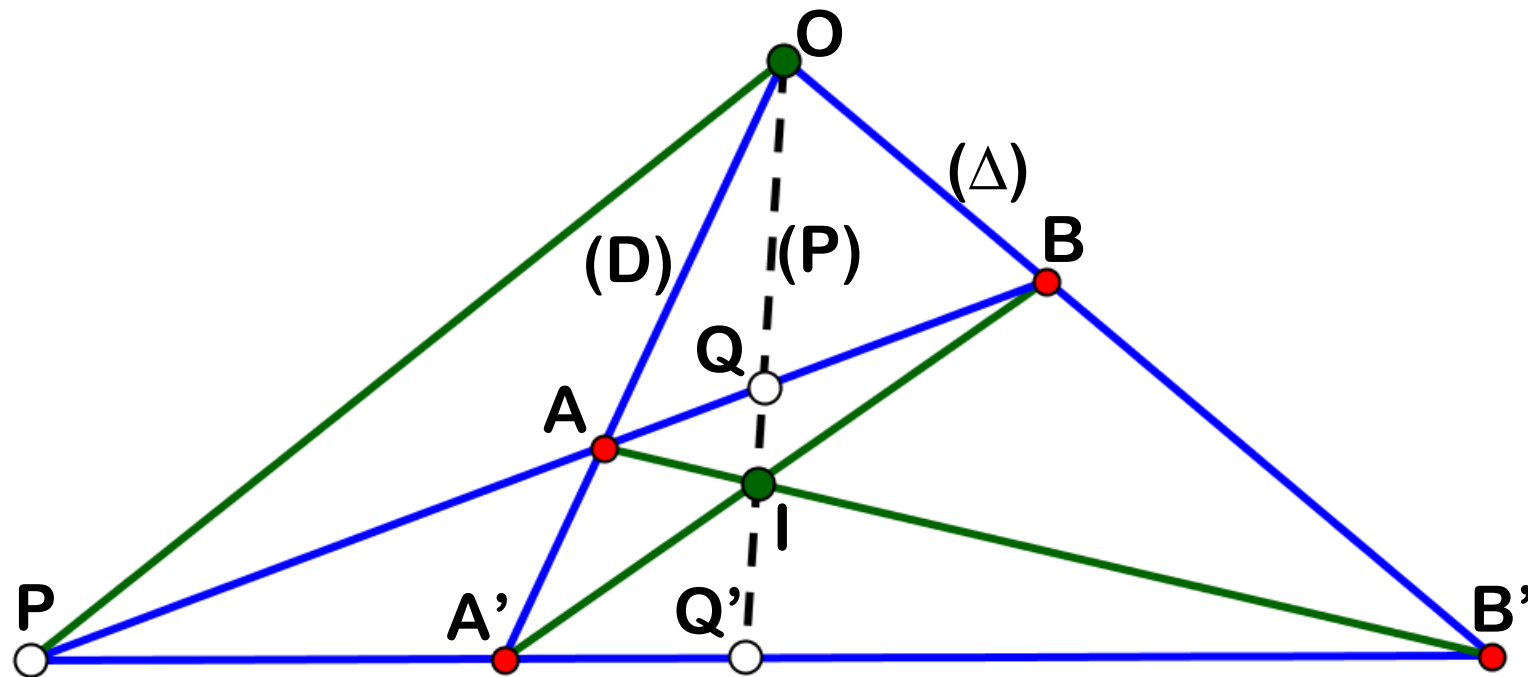
P, Q, R appartiennent à la droite s
 alors
 p, q, r concourantes au point S

Karl Georg Christian Von Staudt (1798 - 1867)



Quadrilatère complet

Référence pour Von Staudt



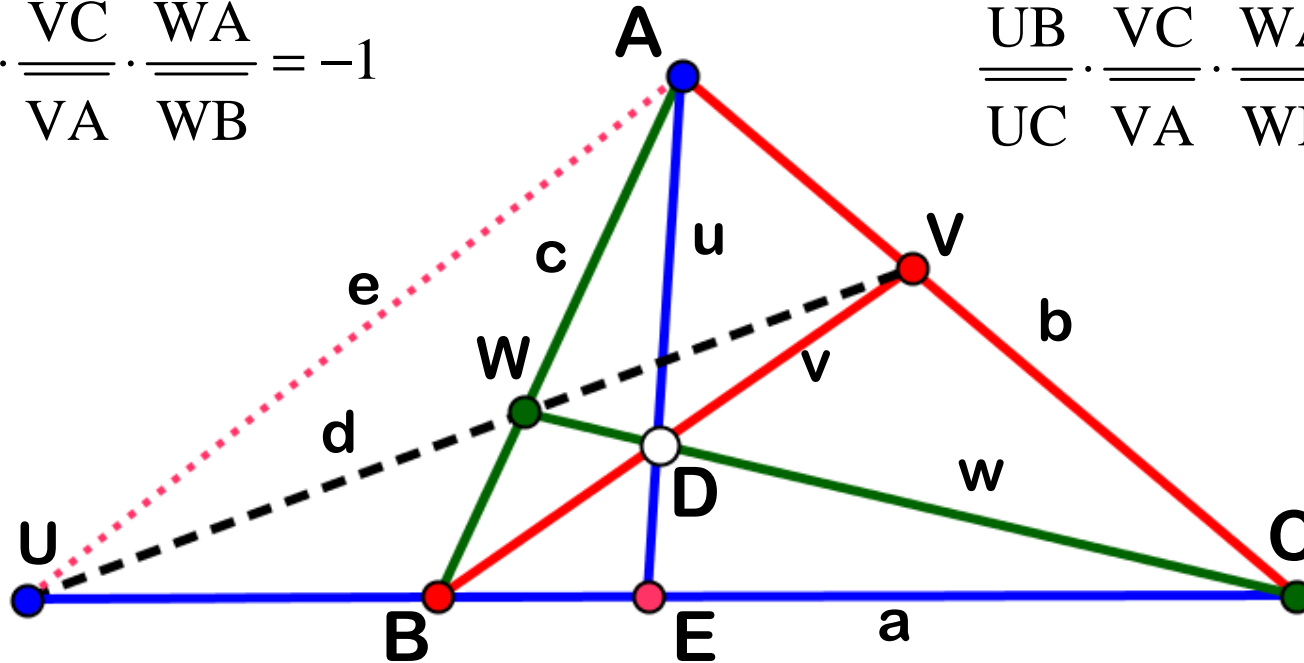
Comparaison Céva Ménélaüs

Céva

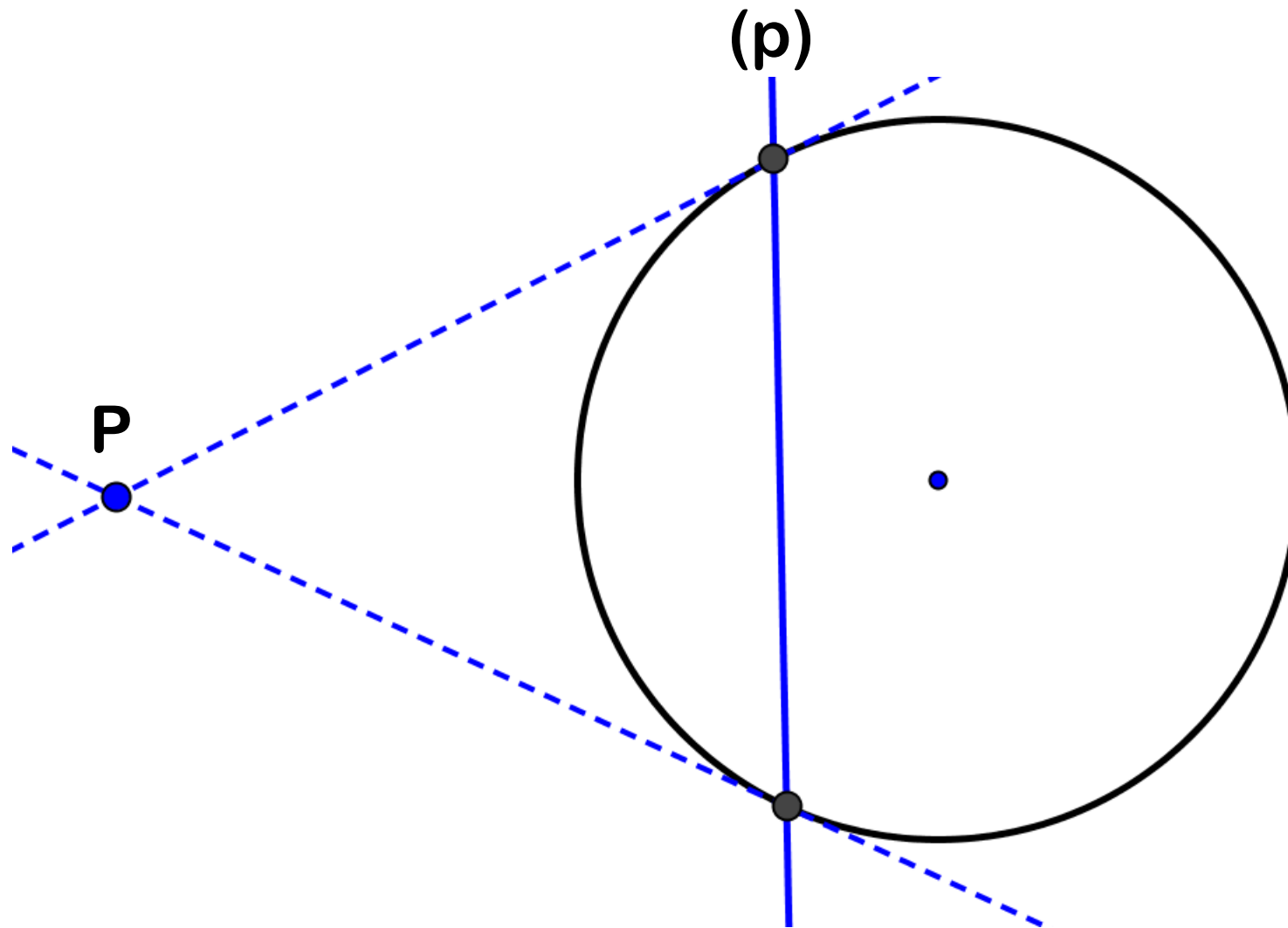
$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{VC}}{\overline{VA}} \cdot \frac{\overline{WA}}{\overline{WB}} = -1$$

Ménélaüs

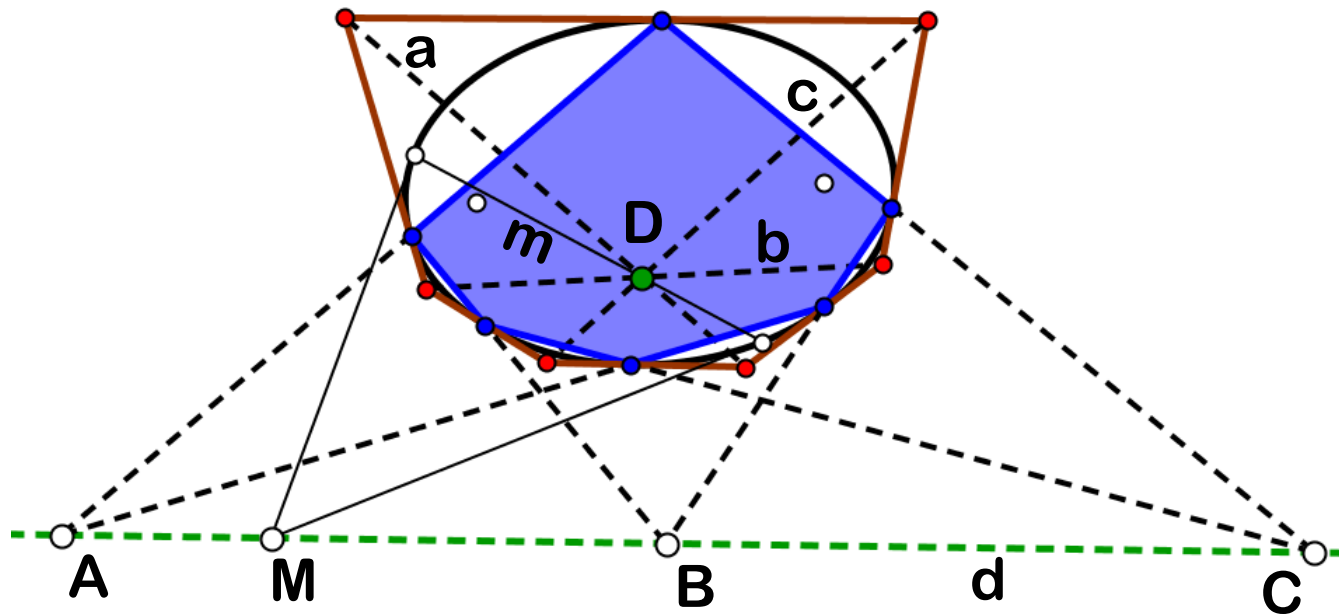
$$\frac{\overline{UB}}{\overline{UC}} \cdot \frac{\overline{VC}}{\overline{VA}} \cdot \frac{\overline{WA}}{\overline{WB}} = +1$$

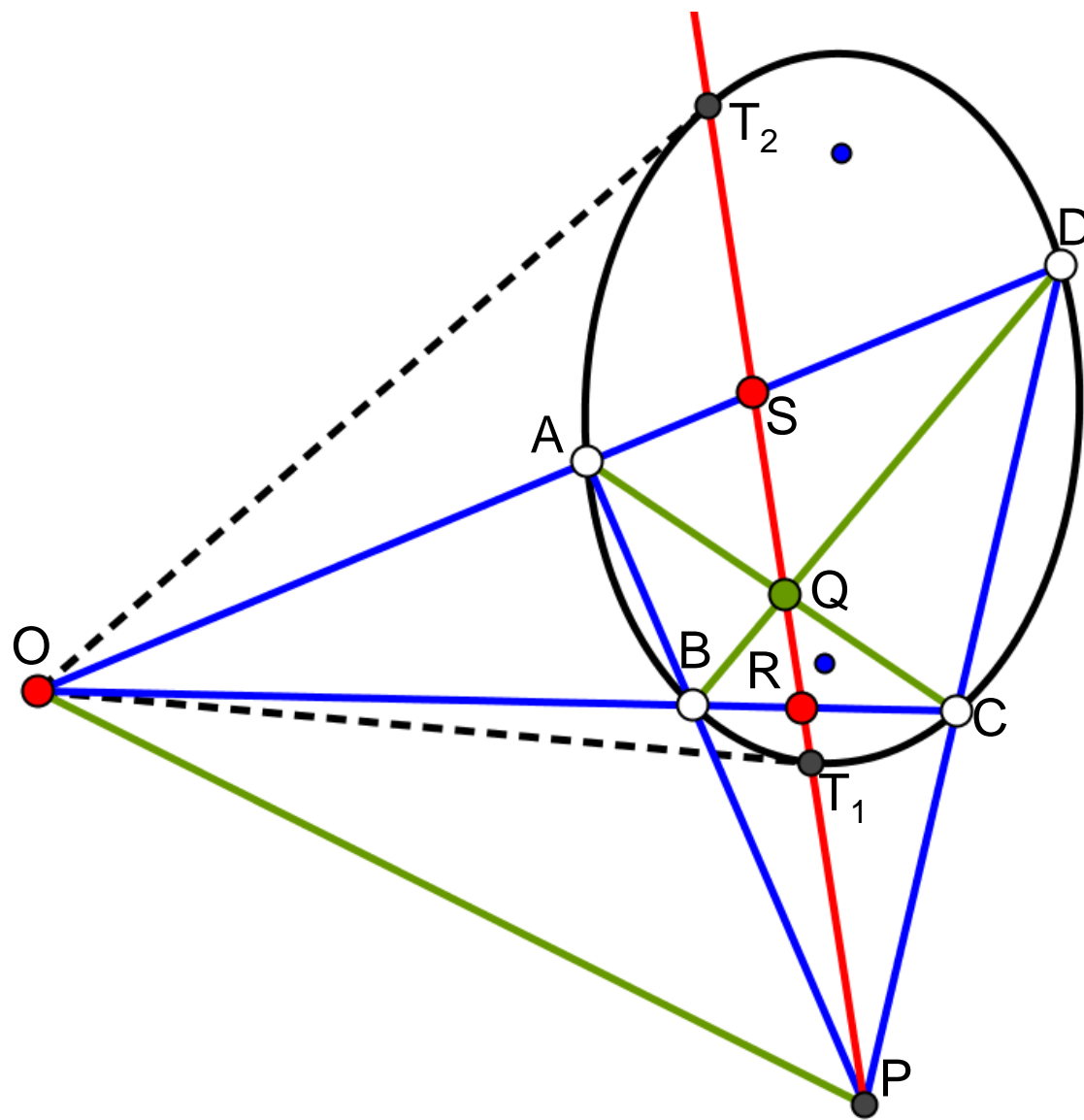


Correspondance pôle - polaire



Correspondance pôle - polaire





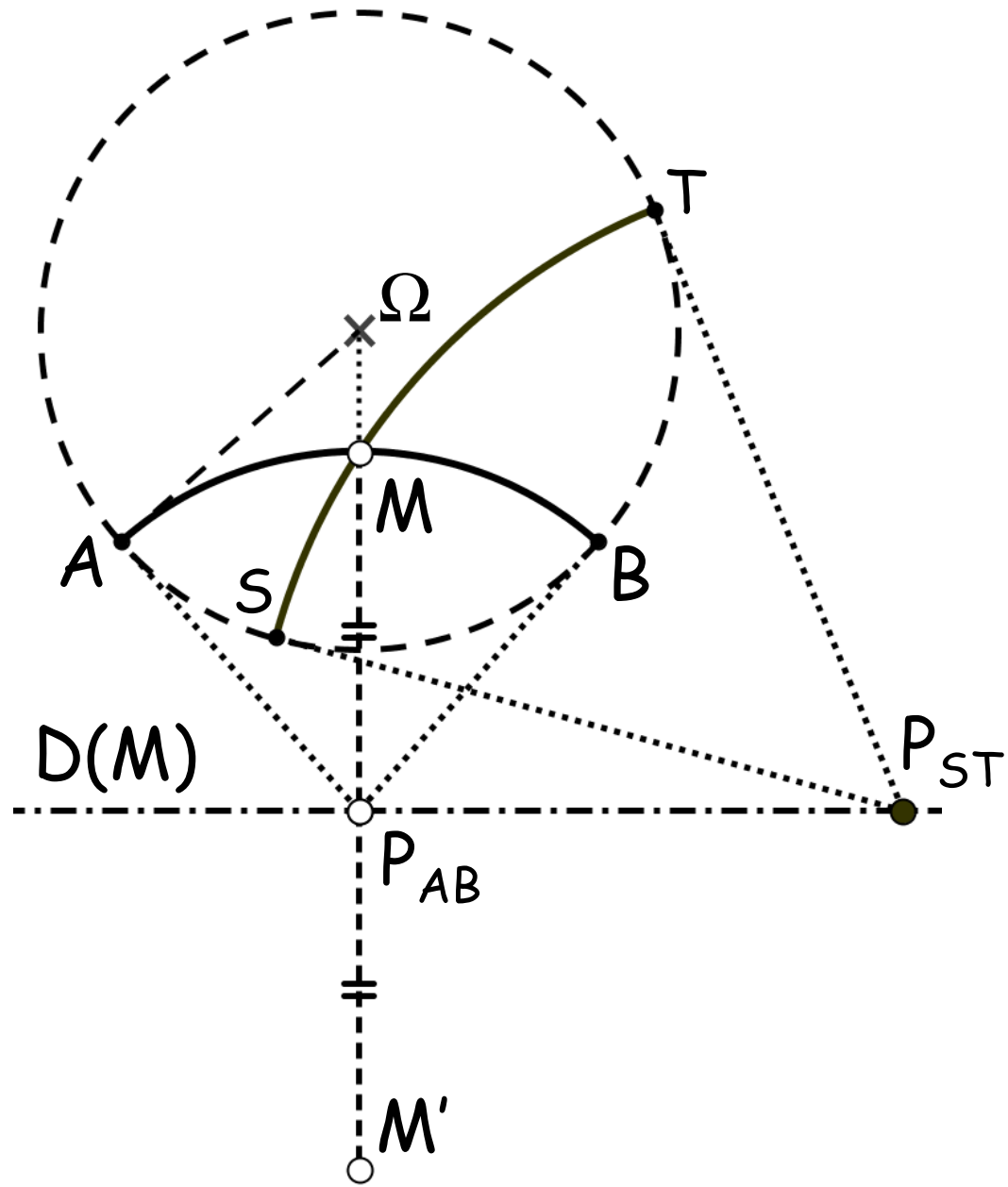
Dualité de Poincaré

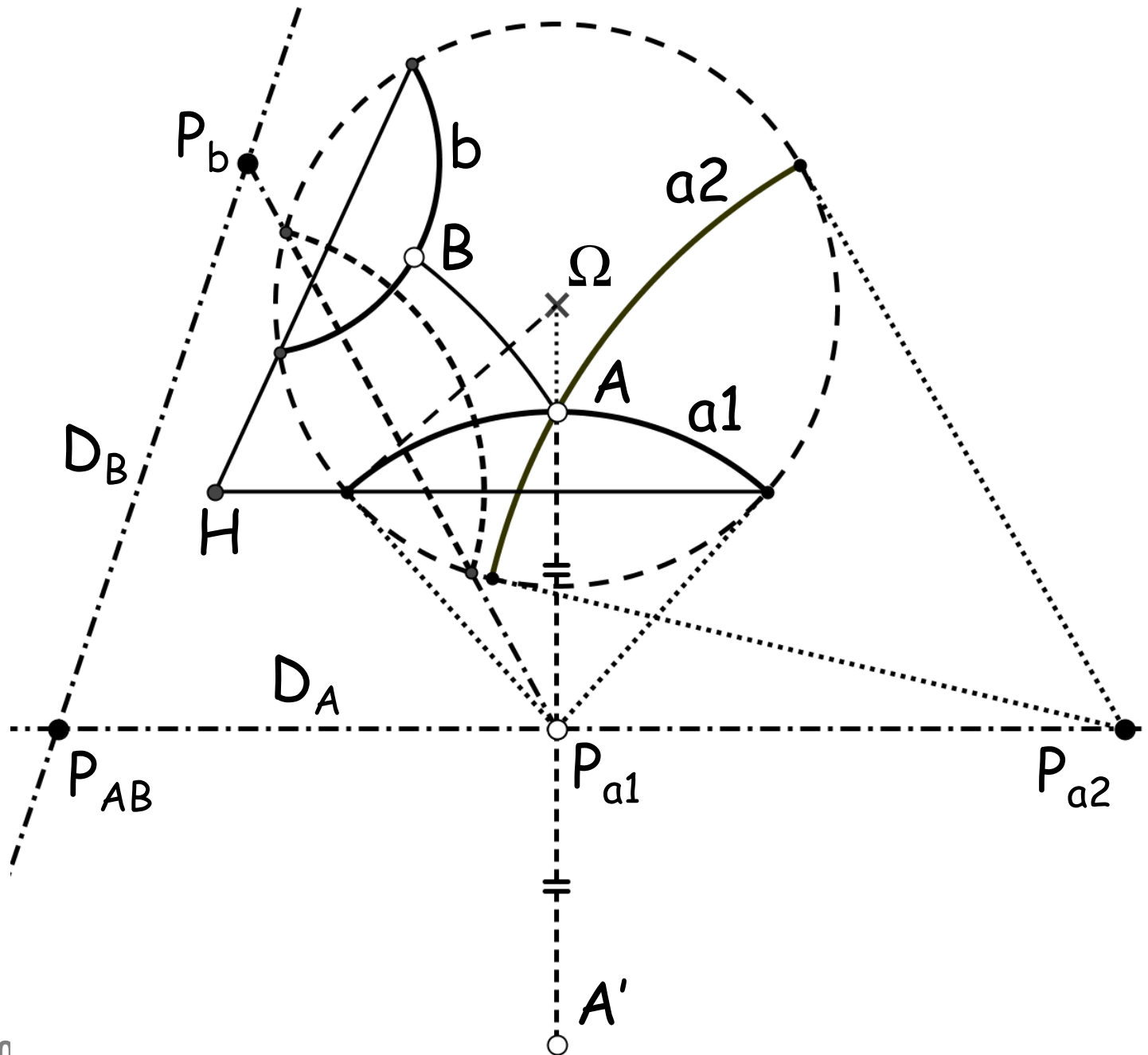
En résumé, il est nécessaire de compléter la liste des axiomes, et de modifier les énoncés en remplaçant les expressions un peu vagues et ambiguës de M. Russell par d'autres plus précises. On arrive ainsi à la liste suivante:

- 1° L'espace est une multiplicité continue à trois dimensions
- 2° Les points de cette multiplicité, tant à distance finie qu'à distance infinie, sont qualitativement indiscernables les uns des autres.
- 3° Par deux points passe une droite et une seule.
- 4° Par trois points, non en ligne droite, passe un plan, et un seul, qui contient les droites qui joignent ces trois points deux à deux.
- 5° Un plan et une droite se rencontrent toujours.

De cette liste, on ne peut rien retrancher.

Poincaré 1899







Théorèmes Thévenin Norton
Graphes duaux
Delaunay Voronoï
Haute basse Egypte
Dieu diable
Bien mal
Homme femme (disparait)

« Si ce n'est plus un exercice pour l'expert de chercher à partir du premier de deux théorèmes réciproques, le second, cela reste pour le débutant un problème formateur qui l'incitera à se former par une activité propre une intuition des formes. Chaque enseignant qui attire l'attention de ses élèves sur le principe de réciprocité, fait l'expérience du fait que ce principe est, pour l'élève sensible à la géométrie, plus stimulant que n'importe quel théorème particulier. »

Dualité onde corpuscule

Triarité existe

GO ko et triple ko