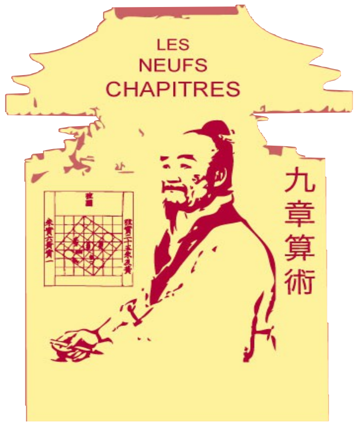
Le classique mathématique de la Chine ancienne

(André Deledicq, avec la complicité de Karine Chemla, Raoul Raba et Jean-Philippe Deledicq)

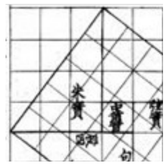
Un peu après les époques d'Euclide et d'Archimède, en Méditerranée, la dynastie des Han s'installait en Chine pour quatre siècles et demi de progrès. Dans la plupart des domaines du savoir, l'administration impériale incita alors ses savants à réunir les écrits qui devaient constituer le corpus canonique de leur discipline : ce fut le cas pour la médecine, l'astronomie, la pharmacopée, la lexicographie, la géographie et les mathématiques. Ces écrits devinrent, en quelque sorte, le programme de ce que devaient savoir les grands fonctionnaires de l'Empire pour constituer l'élite intellectuelle sélectionnée par le gouvernement.
Ainsi naquit ce qui allait devenir un grand classique de la Chine ancienne : *Les neuf chapitres sur les procédures mathématiques.* La première version, non parcellaire et attestée, de cette œuvre date de 263, lorsqu'elle parut avec des commentaires de Liu Hui (portrait imaginaire ci-contre). Puis des éditions successives accumulèrent les compléments et commentaires respectueux.
Plus tard, en 1213, ce qui sera le premier livre imprimé de l'histoire des sciences qui nous soit parvenu (édité par Bao Huanzhi) reprend ces *Neuf chapitres* avec *Le gnomon de Zhou* et quelques figures coloriées.
Et , en 2004, parait la version chinoise et une traduction critique (1136 pages) présentée et annotée par Karine Chemla et Guo Shuchun.



On peut avancer la thèse que toutes les mathématiques de la Chine ancienne trouvent leur racine dans les neuf rouleaux constituant cet ouvrage (voyez l'intitulé des 9 chapitres en fin d'article).

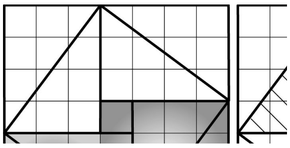
Pour rendre compte du style et de la présentation des *Neuf chapitres*, nous donnons ici quelques extraits du neuvième chapitre qui traitent de sujets que nous associons au nom de Pythagore et de Thalès.
L'ouvrage se présente comme l'énoncé de problèmes pratiques, à l'occasion desquels Liu Hui Li Chunfeng et d'autres commentateurs détaillent la procédure de résolution et donnent quelques explications pouvant constituer de véritables démonstrations.
Ce qui nous a semblé tout à fait remarquable dans les problèmes de ce chapitre, c'est leur incroyable adaptation à l'enseignement : aujourd'hui même, un professeur de quatrième ou troisième de collège peut choisir de poser et d'expliquer les 24 problèmes du chapitre 9 à ses élèves ! Ils en sauront alors plus et mieux sur les triangles rectangles qu'avec tout autre livre moderne…

EXTRAITS DU NEUVIÈME CHAPITRE



Première figure fondamentale.

On voit, sur cette figure, 4 triangles rectangles identiques et un petit carré central remplissant le carré construit sur l’hypoténuse.

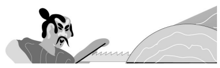


Le texte chinois explique que les deux carrés construits sur les côtés de l’angle droit (4x4 et 3x3 sur la figure de gauche) ont une partie à l’extérieur du carré de l’hypoténuse (R et S) qui pourrait exactement compléter son intérieur (R’ et S’) : « de sorte que ce qui sort et ce qui entre se compensent l’un l’autre ; alors on garde les morceaux qui restent sans les bouger et on engendre par réunion l’aire du carré du côté de l’hypoténuse » .

Cette figure illustre notre relation $a^2+b^2=c^2$, et en constitue une belle démonstration.

Exemple de problème (numéro 4).

Supposons qu'on ait un rondin de bois de section circulaire de 25 *cun* de diamètre et qu'on veuille en faire une poutre de section rectangulaire, de sorte qu’elle ait 7 *cun* d'épaisseur.



On demande combien vaut sa largeur.

Deuxième figure fondamentale.

Cette figure reprend la disposition précédente mais en faisant apparaitre l’un des carrés de l’angle droit dans le carré de l’hypoténuse ; il y a donc deux versions de cette figure.

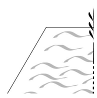
Le complément d’un carré construit sur l’angle droit dans l’hypoténuse est une sorte d’équerre appelée « gnomon ». Ce gnomon a donc la même aire que le carré construit sur le deuxième côté de l’angle droit ; mais il est aussi équivalent à un rectangle de longueur égale à la somme de l’hypoténuse et du côté du petit carré ; et de largeur égale à leur différence.

Cette figure illustre notre formule $a^2=(c-b)(c+b)$ et peut en constituer une démonstration.

Elle permet de trouver les côtés du triangle quand on connait un côté (a) et la somme (ou la différence) de l’hypoténuse avec l’autre côté.

Exemple de problème (numéro 6).

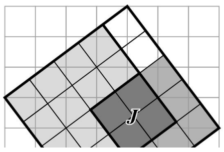
Supposons que l’on ait un étang carré de 10 *chi* de côté, au centre duquel pousse un roseau qui dépasse de 1 *chi* le niveau de l'eau.



Quand on tire le roseau vers la rive, il arrive juste au bord.

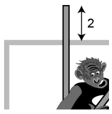
On demande combien valent respectivement la profondeur de l'eau et la longueur du roseau.

Troisième figure fondamentale.



Cette figure est une superposition des deux figures précédentes. Lorsque deux surfaces ont même aire, les parties complémentaires de chacune d'elles dans l'autre ont évidemment même aire ; c'et le cas, dans cette figure, du gnomon évoqué dans la deuxième figure fondamentale et
du carré construit sur le deuxième côté de l'angle droit.
On en déduit l'égalité des aires du carré J et des deux rectangles de côtés c-a et c-b.
La figure illustre la formule $(a+b-c)^2=2(c-a)(c-b)$ et peut en constituer une démonstration. Elle permet de trouver les côtés du triangle quand on connait la somme et la différence de l'hypoténuse avec chacun des côtés.

Exemple de problème (numéro 24).

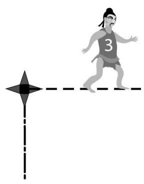


Supposons qu'on ait une porte dont on ne connaît ni la hauteur ni la largeur, et une perche dont on ne connaît pas la longueur. Transversalement, il s'en faut de 4 *chi* pour que (la perche) ne puisse sortir (par la porte), longitudinalement il s'en faut de 2 *chi*, et, en oblique, elle sort juste. On demande combien valent respectivement la hauteur, la largeur et l'oblique de la porte.

Les triplets pythagoriciens

Cependant que l'on admire, au fil de ces problèmes, le choix particulièrement pertinent des situations et de leurs données numériques, on tombe sur le problème suivant :
deux chinois Ji et Jia, partent tous les deux du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle, marchent chacun à une vitesse différente mais régulière sur le ou les côtés, et se retrouvent ensemble à un autre sommet. Connaissant un côté du triangle et le rapport de leur vitesse, trouver les autres côtés du triangle.

Voici l'énoncé du problème 13 :



Supposons que deux personnes soient debout au même endroit. Si le « *lü* » de ce que marche Jia vaut 7 et le « *lü* » de ce que marche Yi vaut 3*. Yi marche vers l'Est. Jia marche 10 *bu* vers le Sud, puis oblique vers le Nord-Est et rejoint Yi .
On demande combien marchent respectivement Jia et Yi.

* Dans les situations de proportionnalité, les *lü* sont les valeurs « de référence » de certaines grandeurs à partir desquelles peuvent être calculées (par le jeu des rapports de proportionnalité) les valeurs « réelles » de ces grandeurs.

Procédure de résolution :
On effectue la multiplication de 7 par lui-même, et aussi la multiplication de 3 par lui-même, on somme et on prend la moitié de ceci, ce qui est pris comme *lü*** de ce que Jia marche en oblique. Le *lü* de la marche en oblique étant soustrait de la multiplication de 7 par lui-même, le reste fait le *lü* de ce qui est marché vers le Sud. On multiplie 3 par 7, ce qui fait le *lü* de ce que Yi marche vers l'Est.
On place ce qui est marché vers le Sud, 10 *bu*, et on le multiplie par le *lü* de ce que Jia a marché en oblique. On place en auxiliaire 10 *bu*, et on le multiplie par le *lü* de

ce que Yi marche vers l'Est. Chacun fait respectivement un dividende. Si l'on on effectue les divisions des dividendes par le *lü* de ce qui est marché vers le Sud, l'on obtient respectivement les quantités marchées.

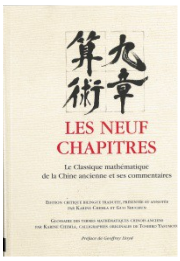
La compréhension de la procédure de résolution donne du fil à retordre au lecteur d'abord étonné. L'analyse de ce procédé réserve une singulière surprise : il fournit en effet une interprétation géométrique inédite de la génération des triplets pythagoriciens par les formules aujourd'hui classiques.
Les calculs de la procédure de résolution reviennent en effet à ceci :
Appelons a, b, c les trois côtés d'un triangle rectangle (c étant l'hypoténuse) tel que b=q (ici q=3) et c+a=p (ici p=7). On calcule d'abord $(p^2+q^2)/2$, $(p^2-q^2)/2$ et pq (ici 29, 20 et 21).
La quantité marchée vers le Sud étant égale à 10, on obtient les mesures des trois côtés du triangle cherché, en divisant ces nombres par 2 : hypoténuse 14,5 et côtés de l'angle droit 10 et 10,5 .

La justification de ces calculs (en termes modernes) est assez simple :
Dans le triangle rectangle de côtés a, b, et d'hypoténuse c, on a
$(c+a)(c-a)=c^2-a^2=b^2$, et donc, en posant b=q et c+a=p,
$(c-a)=q^2/p$; alors $2c=(c+a)+(c-a)=(p^2+q^2)/p$ et $2a=(c+a)-(c-a)=(p^2-q^2)/p$.
D'où : $2pa=p^2-q^2$, $2pb=2pq$ et $2pc=p^2+q^2$
Le triangle de côtés $(p^2-q^2, 2pq, p^2+q^2)$ est donc homothétique (dans le rapport 2p).du triangle rectangle de côtés (a, b, c). Il est donc rectangle lui aussi.

Dessin bas page 36

L'énoncé du problème nous fournit une interprétation géométrique de la procédure de calcul.
Un exercice classique de théorie des nombres, présenté habituellement aux (bons) élèves de lycées, consiste à montrer que tout triangle rectangle à côtés entiers a ses côtés de longueur **$(p^2-q^2, 2pq, p^2+q^2)$, p et q étant deux entiers**
Les entiers p, q -engendrant, par les formules classiques, le triangle rectangle de côtés - mesurent d'une part la somme des longueurs de l'hypoténuse et d'un côté (p) d'autre part la longueur de l'autre côté (q) d'un modèle homothétique de ce triangle rectangle, dans le rapport 1/(2p).
(A notre connaissance, une telle interprétation n'a jamais été proposée, mais nous accueillerons avec jubilation toute information contradictoire à ce sujet.)

BIBLIOGRAPHIE



. *Les neuf chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Karine CHEMLA et Guo SHUCHUN, éditions Dunod, (1136 pages) 2004.

. *Les neuf chapitres, extraits du neuvième chapitre*, préface de Karine CHEMLA, commentaires de André DELEDICQ, Classique Kangourou n°4, Les éditions du Kangourou, (64 pages) 2013.

INTITULÉ DES 9 CHAPITRES

1. CHAMP RECTANGULAIRE pour traiter les territoires des terres cultivées : algorithme de calcul sur les fractions (simplification, multiplication, addition, soustraction), calculs d'aires (triangles, trapèze, cercle, calottes sphériques, anneaux). Li Chunfeng y donne, en particulier, la remarquable valeur approchée de pi 181/(57+13/22) égale à 22/7 .
2. PETIT MIL ET GRAINS DÉCORTIQUÉS pour traiter les échanges et les transformations : exposé de la règle de trois dite procédure du supposons (« on multiplie, par la quantité de ce que l'on a, le *lü* de ce que l'on cherche, et on divise le résultat par le *lü* de ce que l'on a »), calcul des proportions.
3. PARTS PONDÉRÉS EN FONCTION DES DEGRÉS pour traiter le cher et le bon marché, les distributions de grains et les impôts : problèmes de partages avec des coefficients.
4. PETITE LARGEUR pour traiter des nombres-produits et des aires : algorithmes de la racine carrée, calcul de racines cubiques, volume de la sphère.
5. DISCUTER DES TRAVAUX pour traiter les règles concernant les travaux de terrassements et des volumes : volumes de solides et de polyèdres.
6. PAIEMENT DE L'IMPÔT DE MANIÈRE ÉGALITAIRE en fonction du transport pour traiter travaux et dépenses selon la distance : équations, méthode de la fausse position, suites arithmétiques.
7. EXCÉDENT ET DÉFICIT pour traiter comment les choses cachées et mêlées se font apparaître mutuellement : la règle de fausse double position, qui permet, entre autres, de résoudre des systèmes d'équations à deux inconnues.
8. FANGCHENG pour traiter ce qui est mélangé ainsi que le positif et le négatif. Ou systèmes d'équations linéaires
9. BASE ET HAUTEUR pour traiter le haut et le profond, le large et le lointain : relations dans un triangle rectangle, triangles semblables.