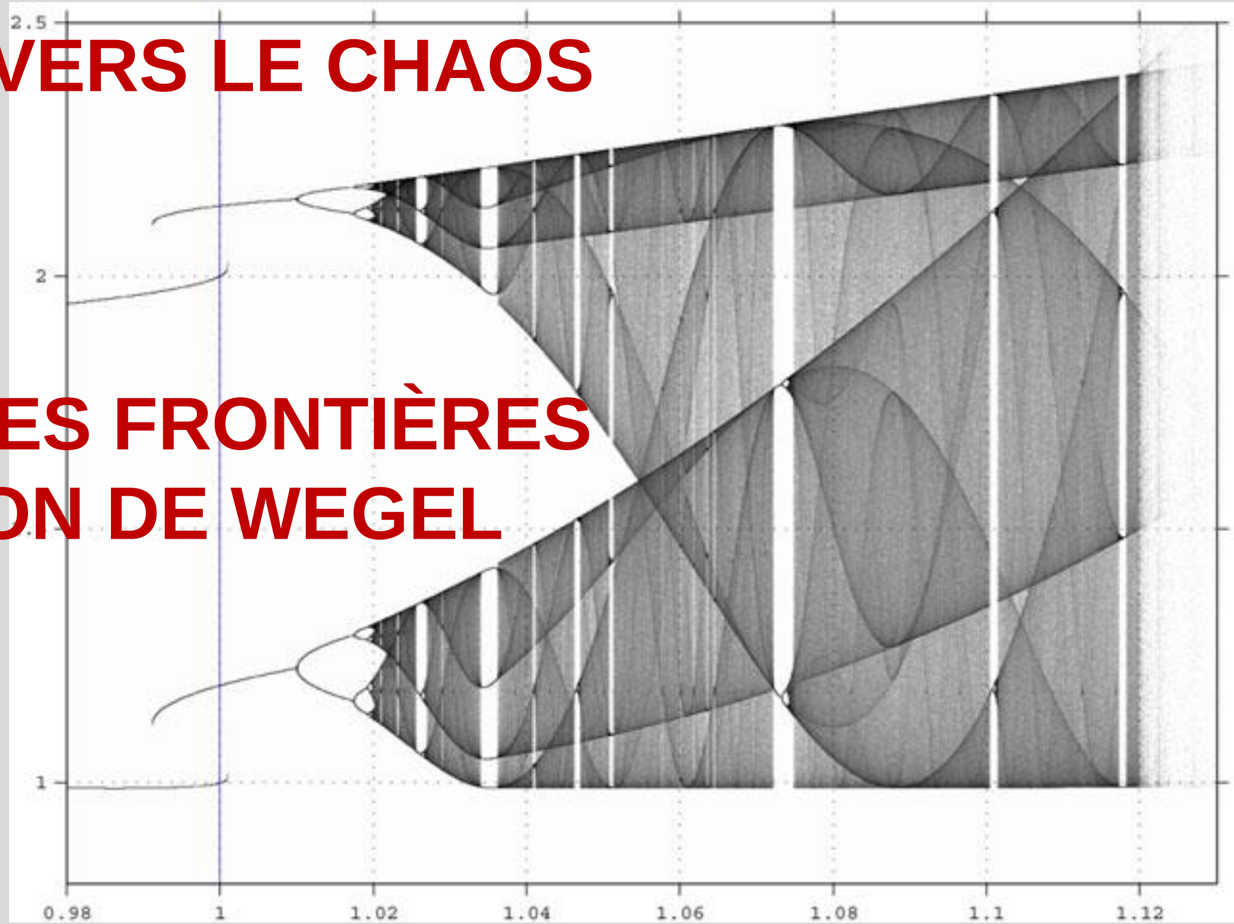
PatSys System Support & Solutions

## *Kafé Math – 17 avril 2014*

# EN ROUTE VERS LE CHAOS

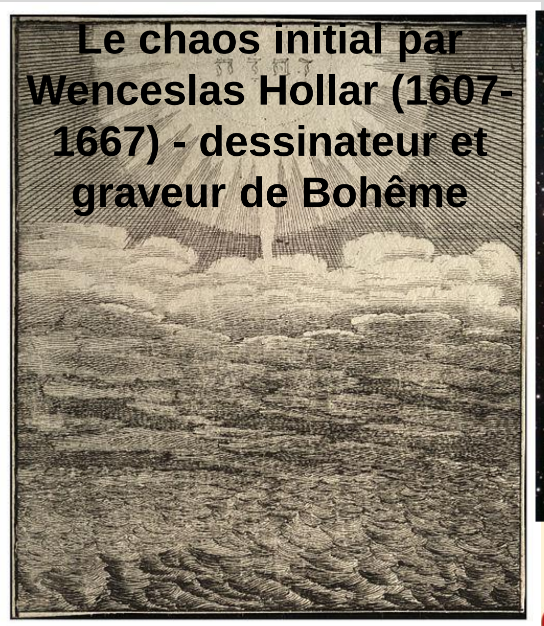
# AU-DELÀ DES FRONTIÈRES DU CITRON DE WEGEL




**Patrick FARFAL**

# Le Chaos… ?

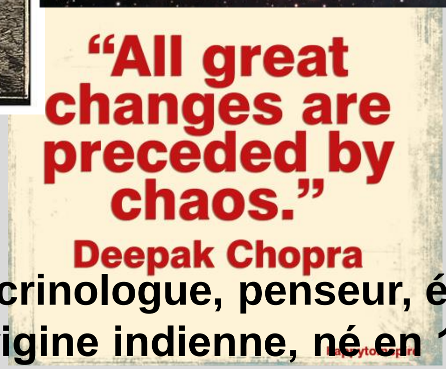
- A l’origine : chaos = profondeur béante : χαος : « faille, béance », du verbe χαινϖ : « béer, être grand ouvert » - « *Donc, au commencement, fut Chaos…* » (Hésiode, *Théogonie*) ; « *masse informe et confuse* » (Ovide, *Métamorphoses*)
- Hébreu ancien : *tōhū wābhōhū* : « informe et vide » (tohu-bohu)



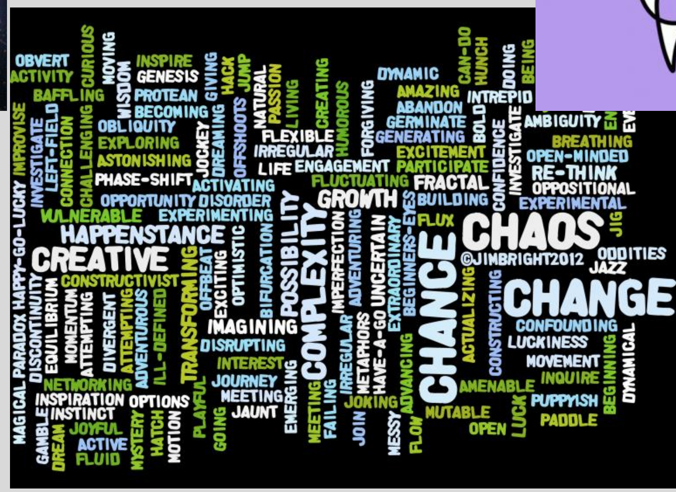
Le chaos initial par Wenceslas Hollar (1607-1667) - dessinateur et graveur de Bohême

Nébuleuse Trifide ou M20, découverte par Guillaume Le Gentil en 1750
5 500 années-lumière (Sagittaire)

Chaos granitique
Devil’s Marbles Conservation Reserve, Australie


(endocrinologue, penseur, écrivain d’origine indienne, né en 1946)




- Gaz : mot forgé à partir de « chaos » par Van Helmont, alchimiste, chimiste, physiologiste et médecin (1579-1644) !

# Le Citron… ?

- Latin *citrus*, citronnier

- Robert
  - Fruit jaune du citronnier, agrume de saveur acide
- Larousse
  - Fruit du citronnier, ovoïde, de couleur jaune et renfermant un jus acide riche en vitamine C
  - Fam. : tête

- Par extension
  - Toute figure de forme ovoïde et aux extrémités pointues

**Cette présentation est largement inspirée (au début)**

**des cours que j'ai dispensés pendant 20 ans sur**

**les Représentations et la Dynamique des Systèmes Linéaires**

# Sommaire

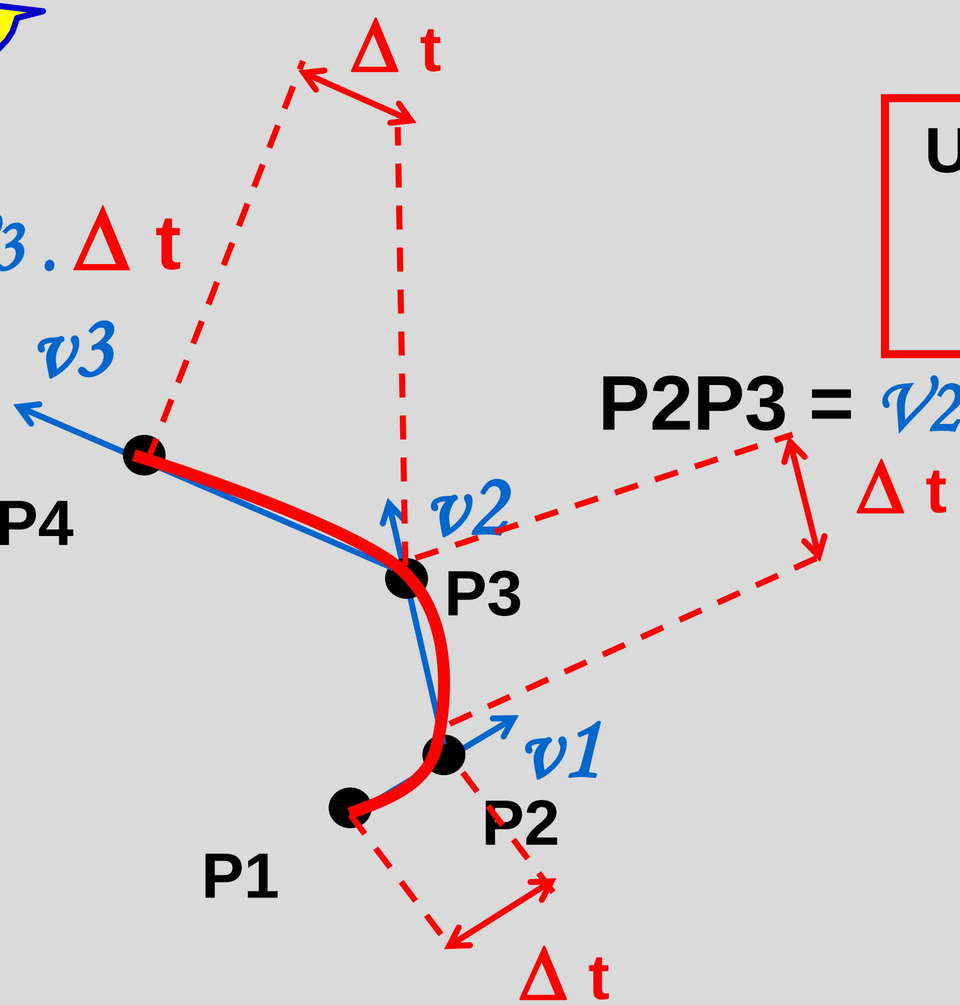
*PatSys*

> Une ***équation différentielle*** relie l'***évolution*** d'un ***phénomène*** à son ***état***

**P3P4 = $v_3 \cdot \Delta t$**

**P2P3 = $v_2 \cdot \Delta t$**

**P1P2 = $v_1 \cdot \Delta t$**




**P1, P2, P3, P4 : positions du mobile**

**vitesse = dérivée de la position**
**(variation (évolution) de la position par unité de temps, en m/s, ou km/h…)**
**$v_i$ = PiPj / $\Delta t$, avec $\Delta t$ petit**

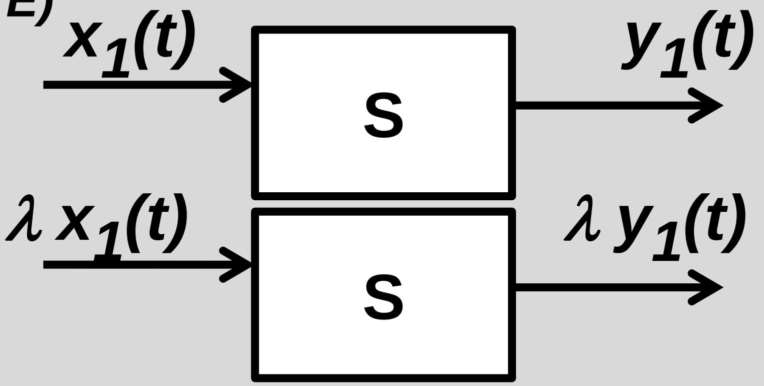
***vitesse $v_i$ = fonction (position $P_i$)*** **: équation différentielle**

PatSys

## Linéarité au sens des mathématiciens

t peut être une autre variable que le temps

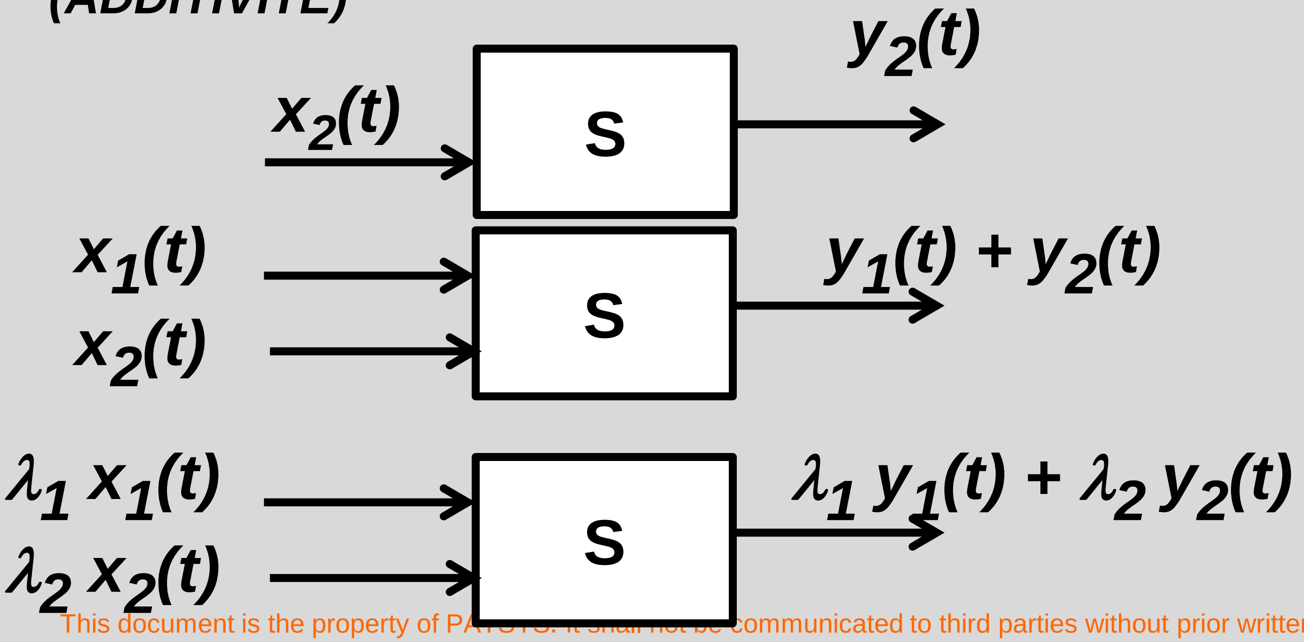
- **Un Système est linéaire au sens des mathématiciens si LE PRINCIPE DE SUPERPOSITION LUI EST APPLICABLE:** ⇔ **Equation différentielle linéaire**
  - ***Les effets sont proportionnels aux causes (HOMO-GÉNÉITÉ)***




$y''(t) + a(t)\, y'(t) + b(t)\, y(t) = c(t)\, x(t)$

**(exemple d'une équa. diff. du 2e ordre)**

  - ***L'addition des causes entraîne l'addition des effets (ADDITIVITÉ)***

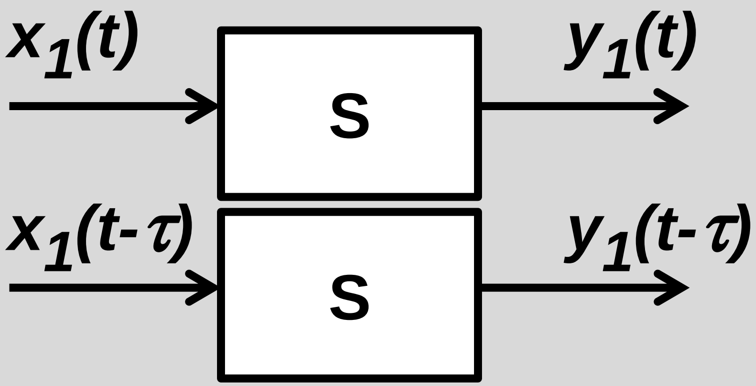


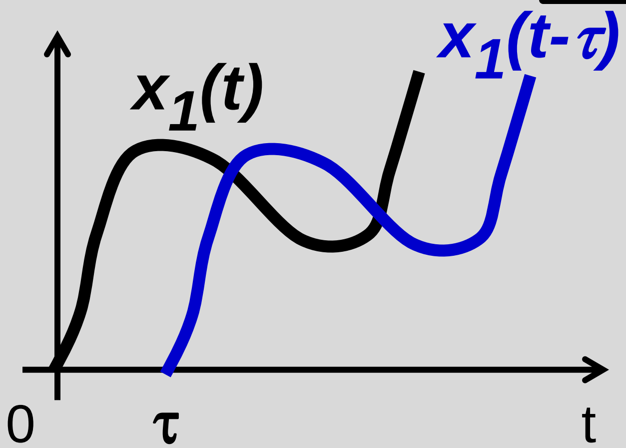
PatSys

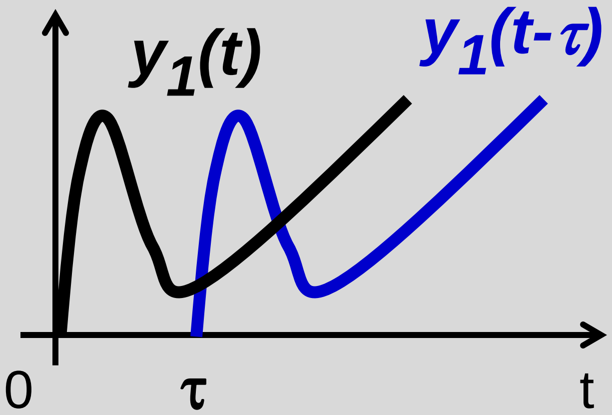
t est la variable temps

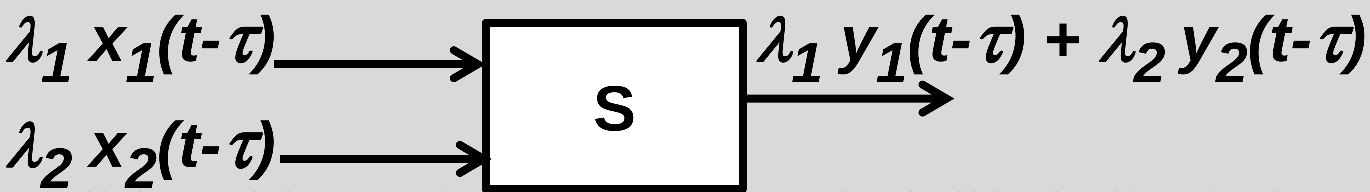
# Linéarité au sens des physiciens

- **Un Système est linéaire au sens des physiciens si :**
  - ***Il est linéaire au sens des mathématiciens***
  - ***Et stationnaire***




**Equation différentielle**

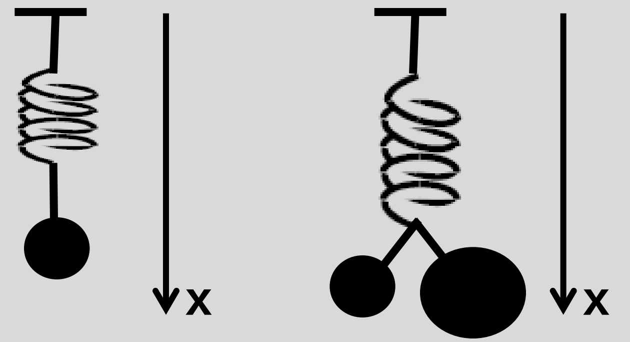
**1) *linéaire***

**2) *à coefficients constants***

**$y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = c\,x(t)$**

**(exemple d'une équa. diff. du 2[e] ordre)**

**Très courant (heureusement)**




**P1 ⇨ x1 = P1/k**
**P2 ⇨ x2 = P2/k**

**P1 + P2 ⇨ x1 + x2**

## Remarques

- Les Equations Différentielles peuvent être plus compliquées (même si l'approximation du 2e ordre (en y'') est souvent assez pertinente) :

$$y'''(t) + a_2\, y''(t) + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = b_2\, x''(t) + b_1\, x'(t) + b_0\, x(t)$$

- Ce qui vient d'être présenté vaut pour les Systèmes continus

On traite de la même façon les Systèmes discrets ou échantillonnés :

Equation « aux différences » :

$$a_0 y_k + a_1\, y_{k-1} + a_2\, y_{k-2} + \ldots + a_k\, y_0 = b_0\, x_k + b_1\, x_{k-1} + \ldots + b_k\, x_0$$

[Ecrite sous la forme :

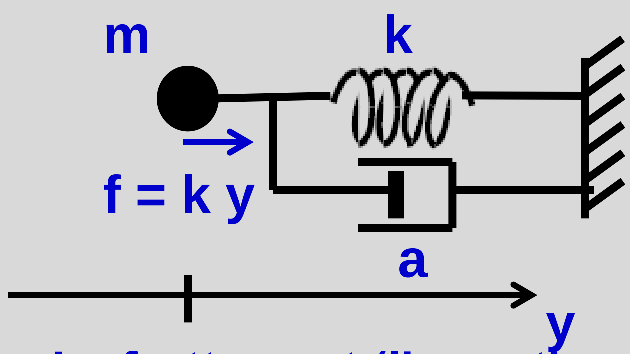
$$y_k = 1/a_0\ \ [b_0\, x_k + b_1\, x_{k-1} + \ldots + b_k\, x_0$$
$$- a_1\, y_{k-1} + a_2\, y_{k-2} + \ldots + a_k\, y_0]$$

l'équation définit le *programme* d'un filtre numérique

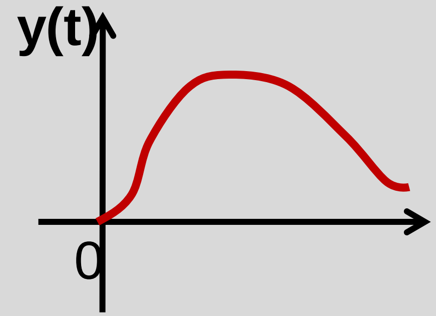
(en Dynamique des Systèmes, Filtre et Système sont en pratique synonymes)]

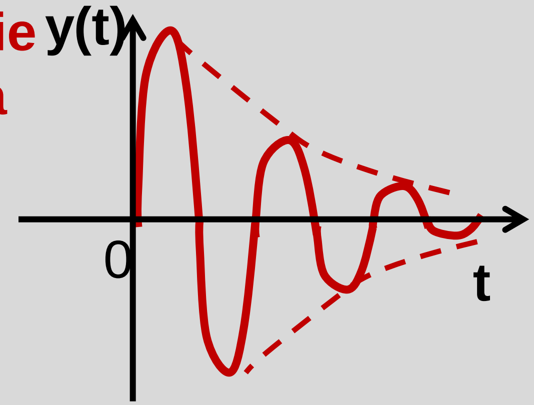
# Exemples

- Oscillateur harmonique libre amorti



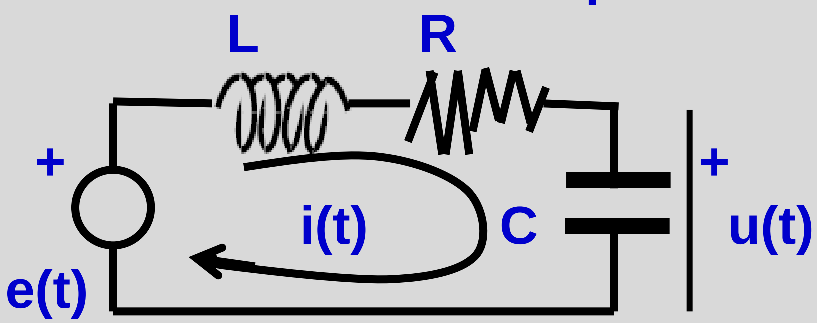

réponse apériodique
ou oscillatoire amortie
suivant la valeur de a



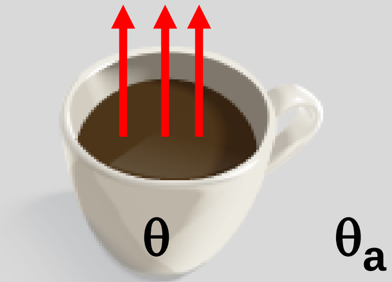

Le frottement (l'amortissement) est *visqueux* ;
s'il est *sec*, le Système devient non-linéaire

- Oscillateur harmonique forcé amorti

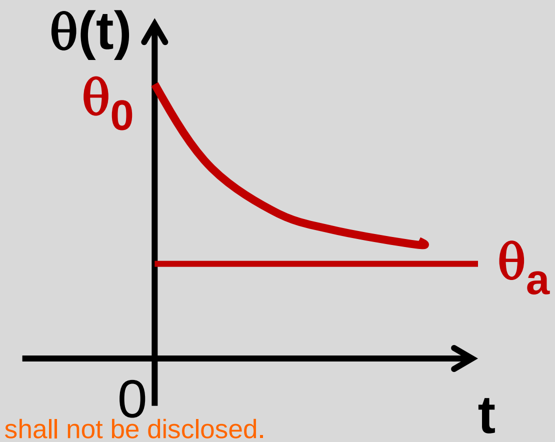



réponse apériodique ou oscillatoire amortie

- Refroidissement d'une tasse de café




décroissance
exponentielle
de la température
(Newton)



# Exemples - suite

- **Modèle de Malthus**
  *Evolution d'une population x (biologique ou autre)*
  *n = taux de naissances*
  *m = taux de mortalité des individus*
  ⇨Croissance exponentielle de x si n > m

- **Modèle keynésien en économie fermée (1936) – mécanisme des cycles**
  $Y_t$ : revenu année t
  $C_t$ : consommation année t
  $I_t$ : investissement année t

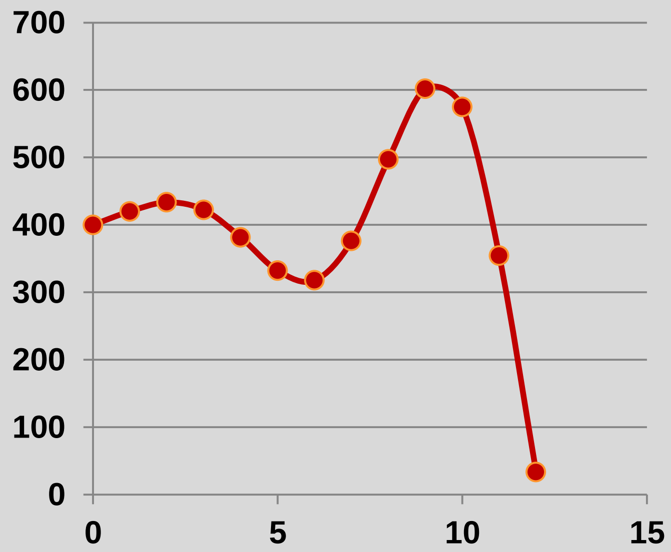
  $Y_t = C_t + I_t$

  On décide p. ex. que l'investissement est proportionnel à la variation espérée du revenu ou à la variation passée du revenu

  $C_t = 0,7\ Y_t + 20$

  $I_t = 0,5\ (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + 100$ (effet accélérateur)

  $Y_0 = 400,\ Y_1 = 420$ :




  ⇨ Réponses possibles :
  convergence vers un équilibre
  croissance explosive
  cycle divergent
  cycle amorti

- **Mécanisme des cycles (autre modèle)**
  utilisant le multiplicateur $s = \Delta Y / \Delta I$

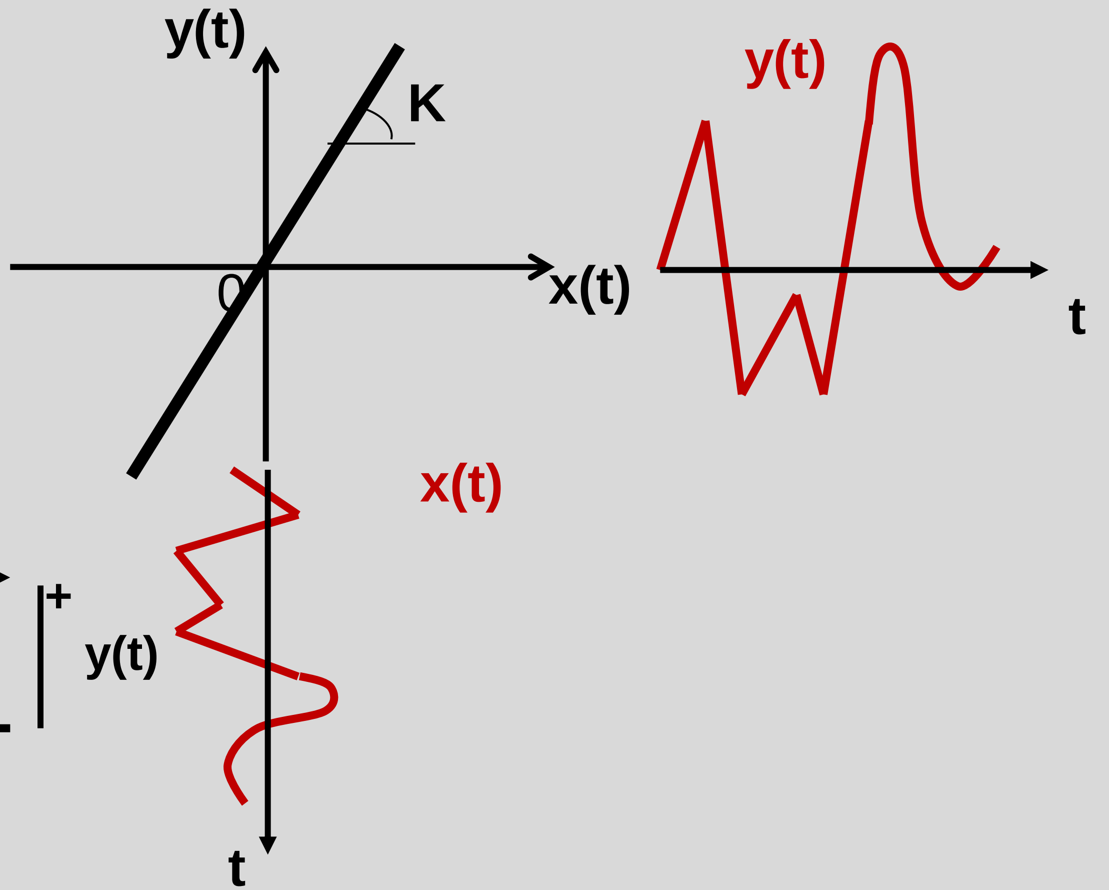
# Exemples - suite et fin

- **Le Système Linéaire le plus simple :** $y(t) = K\,x(t)$

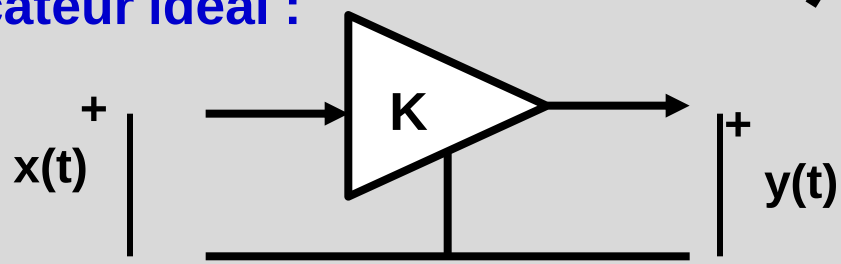
**Relation « statique » entre y et x =**

***Caractéristique de transfert***

**Si droite = *Gain* K (même si K < 1)**



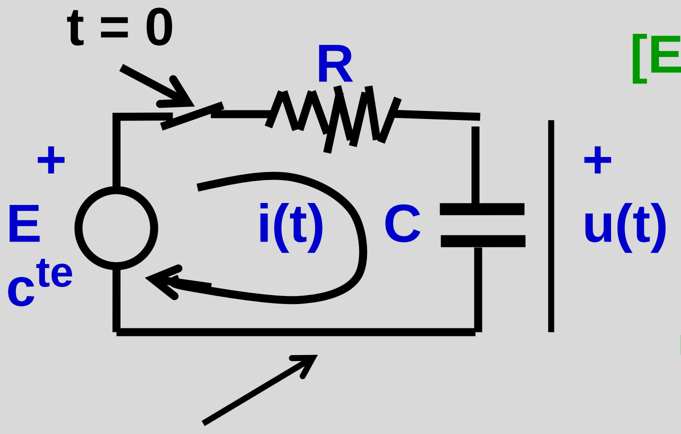

**Ex. : Amplificateur idéal :**

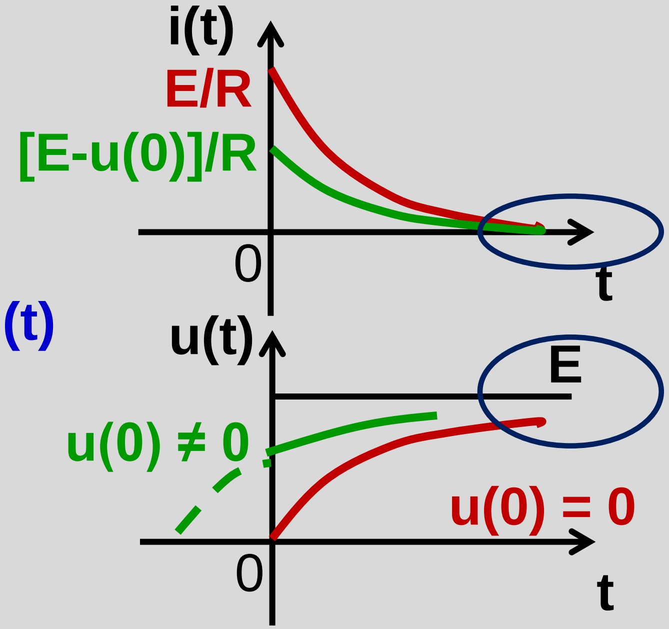



**Intérêt :**

**Les SN-L se définissent très souvent par leur caractéristique de transfert (N-L)**

# Conditions Initiales



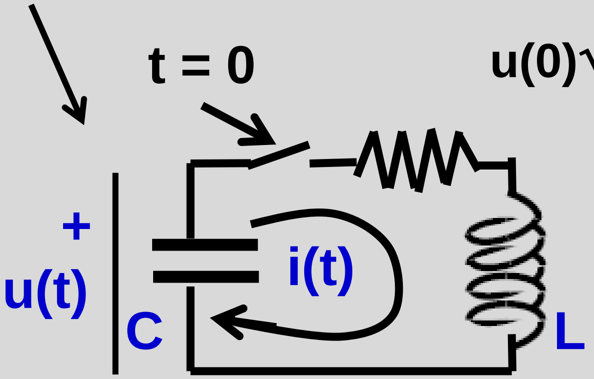



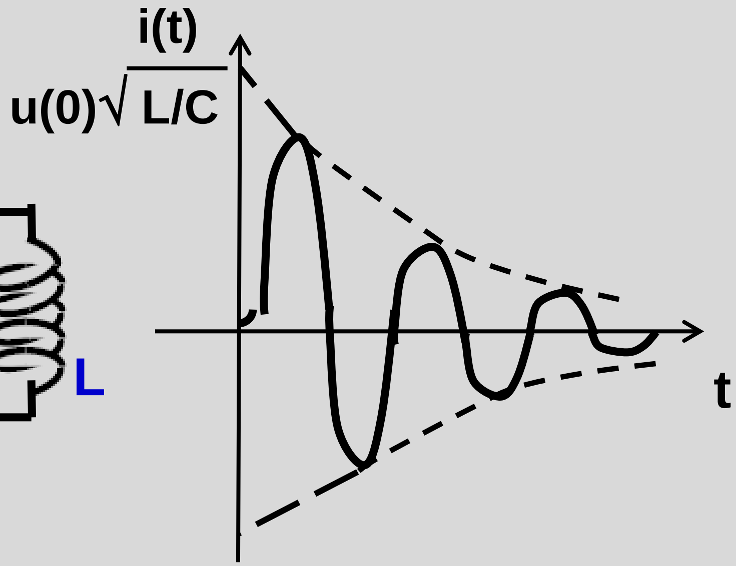

La valeur 0 [*] est un ***attracteur*** **pour l'intensité**

La valeur E [*] est un ***attracteur*** **pour la tension**

**Condensateur chargé :**

**u(0) = C.I.**




**[*] vulgairement appelée :**
***valeur finale, point d'équilibre, asymptote***

***Un Système Linéaire (stable) ne possède qu'un point d'équilibre ; ex. : ($u_{\infty}$, $i_{\infty}$)***

- **Les Systèmes Linéaires sont sensibles aux Conditions Initiales !**
- **En particulier l'amplitude des oscillations d'un SL dépend des C.I.**

PatSys

# Petites causes, grands effets

$$y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = c\,x(t)$$

$$y(t) = rl(t) \quad + \quad rf(t)$$

dépend du Système (a, b) : cf. éq. caractéristique

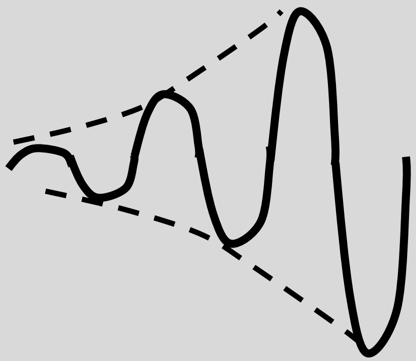
ressemble à x(t)

$rl(t) = k_1\,e^{f1(a,b)t} + k_2\,e^{f2(a,b)t}$ (si racines éq. caract. distinctes)

- **Réponses d'un Système Linéaire**
  - **Libre** $rl(t)$
  - **Forcée** $rf(t)$

**L'une ou l'autre peuvent être transitoires ou permanentes, voire divergente pour la RL**

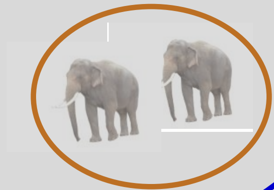
- **La réponse libre *se manifeste qq soit la source*, si petite soit-elle**
- **Un oscillateur, qui se comporte au démarrage comme un Système Linéaire instable (donc avec RL divergente), démarre sur**
  - **L'application de la tension d'alimentation, aussi progressive soit-elle**
  - **Du bruit**



- **Petite cause ⇨ Grand effet** (***dans un Système Linéaire*** **!)**
- **Puis la saturation de la sortie rend le Système non-linéaire en limitant l'amplitude des oscillations**

# Systèmes Non-Linéaires

Les non-éléphants

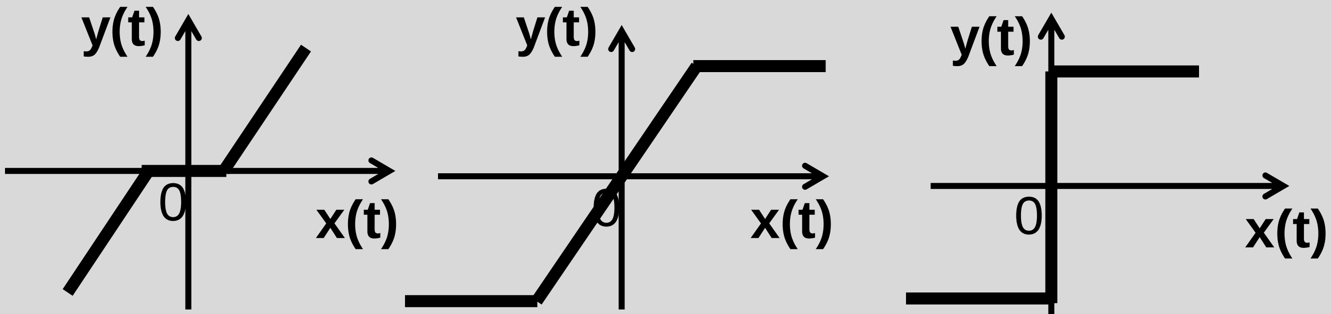


- Qu'est-ce qu'un Système Non-Linéaire ?

  C'est un Système qui n'est pas linéaire !

  Définition négative donc exhaustive !

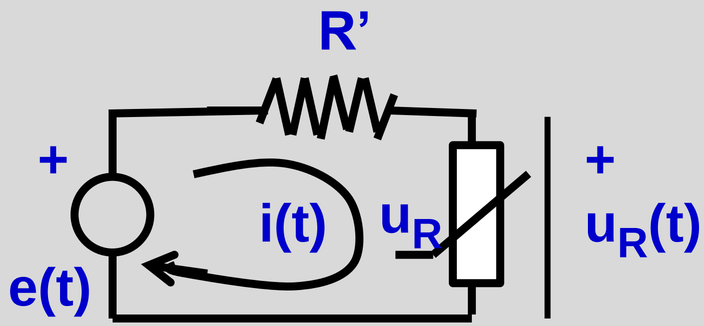
- Caractéristiques non-linéaires simples…

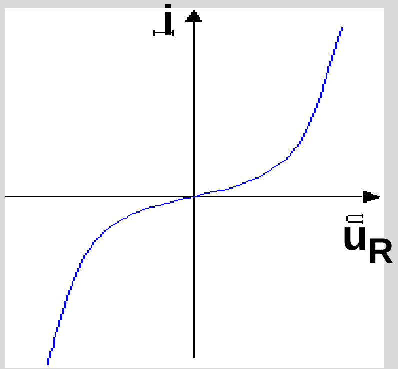



Seuil — Saturation — Tout ou rien

(+ combinaisons…)

- Varistance




voire moins simples :

Tout $y \neq k\,x$ (+ b)

p. ex. :

$y = x^2$

$y' = a\,y + xy$

ou encore moins simples :

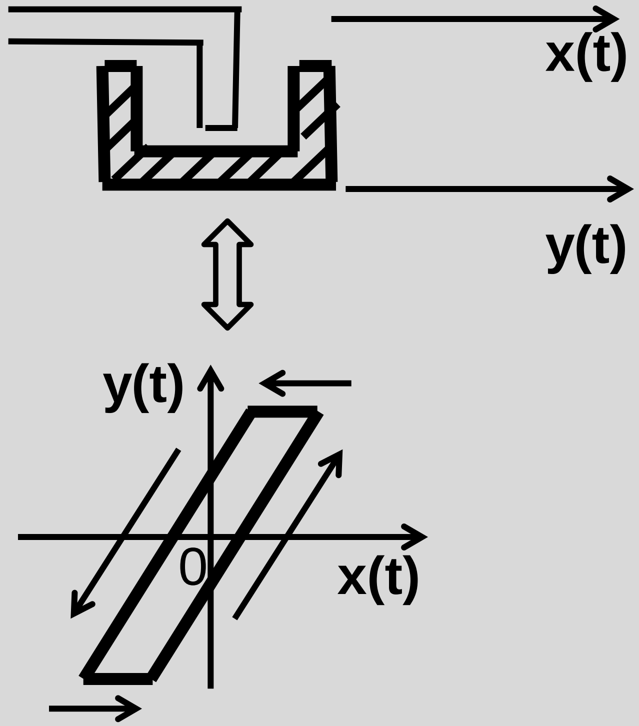
Modèle de Lokta-Volterra (prédateurs-proies)

Modèle de Lorenz (convections d'un fluide)

# Systèmes Non-Linéaires

## Caractéristiques non-linéaires simples – suite

- **Hystérésis (‘υστερεσις: retard ; ‘υστερειν : être en retard)**




- **Système économique :**

**Pression fiscale ↗ Fraude fiscale ↗**

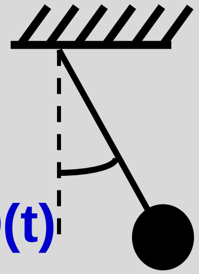
**Pression fiscale ↘ Fraude fiscale ~~↘~~**

**désigne en économie la persistance d'un phénomène économique alors que sa cause principale a disparu (ou s’est atténuée)**

PatSys

## Systèmes Non-Linéaires - suite

- **Pendule pesant amorti**



$\theta(t)$

$\theta''(t) + \rho\, \theta'(t) + \omega^2 \sin \theta(t) = 0$

**Si petites oscillations :**

$\sin \theta(t) \sim \theta(t)$ ⇨ **équa. diff. linéaire** (isochronisme)

- **Modèle de croissance de Solow**

**Formulation dite néoclassique (1956) :**

⇨**croissance *équilibrée* : production, consommation, capital, population croissent au même taux**

**k(t) capital par tête à l'instant t**

**F(k(t)) production par tête,**

**p. ex.** $F(k(t)) = [k(t)]^{\alpha}$

**s taux d'épargne supposé constant (ou part de la production allant à l'invest$^{t}$**

**n taux de croissance de la population**

$\delta$ **taux de dépréciation du capital**

$k'(t) = s\, F[k(t)] - (\delta + n)\, k(t)$

- **Modèle à 2 populations de Lokta-Volterra : prédateurs – proies (ou exploiteurs – exploités)**

**N-L : nb de rencontres proportionnel au produit des populations**

***2 Systèmes liés non-linéairement***

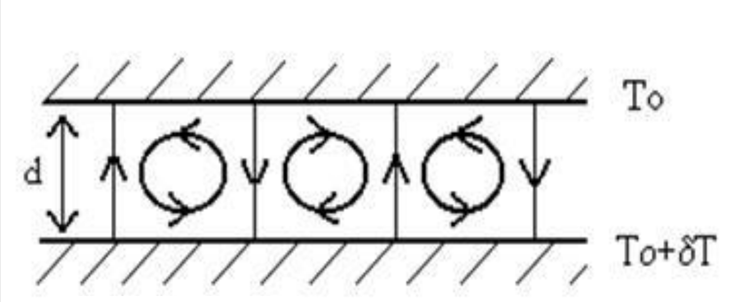
**x population des proies**

**y population des prédateurs**

$x' = + a\, x - b\, xy$

$y' = - c\, y + d\, xy$

## Systèmes Non-Linéaires - suite




- **Modèle de Lorenz**
  - **Les équations de Lorenz décrivent les phénomènes de convection d'un fluide idéal à deux dimensions, dans un réservoir chauffé par le bas**

$$dx/dt = s\,(y - x)$$

$$dy/dt = r\,x - y - xz$$

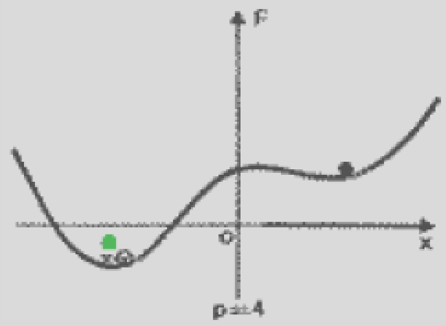
$$dz/dt = xy - b\,z$$

**s, r et b : réels positifs**
**s = constante de Prandtl : caractérise la viscosité et la conductivité thermique du fluide**
**r = paramètre de contrôle ; représente la différence de température entre le bas et le haut du réservoir**
**b mesure le rapport entre hauteur et largeur du système de convection**

  - **x est proportionnel à l'intensité du mouvement de convection (> 0 pour un mouvement dans le sens horaire, une valeur plus grande indiquant une circulation plus vigoureuse)**
  - **y est proportionnel à la différence de température entre les courants ascendants et les courants descendants (> 0 quand le fluide chaud est au fond du réservoir)**
  - **z est proportionnel à la distorsion du profil du gradient de température par rapport à la linéarité (0 correspond à un gradient linéaire, z > 0 indique que la température est plus uniforme dans le milieu du réservoir, et que les plus forts gradients se trouvent sur les bords du réservoir)**
  - **Au delà d'une valeur critique du paramètre r, le comportement du système est chaotique (ex. : s = 10, b = 8/3, r = 28). L'ensemble des trajectoires de phase possibles est l'attracteur étrange de Lorenz.**

## Systèmes Non-Linéaires – suite et fin (provisoire)

- **SN-L à dynamique plus riche que les SL – possibilités de :**
  - **Existence de plusieurs états d'équilibre**




  - **Cycles limites (attracteurs), oscillations d'amplitude indépendante des conditions initiales – ou « trajectoires » périodiques vers lesquelles l'évolution du Système converge spontanément depuis un domaine (éventuellement vaste) de C.I.**

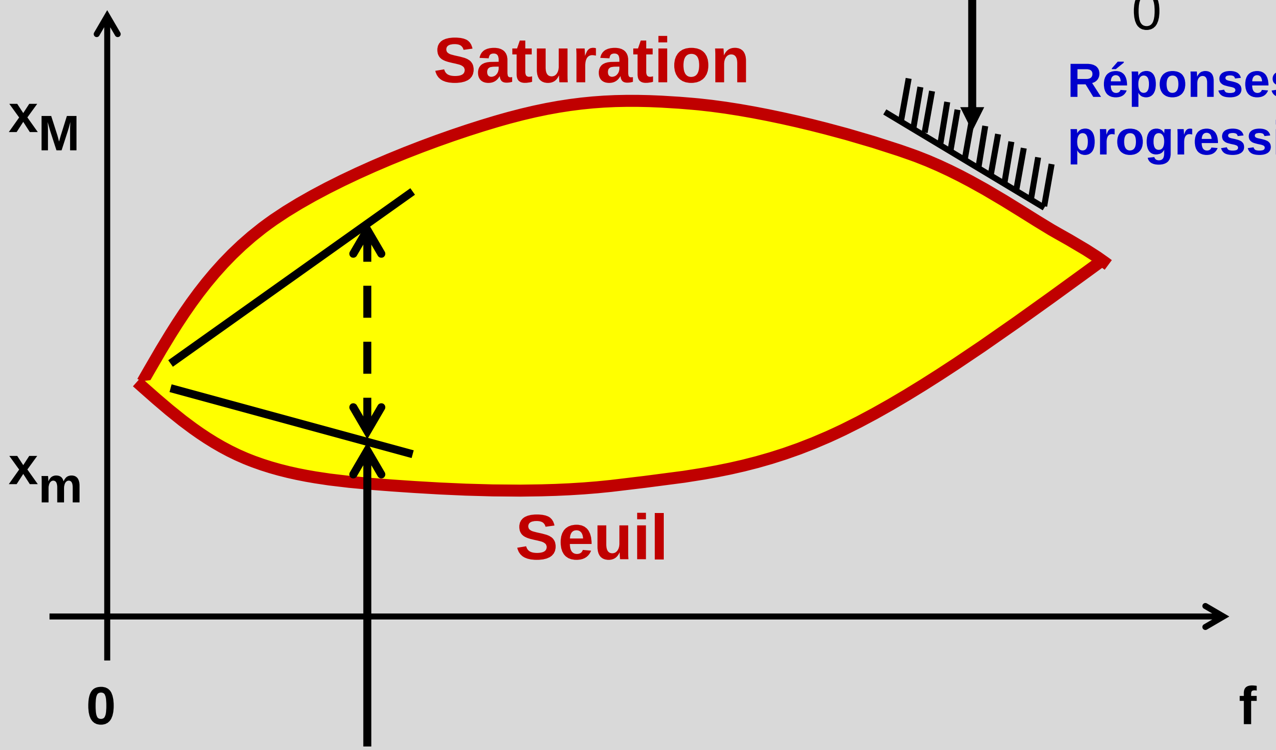
  - **Bifurcations, changements qualitatifs de comportement – changements dans l'évolution : nombre de points d'équilibre, passage de stable à instable ou l'inverse, ou apparition de nouvelles solutions, lorsqu'un ou plusieurs paramètres varient**

# Citron de WEGEL

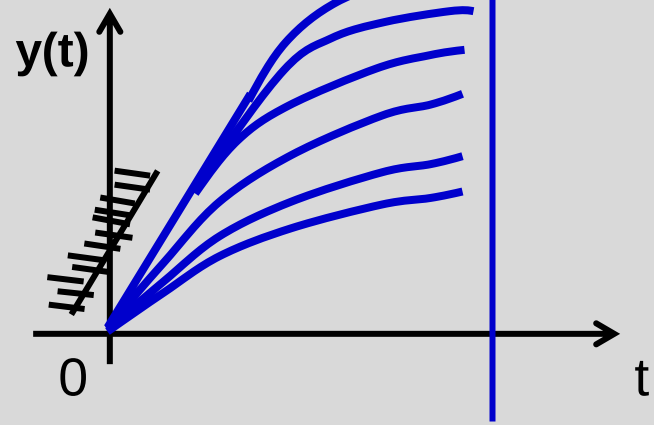
**Limitation de la vitesse de balayage (*slew rate*) des amplificateurs**
**Passage à la Mécanique des milieux continus (non-linéaire)**
**….**

**Amplitude de l'entrée (ou excitation, ou stimulus) x(t) En dB**

**$x_M - x_m$ (dB) définit la dynamique de l'entrée**




**Lubrification dynamique (*dither effect*)**
**Élimine l'effet de certains frottements statiques**



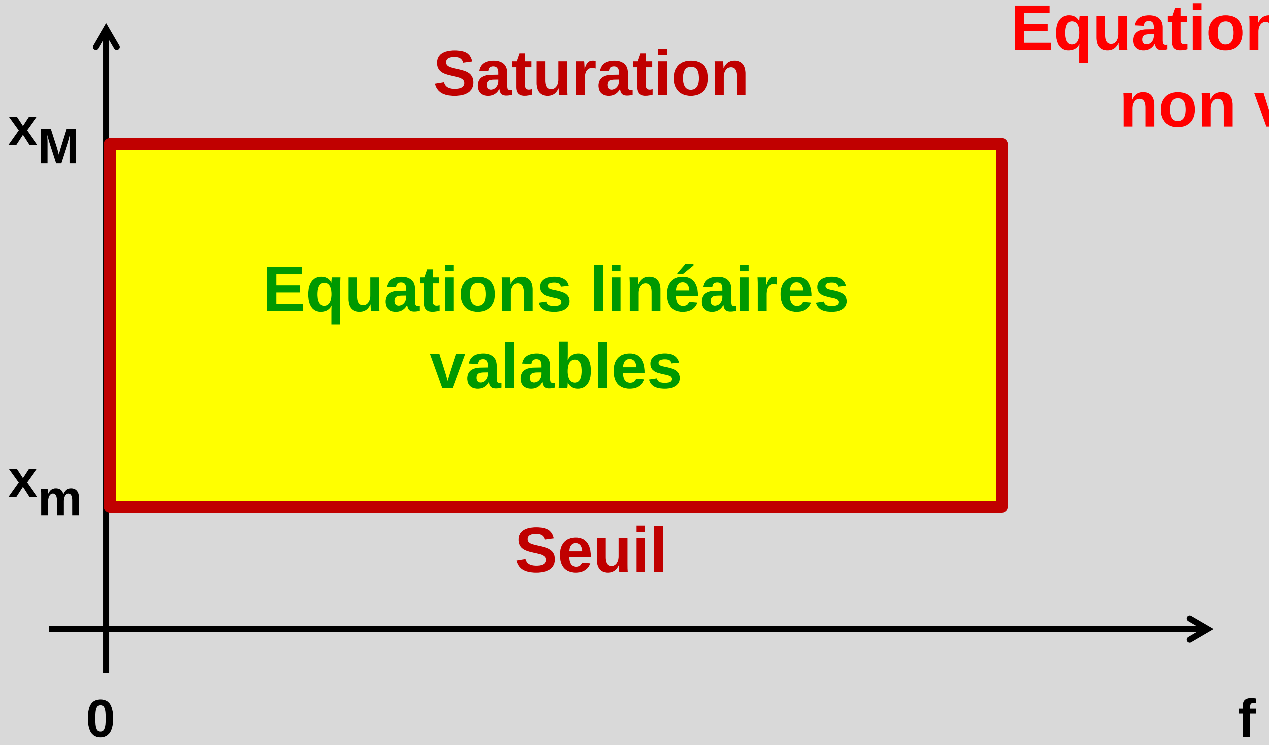

**Réponses à des excitations progressivement croissantes**

PatSys

# Citron de WEGEL – Rectangle de WEGEL

**Amplitude de l'entrée**
**(ou excitation,**
**ou stimulus)**
**x(t)**
**En dB**

**$x_M - x_m$ (dB)**
**définit la dynamique**
**de l'entrée**




**Equations linéaires**
**non valables**

# Opérabilité des Systèmes Linéaires

# Opérabilité des Systèmes Linéaires

- **Bénéficient,**
  **de tout l'arsenal de :**

**Pour l'*analyse* des Systèmes Linéaires**

**càd :**

**la détermination de leur comportement**

**càd encore :**

**- la détermination de leurs réponses à une excitation quelconque (analyse temporelle, analyse harmonique - ou fréquentielle)**

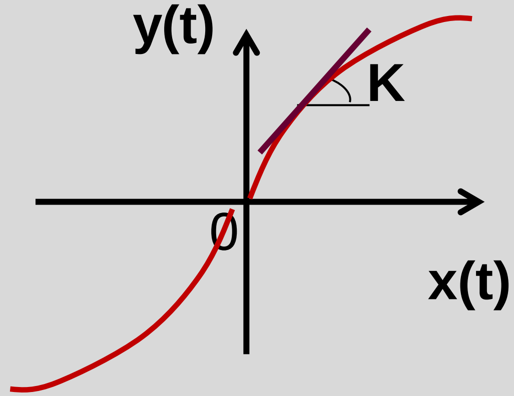
**- l'étude de leur stabilité**

- **L'Analyse**
  - **Calcul différentiel et intégral**
  - **Fonctions de variable complexe**
  - **Transformations (LAPLACE, FOURIER)**
  - **Equations d'état**
- **L'Algèbre**
  - **Calcul opérationnel**
  - **Notation complexe**
  - **Algèbre matricielle**
- **La Géométrie**
  - **Représentations graphiques**
- **Plus les méthodes statistiques et les méthodes d'optimisation**

# Opérabilité des Systèmes Non-Linéaires

- **Pas de théorie des SN-L, mais des théories ou plutôt des pratiques**
  - **Linéarisation par balayage (lubrification dynamique)**

    ***On rend le Système linéaire***



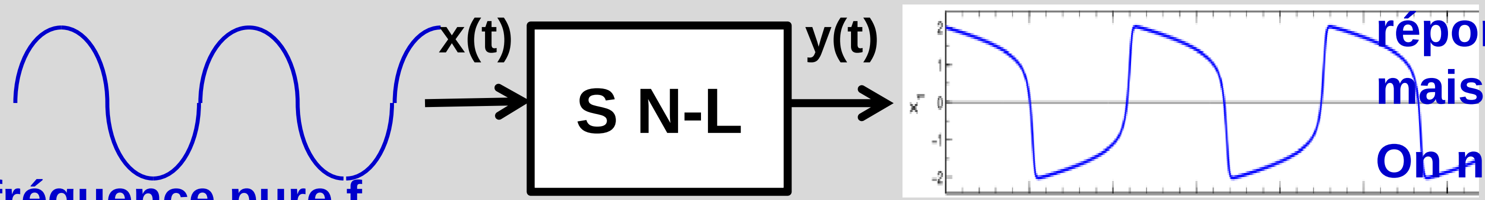

  - **Linéarisation autour d'un point de fonctionnement**

    ***On considère le Système linéaire localement***

  - **Linéarisation harmonique**

    ***On fait comme si le Système était linéaire***

    - **Méthode du « premier harmonique » (en fait, du « fondamental »)**




**fréquence pure $f_0$**

**réponse périodique de même fréquence $f_0$ mais non sinusoïdale ($f_0$, 2 $f_0$, 3 $f_0$, 4$f_0$…)**

**On ne retient que le fondamental**

    - **Justifiée par le filtrage HF réalisé naturellement par les Systèmes**
    - **Bénéficie de tout l'arsenal des méthodes harmoniques**

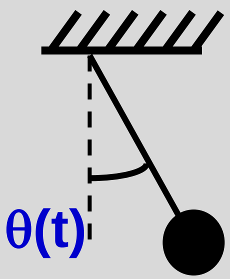
  - **Plan de phase (méthode pas limitée aux SN-L) …/…**

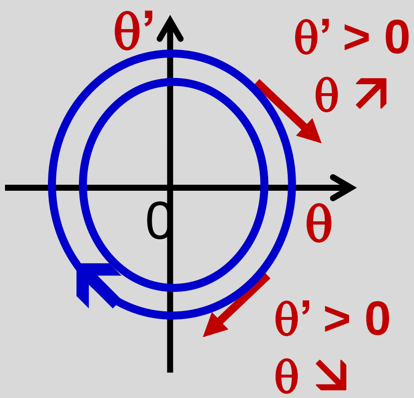
**Frontières des SL : Freins ET Stimulateurs !**

# Opérabilité des Systèmes Non-Linéaires (suite)

- …/… Méthode du plan de phase = Représentation, dans le plan, de l'évolution de 2 variables (« variables d' état »), en fonction l'une de l'autre, p. ex. position et vitesse ⇨ « trajectoires de phase »

**Oscillateur harmonique libre non amorti (SL) : $\rho = 0$**




Trajectoires de phase = ellipses

dimensions des ellipses fonctions des conditions Initiales (SL)

$\theta(t)$ = position angulaire

$\theta'(t)$ = vitesse angulaire

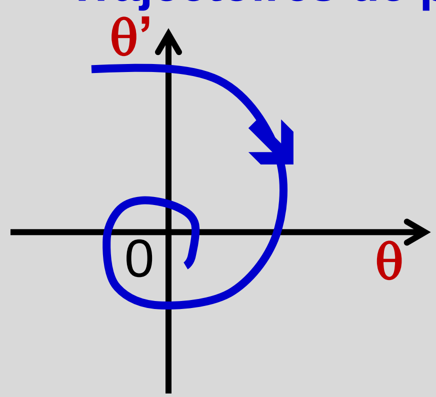
linéaire si $\theta$ faible

$$\theta''(t) + \rho\, \theta'(t) + \omega^2 \sin \theta(t) = 0$$

$$\theta''(t) + \rho\, \theta'(t) + \omega^2\, \theta(t) = 0$$

**Oscillateur harmonique libre amorti (SL) : $\rho \neq 0$**

Trajectoires de phase = spirales



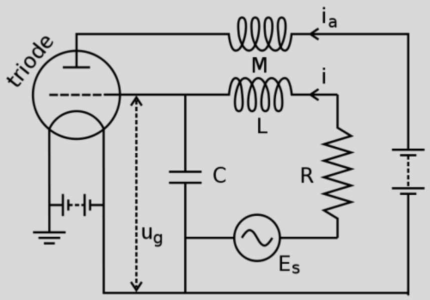

dimension de la spirale fonction des conditions initiales - C.I. (SL)

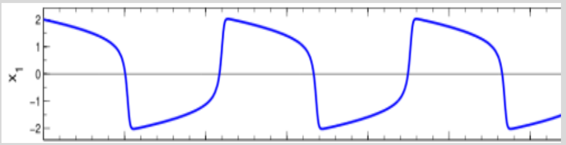
un seul point d'équilibre (SL)

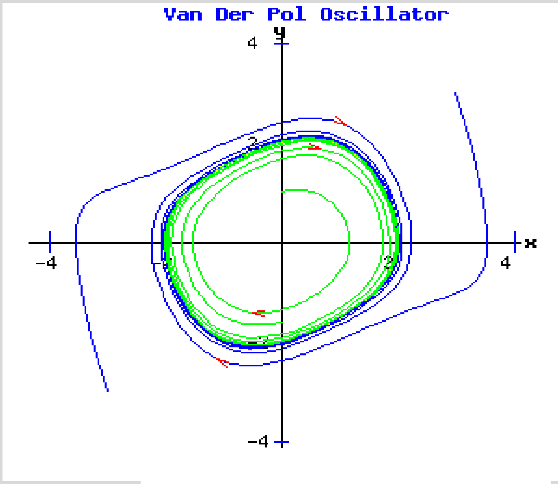
# Opérabilité des Systèmes Non-Linéaires (suite et fin)

➢ **…/… Méthode du plan de phase (suite)**

**Oscillateur de Van der Pol (SN-L)**

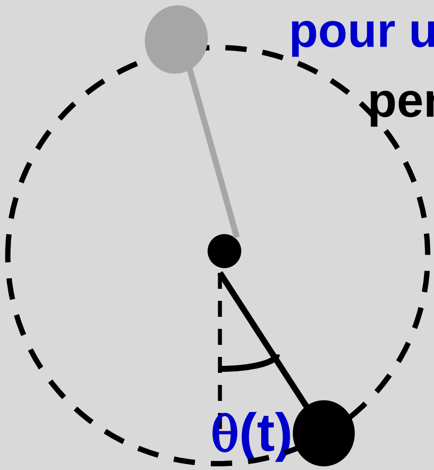





***attracteur*** **en forme de** ***cycle limite***
**(cycle limite = oscillations « de relaxation »)**
**le même qq soient les C.I. (≠ SL)**

**Plusieurs points d'équilibre possibles pour un SN-L (≠ SL)**



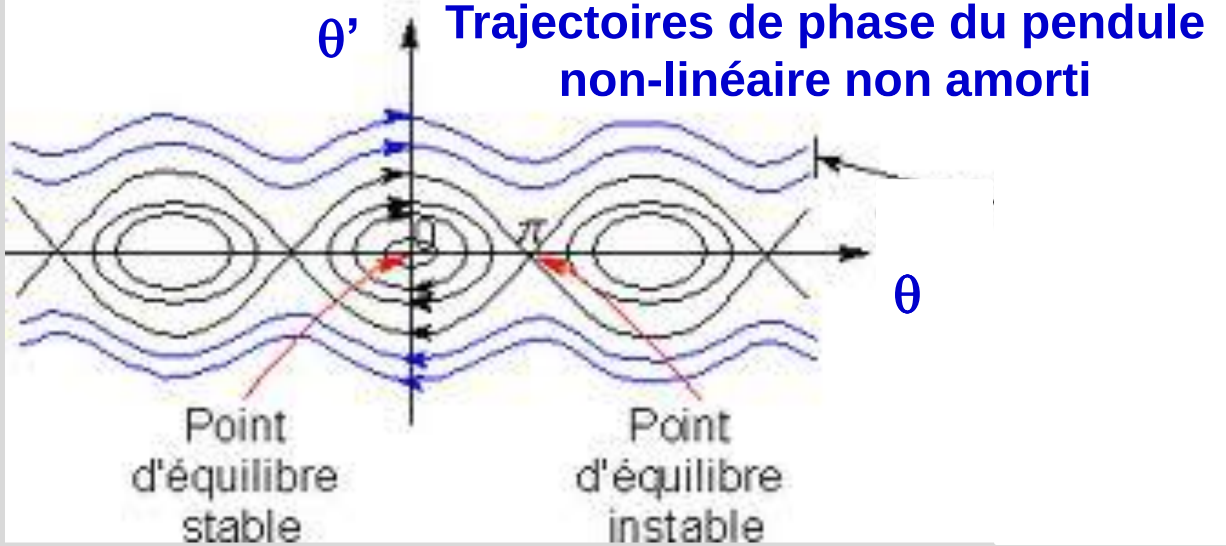

**pendule pesant à tige rigide**

**2 points d'équilibre :**

**θ = 0 (stable)**

**θ = 180° (instable)**

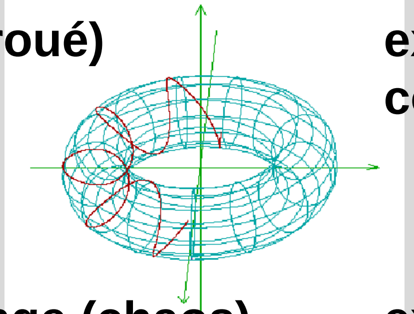
**Trajectoires de phase du pendule non-linéaire non amorti**

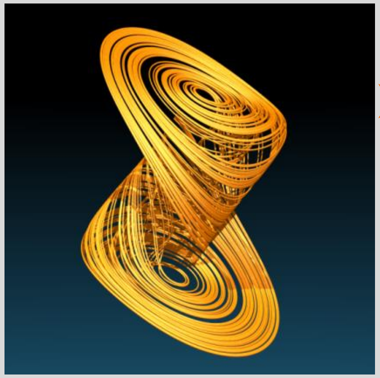



$$\theta''(t) + \rho\, \theta'(t) + \omega^2 \sin \theta(t) = 0$$

# Systèmes Non-Linéaires : Caractéristiques - suite

- **Attracteur (ou ensemble limite) : Ensemble de l'espace des phases vers lequel toutes les trajectoires environnantes convergent – ou vers lequel un système évolue de façon irréversible en l'absence de perturbations**
  - **Point fixe** — **ex. : point d'arrêt du pendule pesant amorti**
  - **Cycle limite** — **ex. : oscillateur de Van der Pol**
  - **Tore (beignet troué)** — **ex. : mouvement de l'œil (saccades naturelles) combinant des oscillations indépendantes**

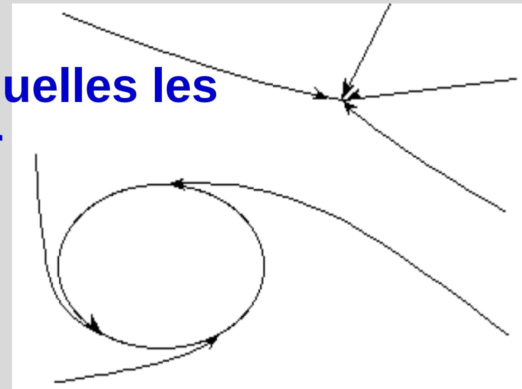




  - **Attracteur étrange (chaos)** — **ex. : couplage atmosphère-océan (Lorenz)**

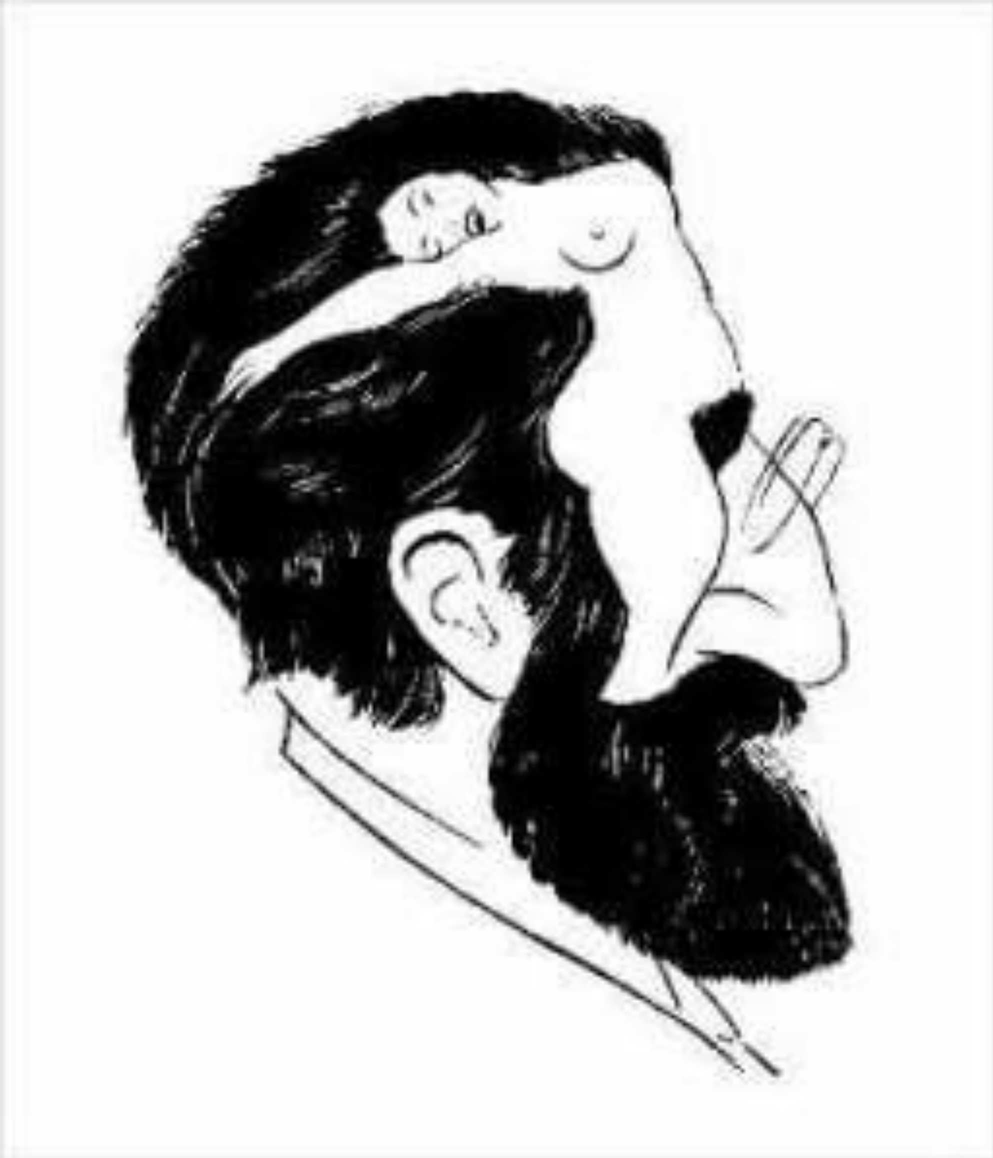
    **Forme d'attracteur liée à une dynamique apparemment désordonnée et pourtant déterministe (suppose que le Système ait au moins deux fréquences d'oscillations indépendantes) – caractéristique des Systèmes chaotiques**
    **[dénomination de David Ruelle et Floris Takens (1971)]**

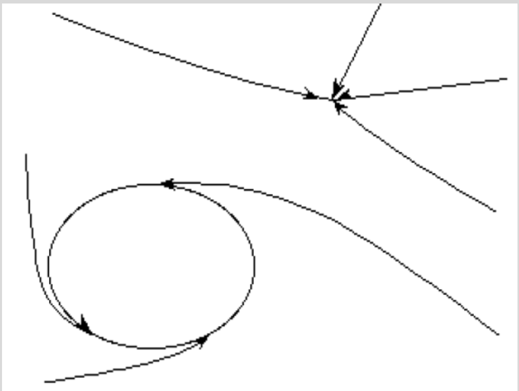
- **Bassin d'attraction : ensemble des Conditions Initiales pour lesquelles les trajectoires associées convergent toujours vers le même attracteur**



# Systèmes Non-Linéaires : Caractéristiques - suite

- Système à 2 attracteurs





PatSys

## Systèmes Non-Linéaires : Caractéristiques – suite et fin

- **Bifurcations : changements qualitatifs de comportement – changements dans l'évolution : nombre de points d'équilibre, passage de stable à instable ou l'inverse, ou apparition de nouvelles solutions, lorsqu'un ou plusieurs paramètres varient**
  - **Equation de Van der Pol**
    **⇨pour une certaine valeur d'un paramètre, passage de stable à instable**

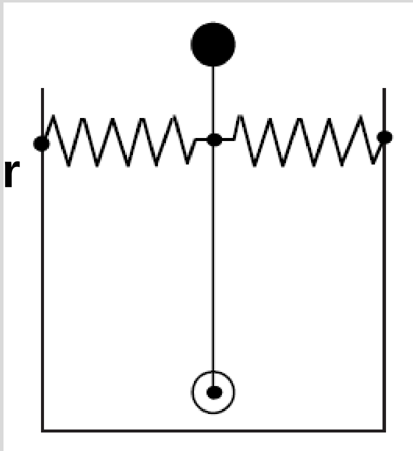
**$y''(t) - \varepsilon\, \omega_0\, [1 - y^2(t)]\, y'(t) + \omega_0^2\, y(t) = 0$**

**Si $\omega_0 = 1$, et posant y et $x = y'(t)$ comme variables d'état :**

**$x'(t) - \varepsilon\, [1 - y^2(t)]\, x(t) + y(t),\ y'(t) = x(t)$**

***en $\varepsilon = 0$ bifurcation « de Hopf supercritique » [*]***

  - **Pendule pesant inversé dans le champ de pesanteur**



**$ml^2\, \theta''(t) = mgl \sin \theta(t) - k\, \theta(t) - \lambda\theta'(t)$**

**Si $\lambda = 0$ et $\sin \theta = \theta - \theta^3/3!$ :**

**⇨ peut être le siège de bifurcations**

**⇨Equation de Duffing**

**$y''(t) + \alpha\, y(t) + x^3(t) = 0$**

***Bifurcation si $\alpha$ passe de 0 à 0+***

  - **Bifurcation topologique ou *catastrophe* : perte ou changement de stabilité structurelle qui affecte non pas une solution particulière mais l'ensemble de toutes les trajectoires du système**

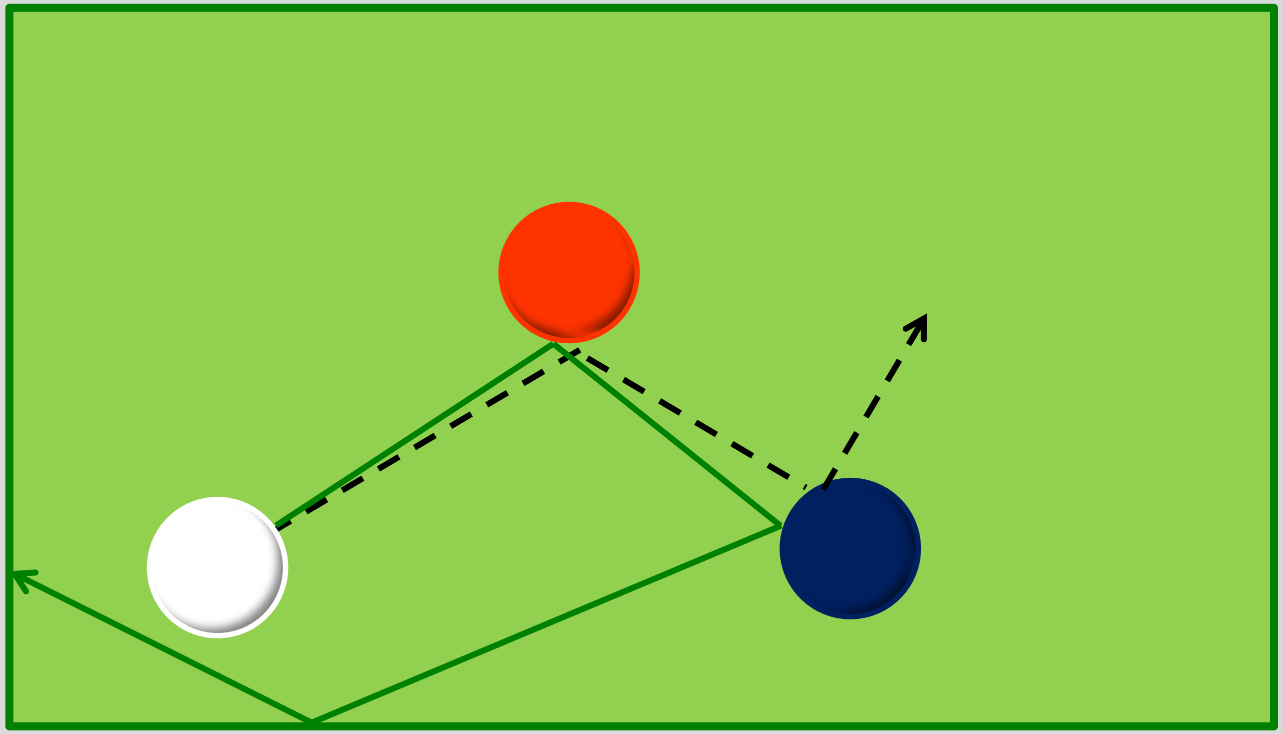
- **Introduit un aspect aléatoire alors que le Système reste déterministe**

**[*] il existe d'autres types de bifurcations**

PatSys

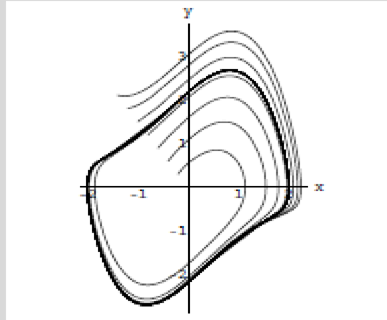
# Systèmes chaotiques

- **Chaos : Comportement imprévisible et apparemment aléatoire, très dépendant des Conditions Initiales, d'un système dynamique défini par des équations déterministes**
- **Système chaotique : système déterministe mais dont la sortie semble aléatoire et qui est très sensible aux Conditions Initiales**

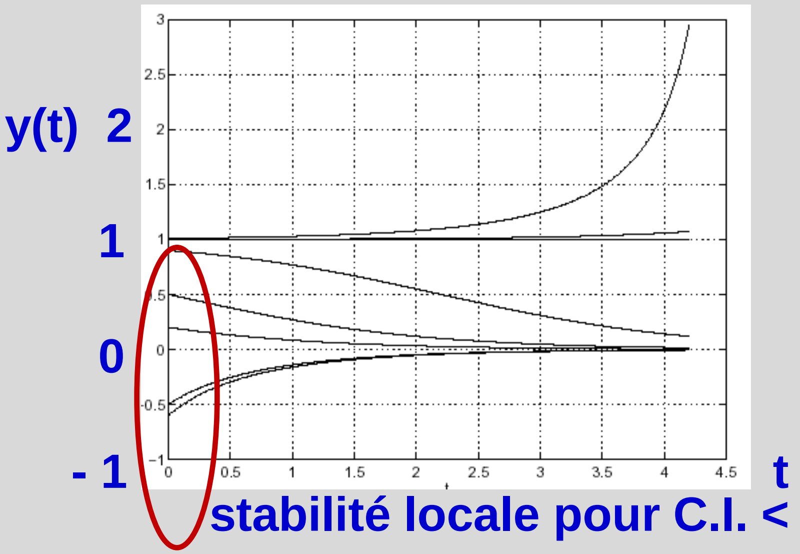


**Dépendance sensitive aux conditions initiales (David RUELLE, *Hasard et Chaos*)**
**A la fois déterminisme et imprédictibilité**

# Systèmes chaotiques - suite




- **Résumé SN-L :**
  - SN-L moins dépendants des conditions initiales que les SL : attracteurs (points, cycles limites…) indépendants des C.I.
  - en effet, pour une région donnée (bassin d'attraction), le système évolue vers une solution unique
  - une fois le système sur son attracteur, il y reste confiné
  - il peut y avoir des instabilités locales autour de plusieurs points singuliers, mais la trajectoire reste bornée (confinée dans une courbe fermée) s'il n'y a pas de bifurcation
  - s'il y a bifurcation, la sortie du Système est sensible aux Conditions Initiales :




stabilité locale pour C.I. < 1

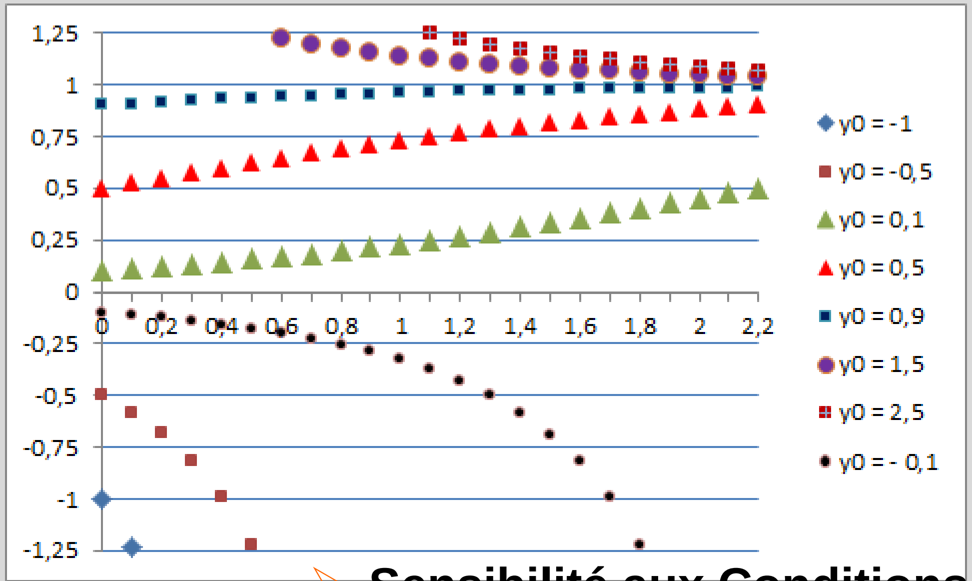
$$y'(t) = -\,y(t) + y^2(t)$$

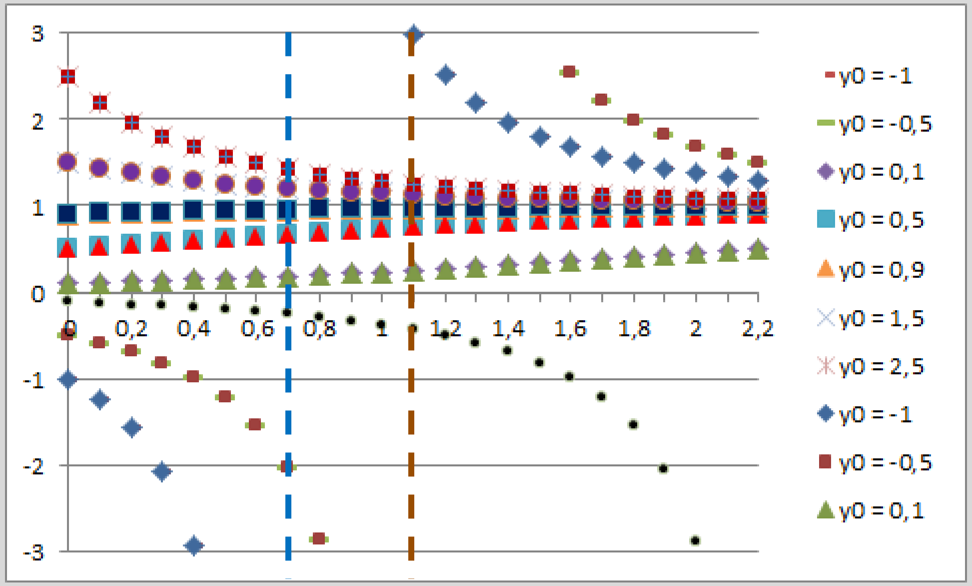
Du fait de l'aspect aléatoire malgré la nature déterministe du Système, il peut être difficile de prévoir son comportement ; *mais il peut ne pas être chaotique pour autant*

Avant de devenir chaotique, un Système présente des changements brutaux et multiples de comportements (bifurcations) liés à la modification d'un paramètre

# Systèmes chaotiques - suite

- **Fonction logistique**
  - $y'(t) = y(t) - y^2(t) \Rightarrow y(t) = \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{y0} - 1\right) e^{-t}}$



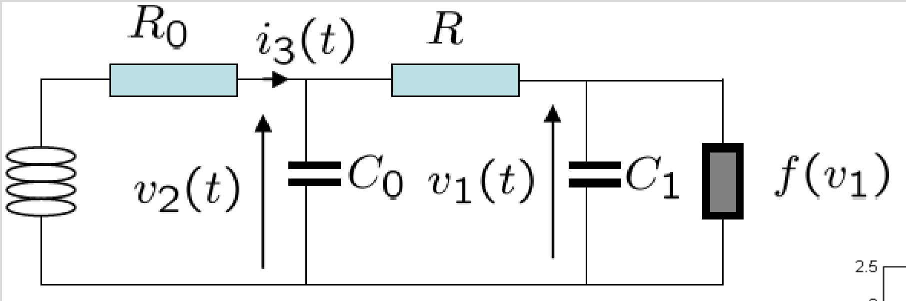



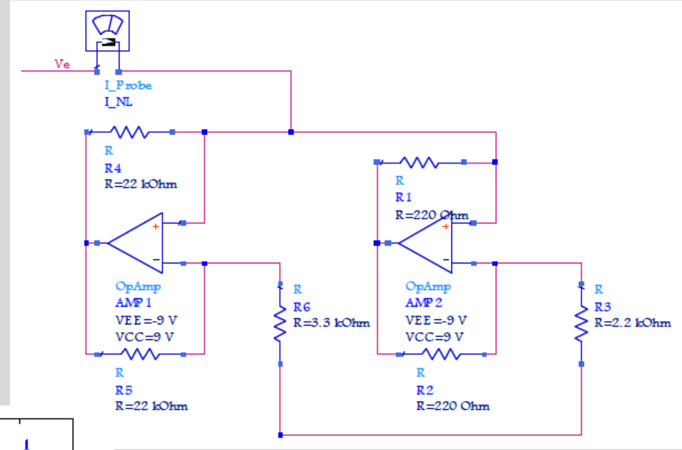

  - **Sensibilité aux Conditions Initiales mais aussi sensibilité du comportement aux Conditions Initiales**
  - **Changements brutaux et multiples de comportement (bifurcations) liés à la modification d'un paramètre : ici, la C.I. elle-même**
  - **Bifurcations : $y_0 = 1$**

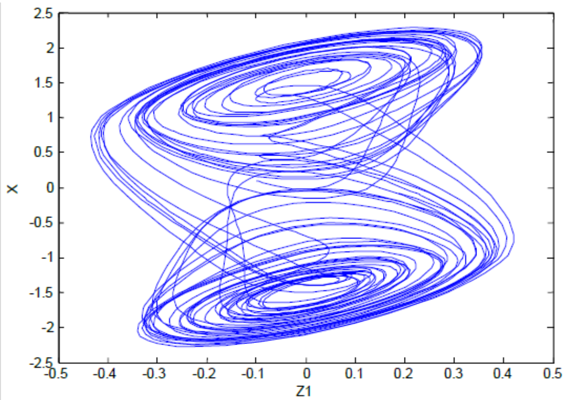
    **$y_0 = 0$ (instabilité)**
  - **Prédiction du comportement difficile autour de $y_0 = 1$ et surtout $y_0 = 0$**
  - **Mais pas de comportement chaotique**

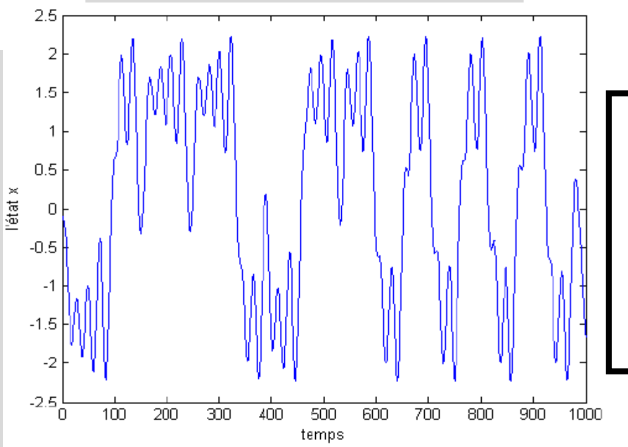
# Systèmes chaotiques - suite

- **RLC avec résistance négative**



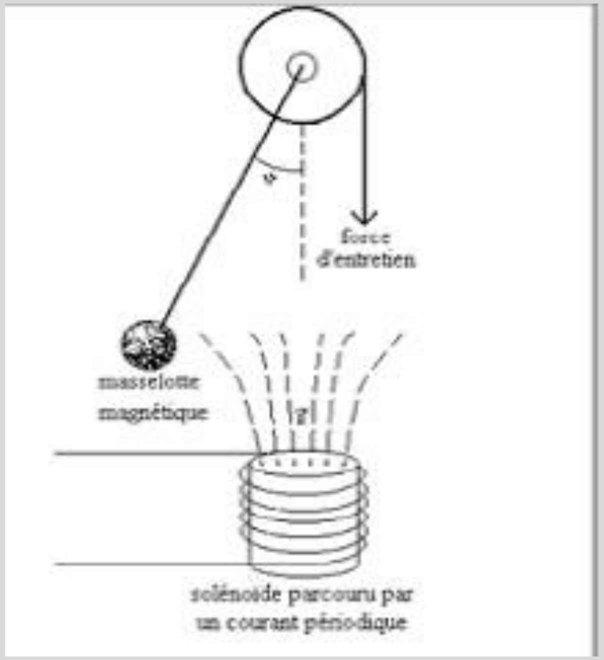

**Difficulté de prédiction de la trajectoire (l'évolution) à un instant t : imprévisibilité fondamentale des Systèmes chaotiques**

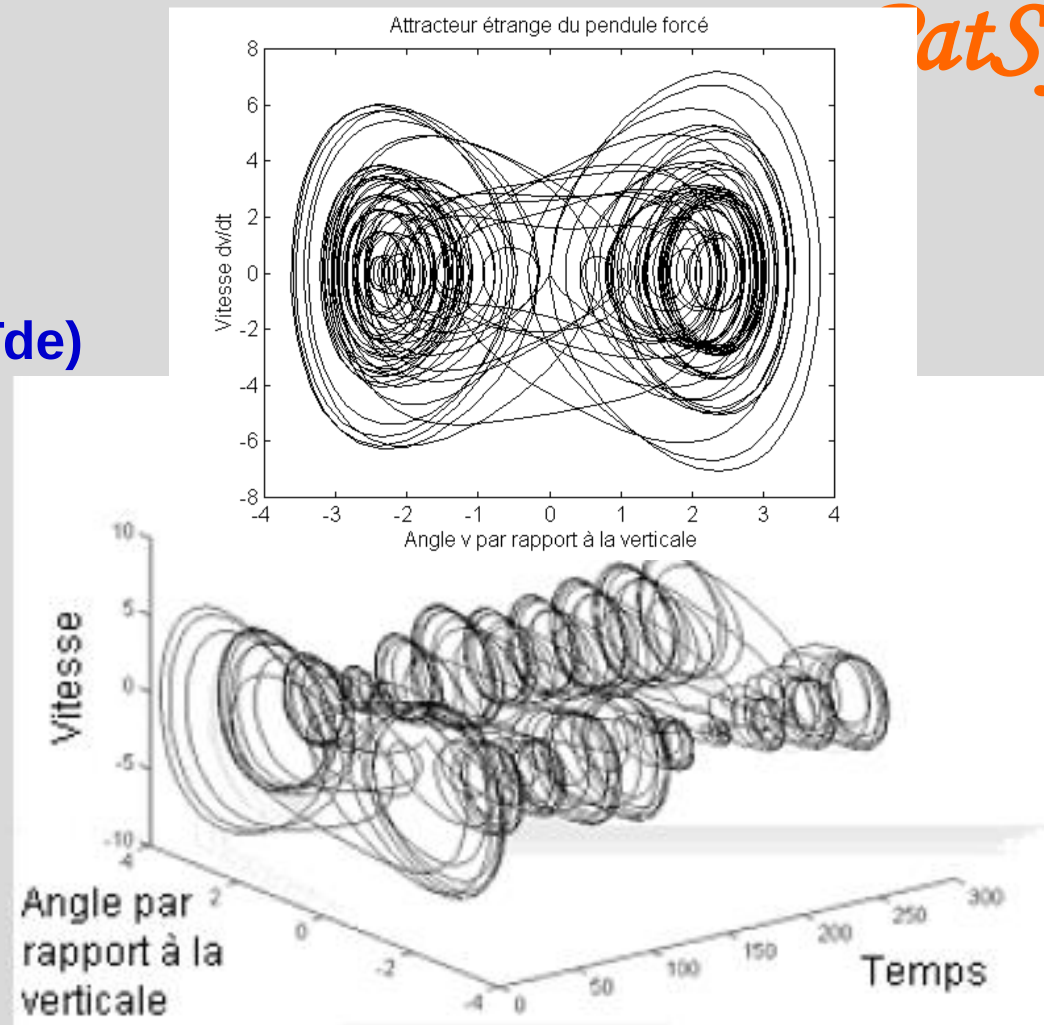
- **Au lieu d'être dissipatif (effet Joule), le système est entretenu par un apport d'énergie via la résistance négative (circuit actif à base d'amplis opés)**
- **De par la non linéarité active, tout se passe comme si le système, revenant vers un état stable, recevait une quantité d'énergie avant d'être de nouveau dissipatif (états successifs d'expansion puis de rétraction)**

- **Lev Landau cherchait à expliquer ce type de comportement par une superposition de « modes » (oscillations périodiques), David Ruelle a introduit la notion de chaos (article « *On the nature of turbulence* », écrit avec Floris Takens)**

# Systèmes chaotiques - suite

## ❑ Pendule forcé et aimant (ou solénoïde)



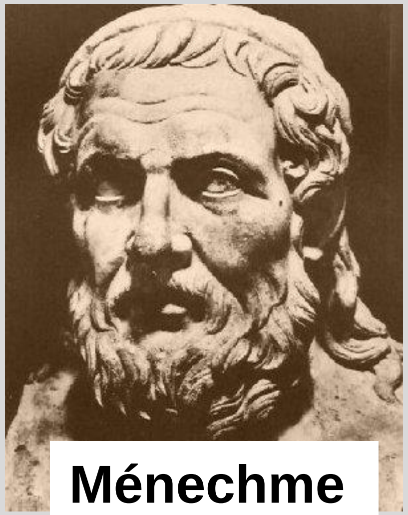




- L'énergie d'origine magnétique apportée est non-linéaire (force d'attraction en 1/d2)
- D'une oscillation a une autre, le pendule n'effectue jamais deux fois le même trajet
- Si l'on modifie très légèrement une condition initiale (position ou vitesse angulaire initiale ou position de l'aimant), la nouvelle trajectoire diffère totalement de la précédente :
  - à un instant donné, les deux pendules ont des positions différentes
  - à deux instants différents pour lesquels les deux pendules ont la même position, il est impossible de prédire la position future dans la deuxième expérience en connaissant l'évolution de la première

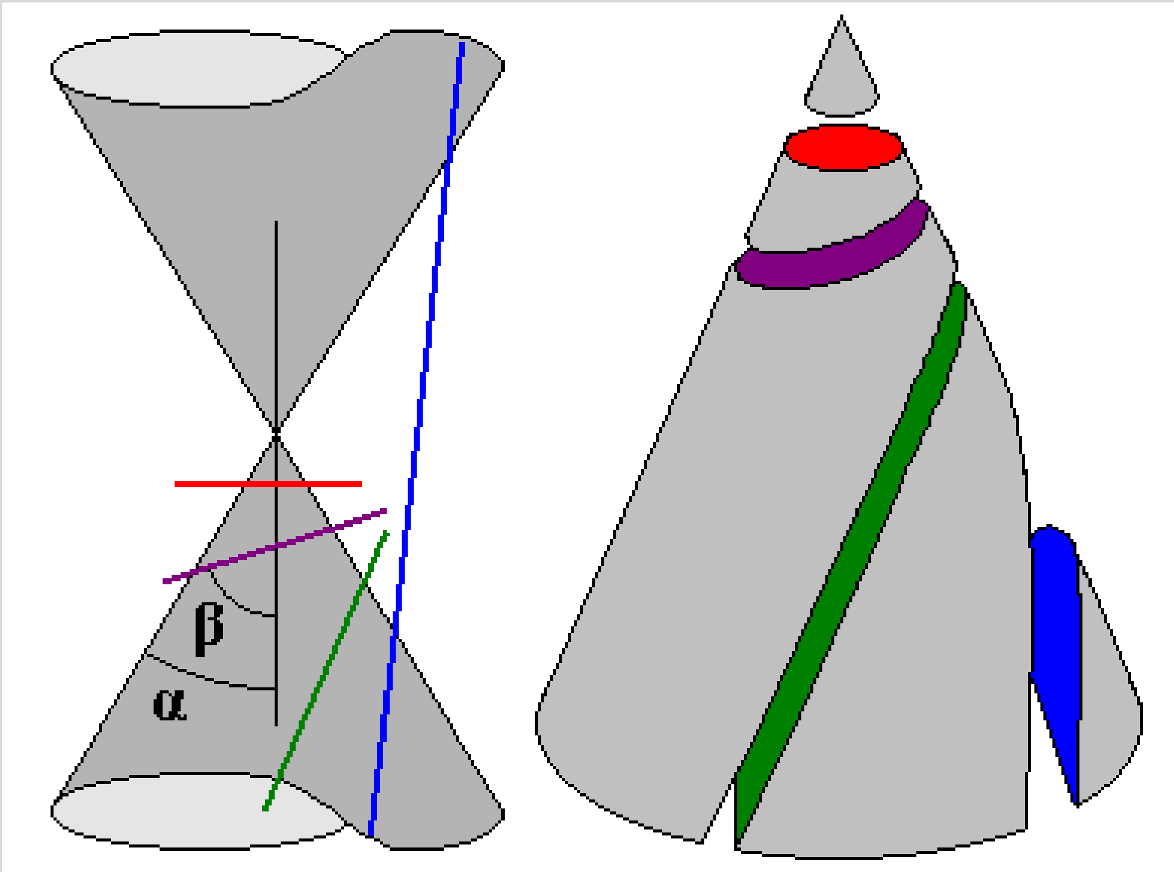
# Systèmes chaotiques - suite

- **Retour sur les bifurcations**
  - **Bifurcation algébrique triviale**

    **soit $x^2$ - a = 0 : si a > 0, x = ± √ a ; si a < 0, x est imaginaire ⇨ a = 0 est une bifurcation**
  - **Bifurcation géométrique triviale (?) : sections coniques d'Apollonios**



**Ménechme ~380 - ~320**



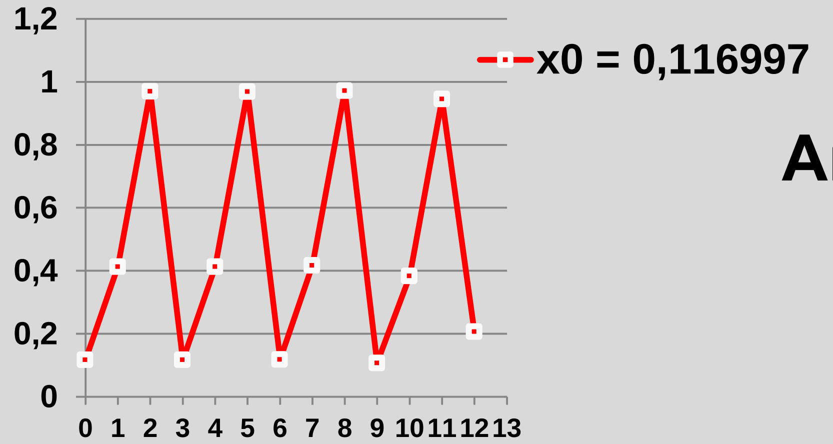

**Apollonios de Perga (ou Pergê) ~262 - ~190**

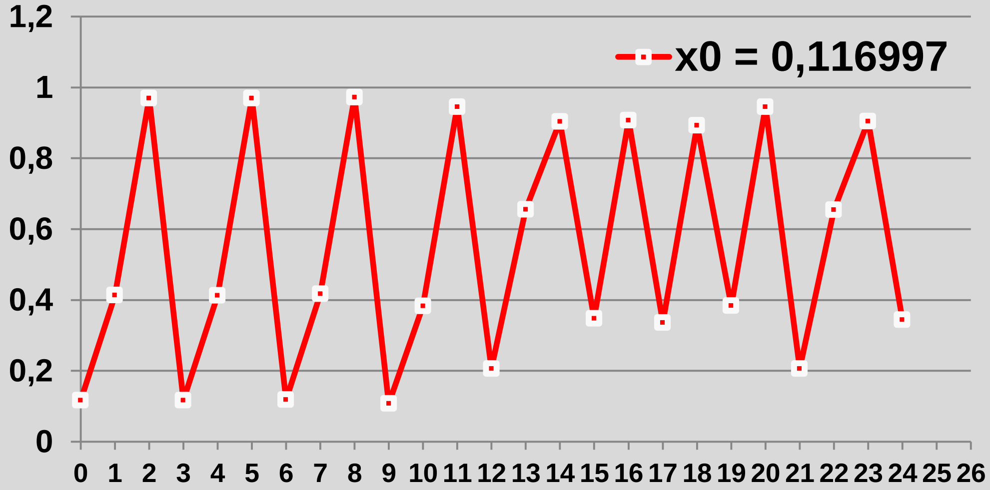
**Le plan sécant fait un angle β avec l'axe du cône : β = α est une bifurcation**

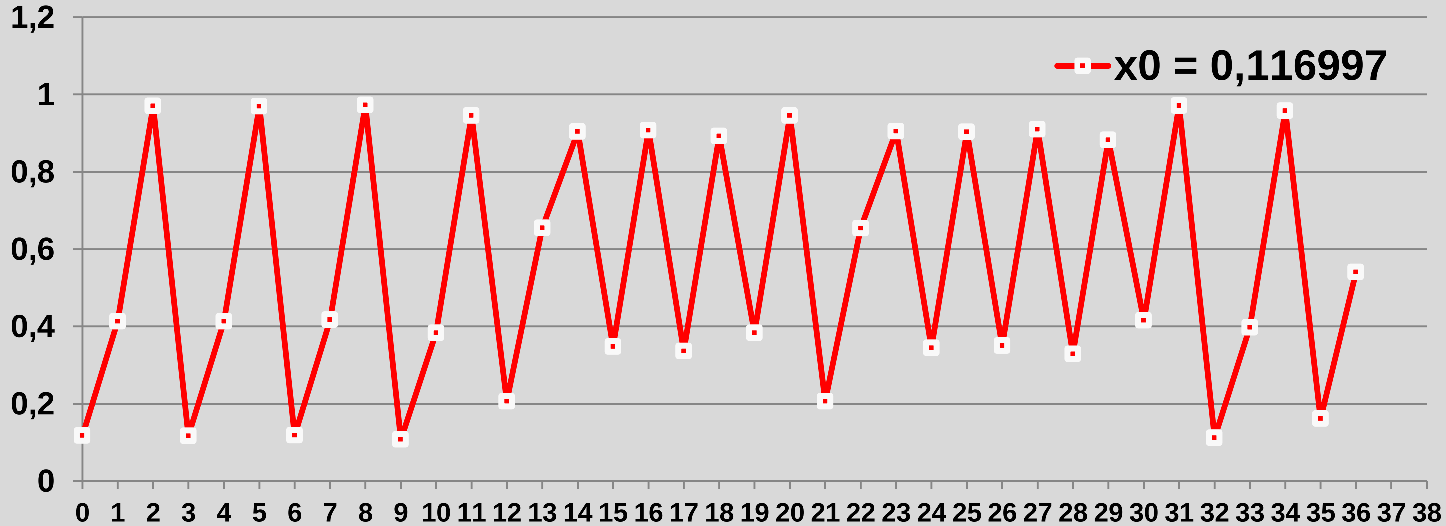
# Analyse d’une suite de nombres

**(source : Ivar Ekeland, *Le Chaos*)**

| n | x n |
|---|---|
| 0 | 0,116997 |
| 1 | 0,4132348 |
| 2 | 0,9698872 |
| 3 | 0,1168241 |
| 4 | 0,4127048 |
| 5 | 0,9695182 |
| 6 | 0,1182107 |
| 7 | 0,4169478 |
| 8 | 0,9724093 |
| 9 | 0,1073178 |
| 10 | 0,3832027 |
| 11 | 0,9454335 |
| 12 | 0,2063559 |
| 13 | 0,6550925 |
| 14 | 0,9037853 |
| 15 | 0,3478297 |
| 16 | 0,9073768 |
| 17 | 0,3361766 |
| 18 | 0,8926476 |
| 19 | 0,3833114 |
| 20 | 0,9455351 |
| 21 | 0,2059939 |
| 22 | 0,6542417 |
| 23 | 0,904838 |
| 24 | 0,3444247 |
| 25 | 0,9031853 |
| 26 | 0,3497663 |
| 27 | 0,9097193 |
| 28 | 0,3285202 |
| 29 | 0,8823787 |
| 30 | 0,415146 |



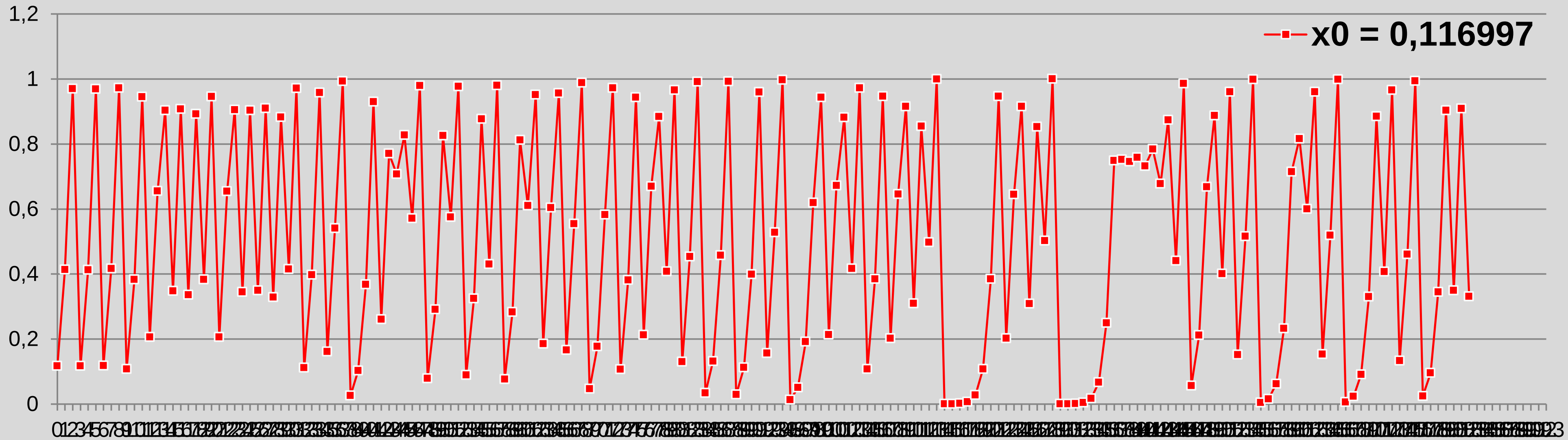



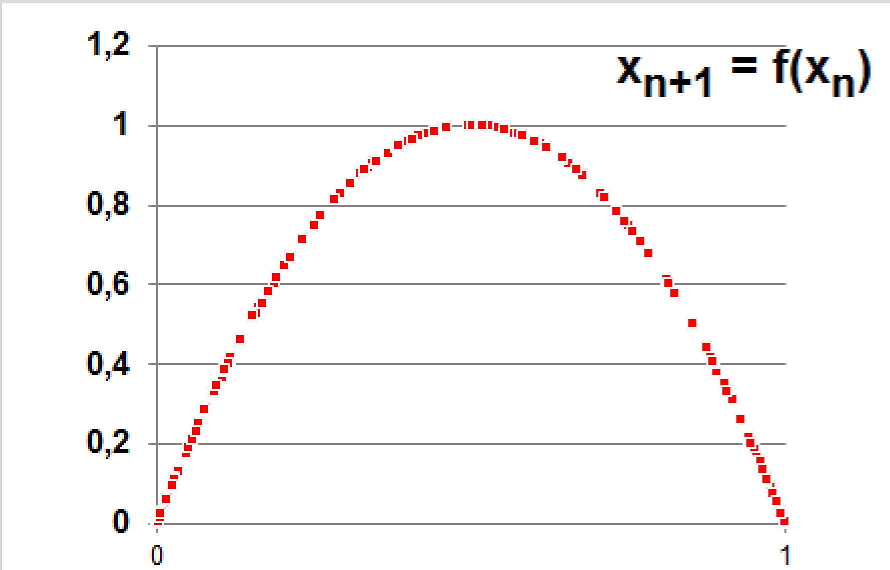
# Analyse d'une suite de nombres

- On continue…

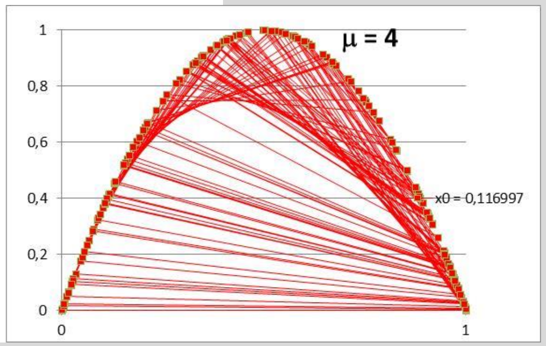
184 éléments




- Vous avez dit aléatoire ?




**Suite logistique $x_{n+1} = \mu\, x_n\,(1 - x_n)$ avec $\mu = 4$**



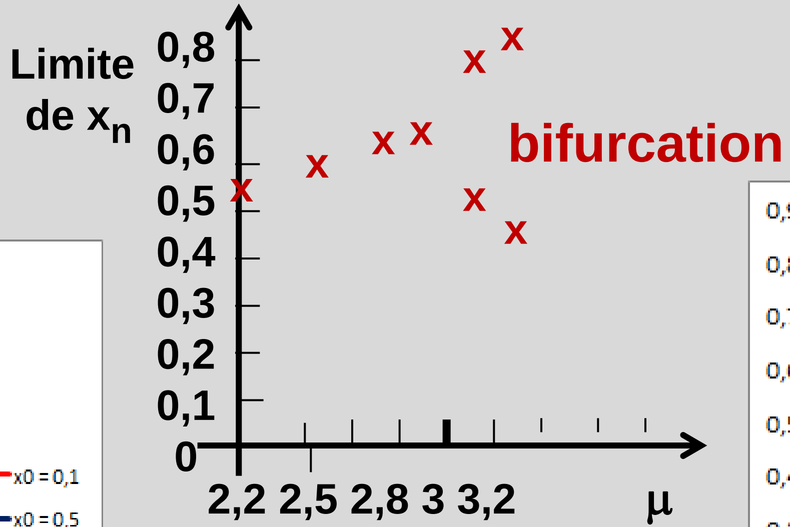
PatSys

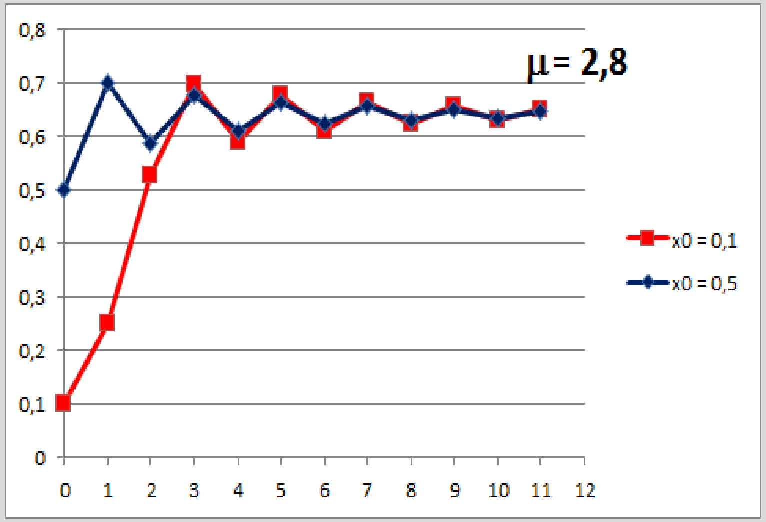
# Systèmes chaotiques - suite

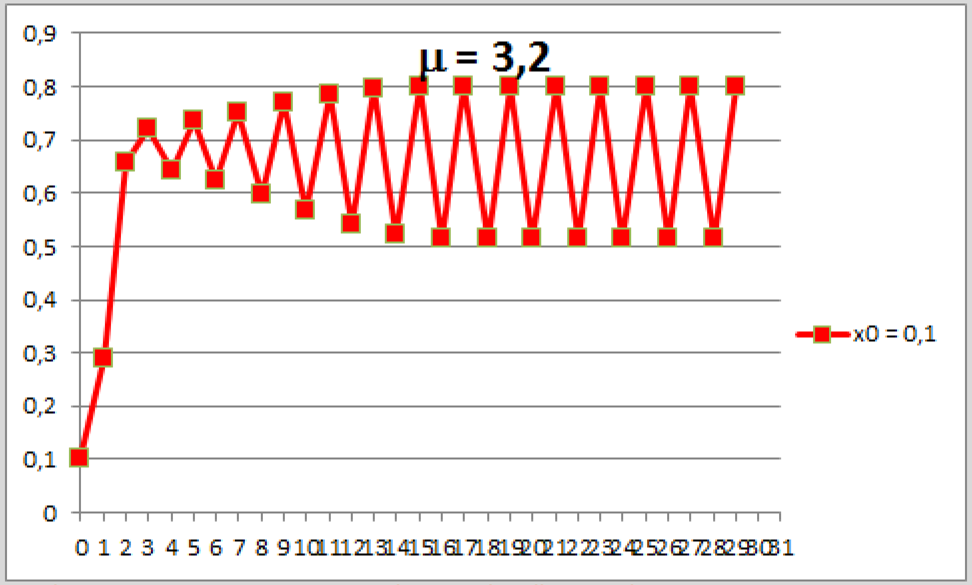
[*] exemple type de complexité de comportement lié à une non-linéarité (λογιστης = celui qui calcule)

## Retour sur les bifurcations

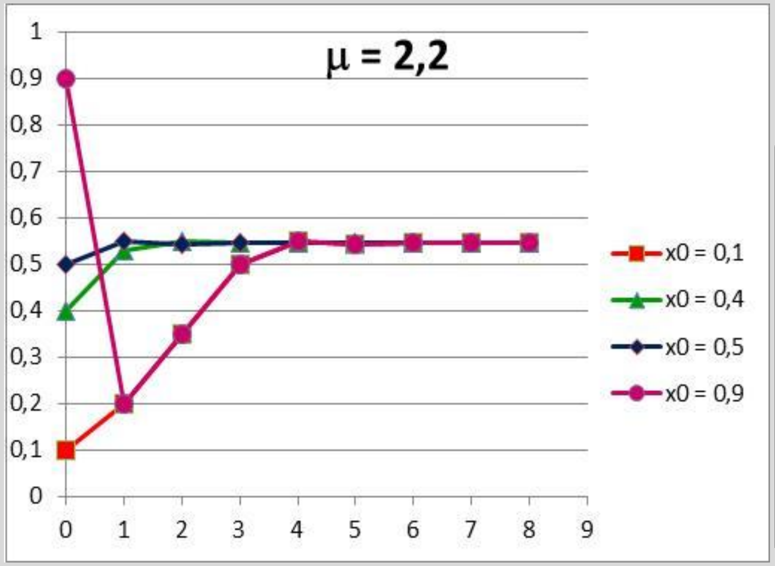
- **Suite logistique $x_{n+1} = \mu\, x_n\, (1 - x_n)$ [*]**
- **Quand on calcule bêtement, à la main, ou avec une HP 11C (si, si, ça existe encore), ou avec Excel, les termes un à un, $x_0$ étant arbitrairement choisi entre 0 et 1 :**
  - **ex. pour $\mu = 2{,}8$, $x_0 = 0{,}5$ : $x_1 = 0{,}7$ ; $x_2 = 0{,}588$… ; ….**
  - **on trouve que $x_n$ tend vers une limite fonction de $\mu$, tant que $\mu$ ne dépasse pas 3**
  - **au-delà, $x_n$ tend vers 2 limites elles aussi fonctions de $\mu$ - *et ça n'est pas fini…***

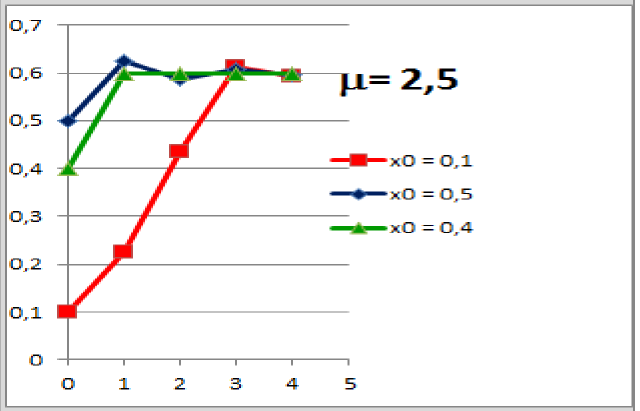


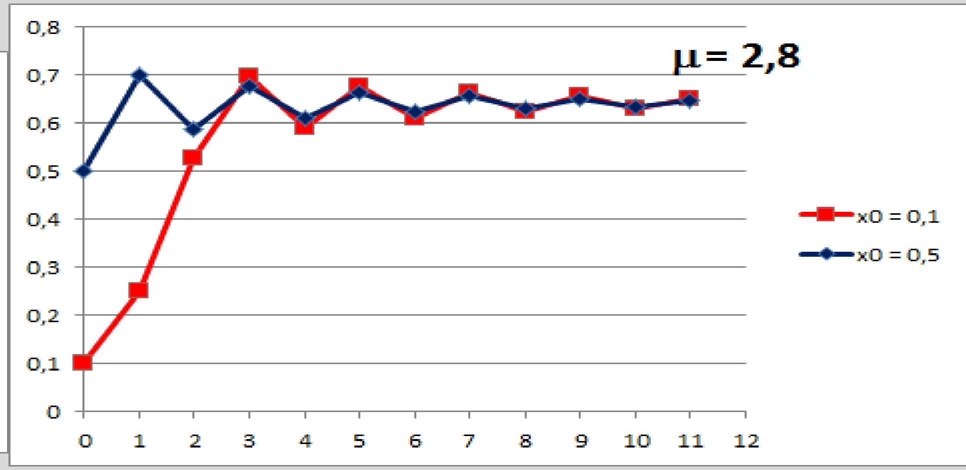



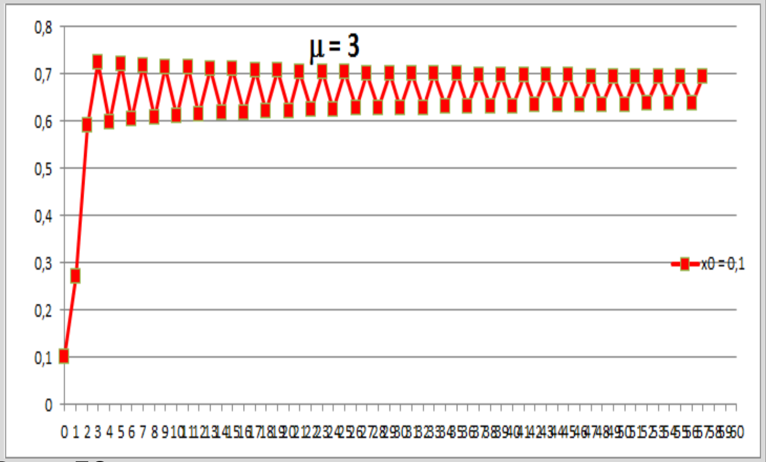



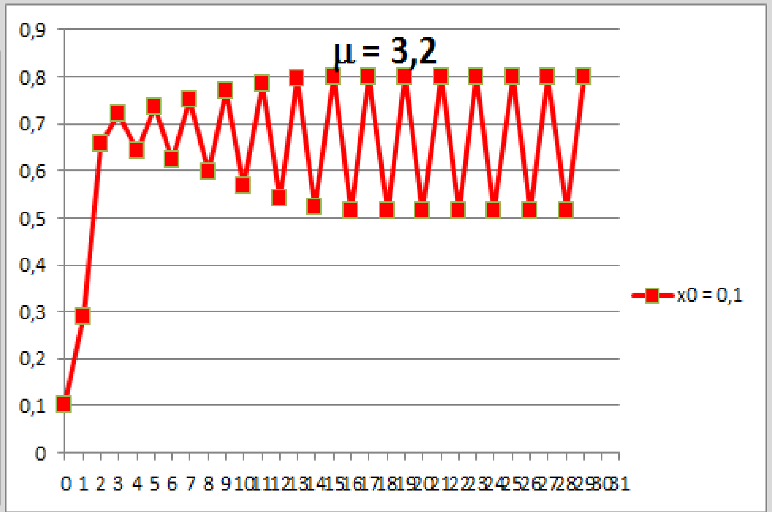
# Systèmes chaotiques - suite

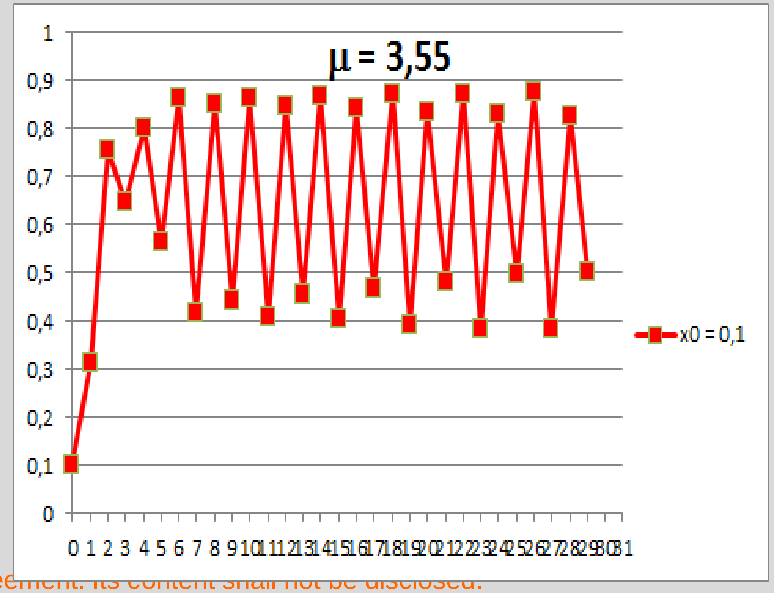


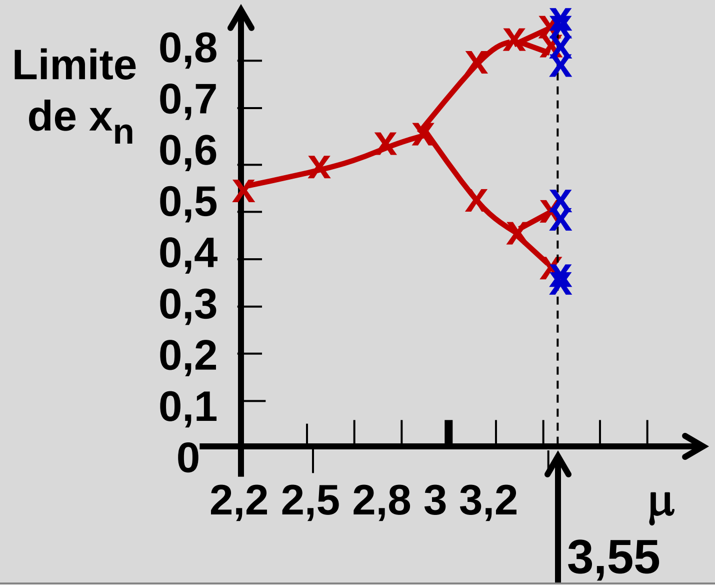



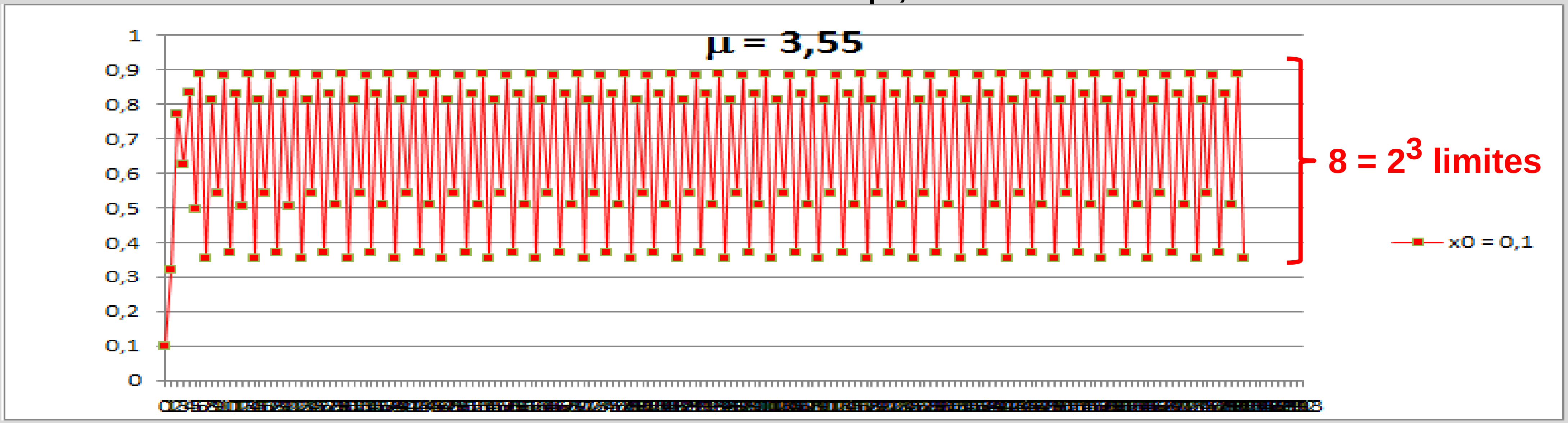
# Systèmes chaotiques - suite




$2^2$ limites si 3,449.. < $\mu$ < 3,54…

$2^1$ limites si 3 < $\mu$ < 3,449..

$2^0$ limite si $\mu$ < 3

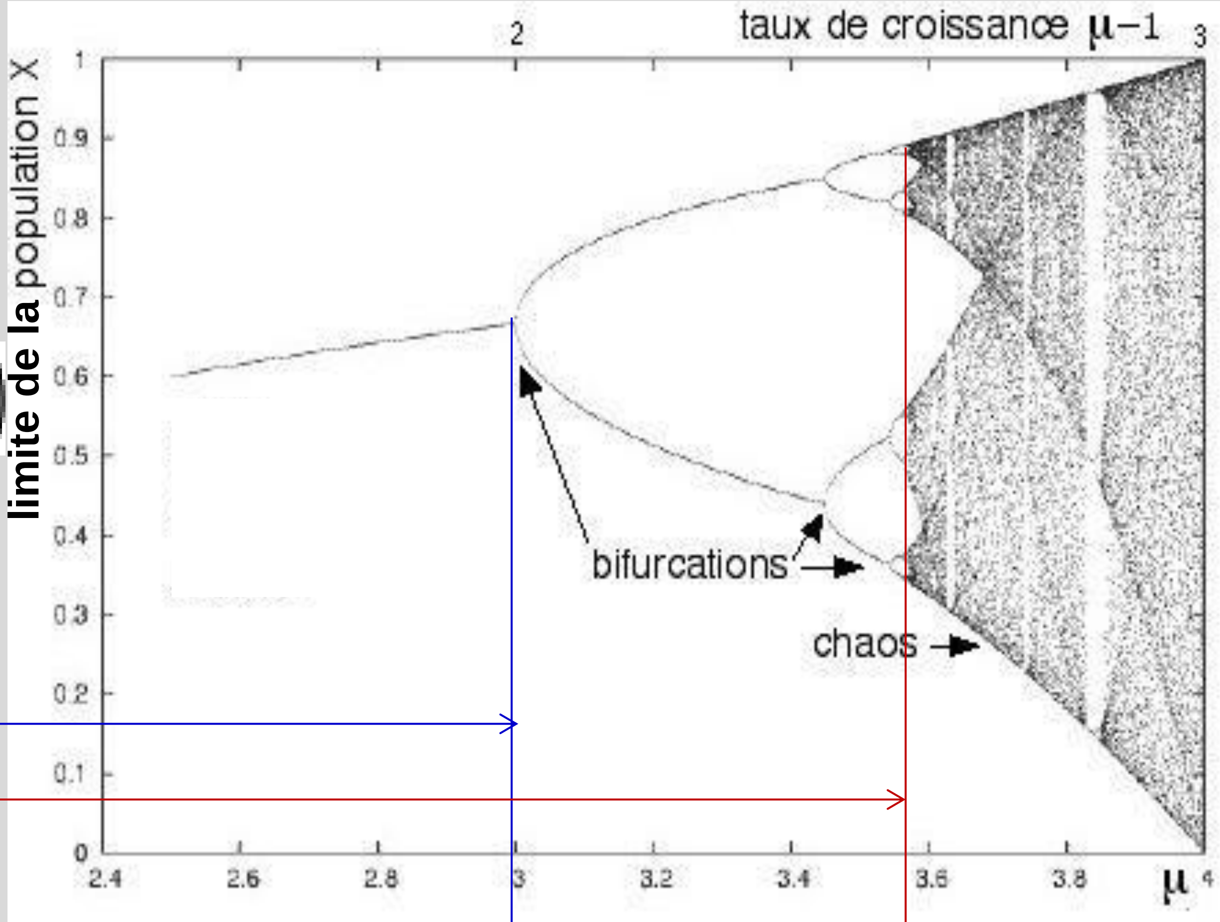


## Systèmes chaotiques - suite

- **Route vers le chaos**

**Suite Logistique**

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$




Route vers le chaos la plus courante : ***succession de bifurcations fourches*** **(séquence de Feigenbaum)**

**$\mu = 3$**

**$\mu = 3{,}5699456\ldots$**

**Point fixe attractif**

**Attracteur (orbite périodique)**

***En $\mu = 3{,}5699456\ldots$ Attracteur de Feigenbaum fractal (non étrange)***

- ***L'apparition du chaos mathématique n'est nullement liée à la complexité !***

# Systèmes chaotiques - suite

- **Calculs élémentaires**

**La limite de la suite**

$x_{n+1} = \mu\, x_n\, (1 - x_n)$

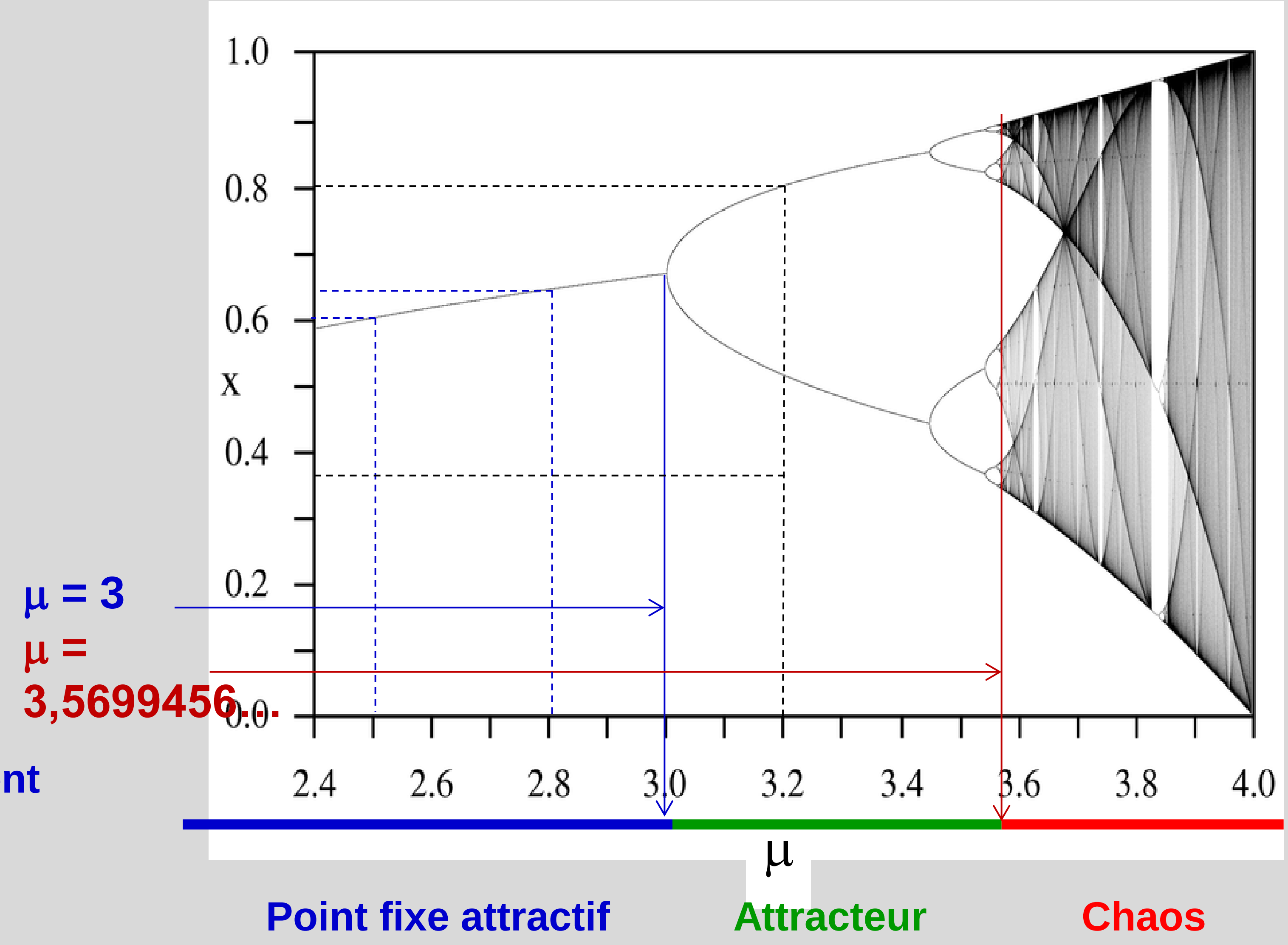
**est** $L = (\mu - 1)/\, \mu$

| $\mu$ | L |
|---|---|
| 2,4 | 0,5833..33.. |
| 2,5 | 0,6 |
| 2,8 | 0,642857… |
| 3 | 0,6666… |

**(valable si $\mu \leq 3$)**

**Au-delà de $\mu = 3$, et jusqu'à $\mu = 1 + \sqrt{6}$, le calcul élément par élément conduit à 2 limites :**

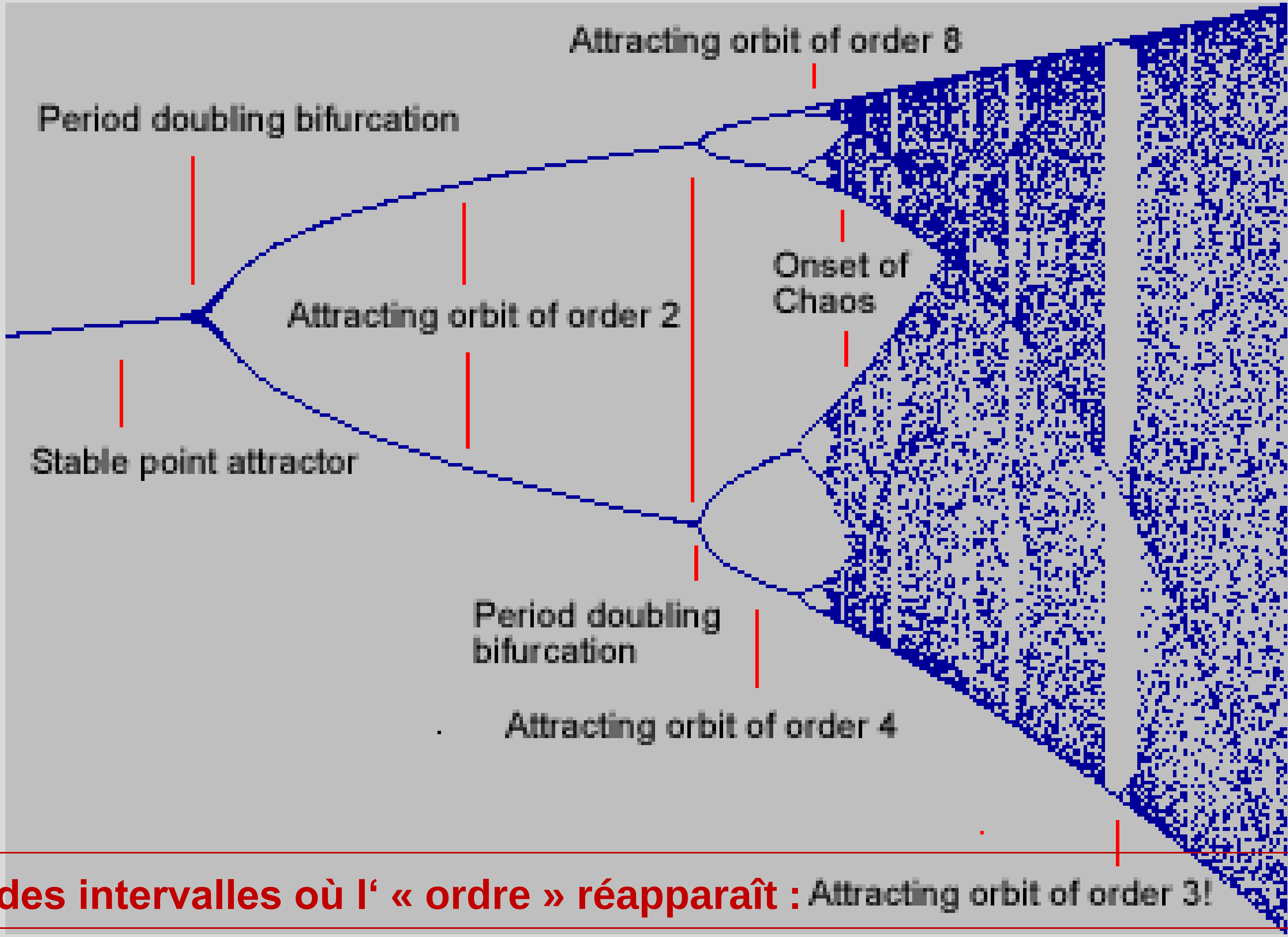
**ex. $\mu = 3{,}2$ : 0,513044509 et 0,799455491**




- **Moins élémentaire :** entre $\mu = 1 + \sqrt{6}$ (3,449489...) et $\mu = 3{,}544090$… la limite oscille entre 4 valeurs, au-delà ($\mu \geq 3{,}564407$…) entre 8 valeurs, puis ($\mu \geq 3{,}569891$…) 16, puis 32… ; le chaos s'installe à partir de $\mu = 3{,}5699456$…

# Systèmes chaotiques - suite

## ❑ Logistique - suite

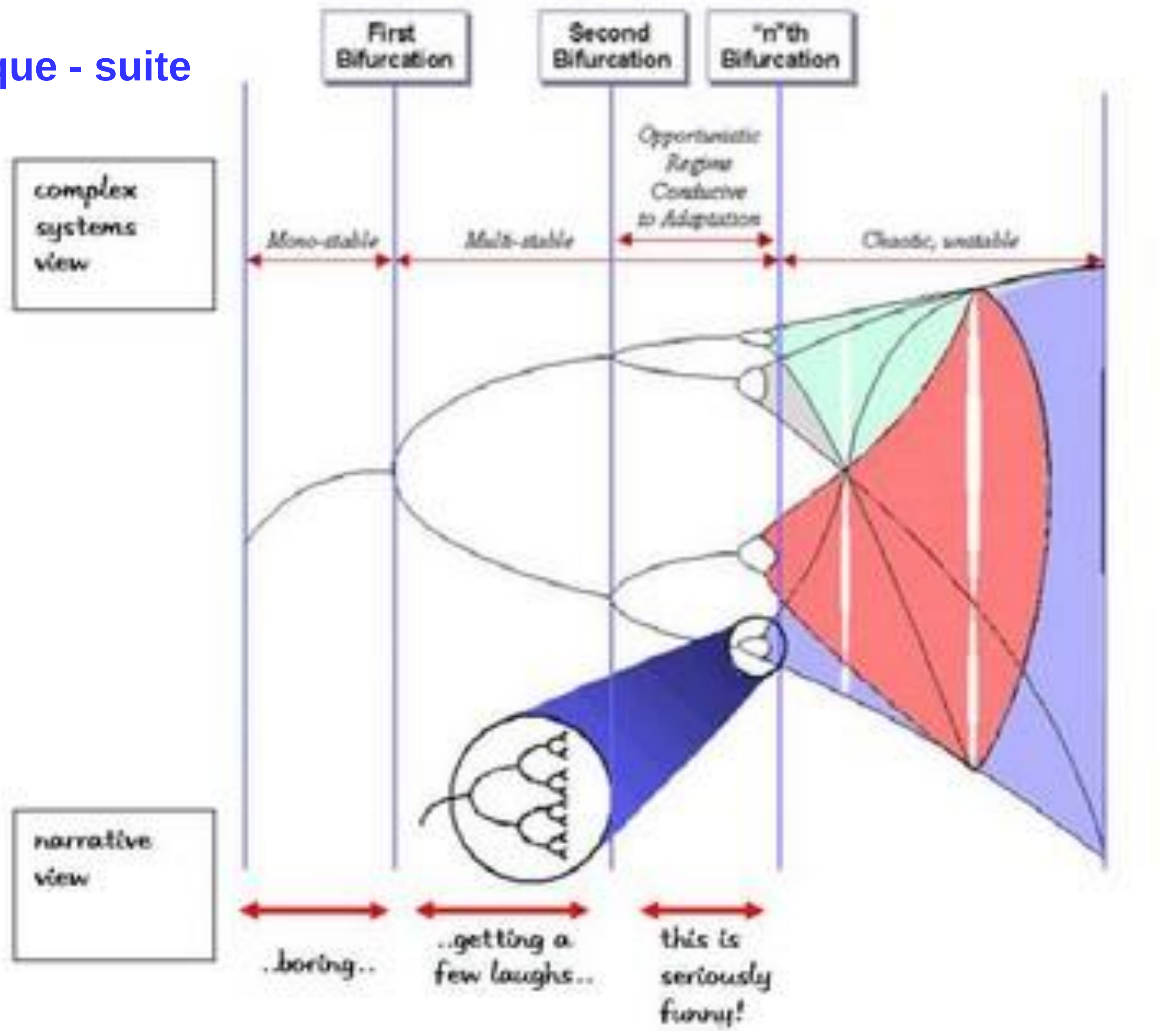



**On retrouve des intervalles où l‘ « ordre » réapparaît :** Attracting orbit of order 3! **$\mu$ = 3,82…**

PatSys

# Systèmes chaotiques - suite

- **Logistique - suite**

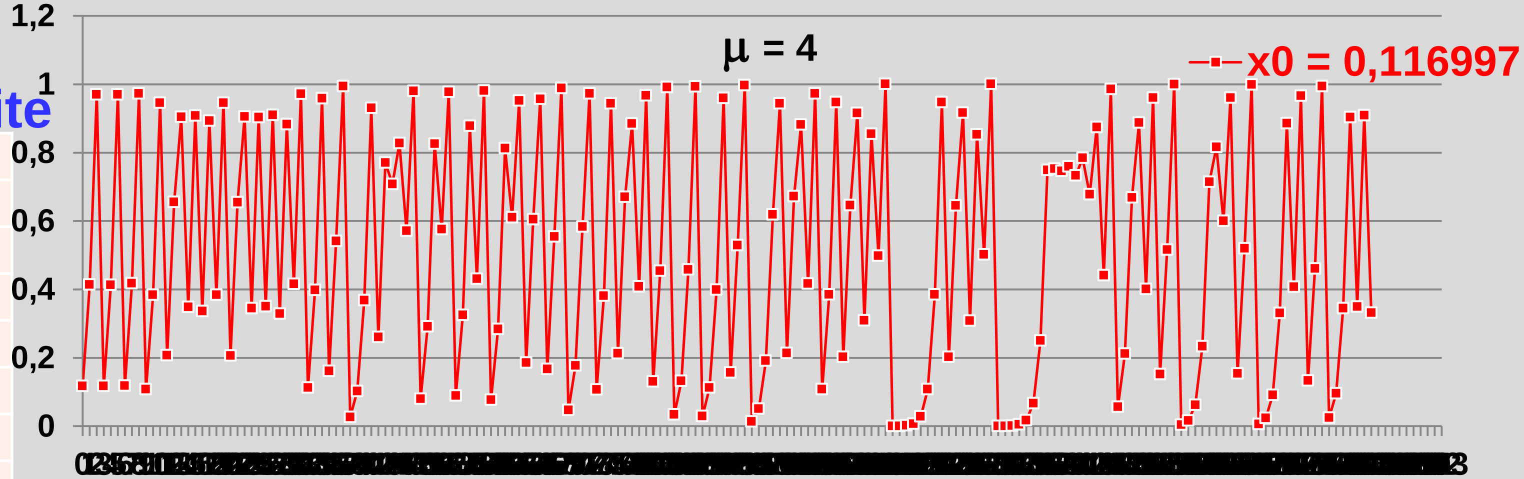


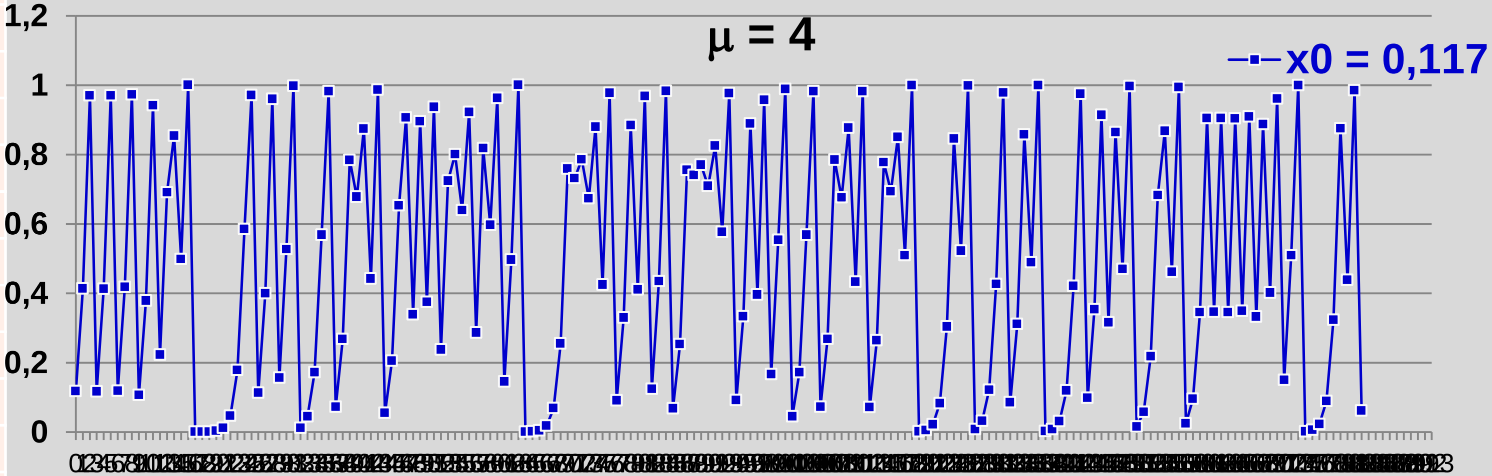
# Systèmes chaotiques - suite

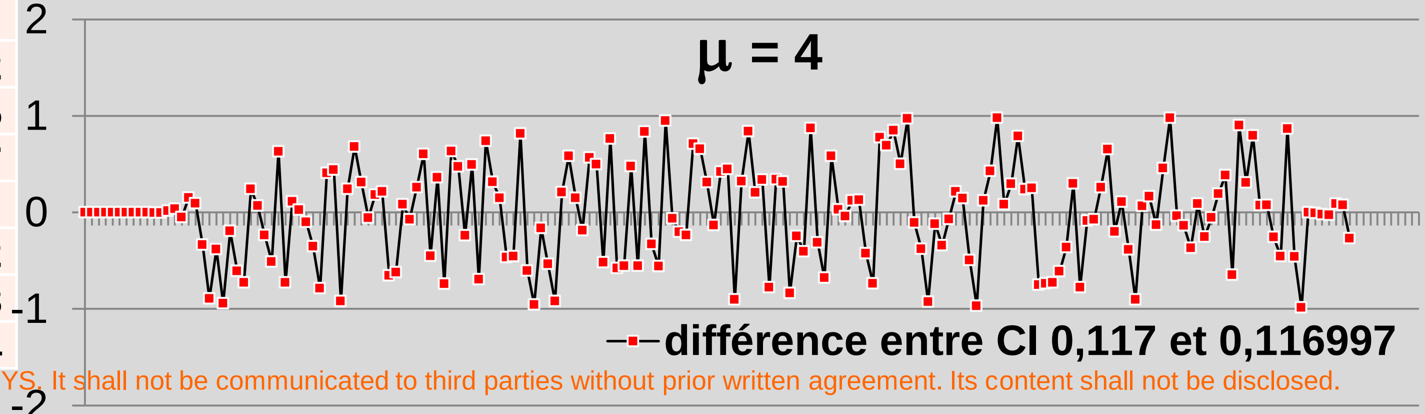
**Erreur de $2{,}6\ 10^{-5}$**

- **Logistique - suite**

| n | x n | n | x n |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,116997 | 0 | 0,117 |
| 1 | 0,4132348 | 1 | 0,413244 |
| 2 | 0,9698872 | 2 | 0,9698936 |
| 3 | 0,1168241 | 3 | 0,1168001 |
| 4 | 0,4127048 | 4 | 0,4126313 |
| 5 | 0,9695182 | 5 | 0,9694668 |
| 6 | 0,1182107 | 6 | 0,1184036 |
| 7 | 0,4169478 | 7 | 0,4175369 |
| 8 | 0,9724093 | 8 | 0,9727993 |
| 9 | 0,1073178 | 9 | 0,1058431 |
| 10 | 0,3832027 | 10 | 0,3785615 |
| 11 | 0,9454335 | 11 | 0,9410107 |
| 12 | 0,2063559 | 12 | 0,2220381 |
| 13 | 0,6550925 | 13 | 0,6909488 |
| 14 | 0,9037853 | 14 | 0,8541543 |
| 15 | 0,3478297 | 15 | 0,4982991 |
| 16 | 0,9073768 | 16 | 0,9999884 |
| 17 | 0,3361766 | 17 | 4,629E-05 |
| 18 | 0,8926476 | 18 | 0,0001852 |
| 19 | 0,3833114 | 19 | 0,0007405 |
| 20 | 0,9455351 | 20 | 0,0029597 |
| 21 | 0,2059939 | 21 | 0,0118039 |
| 22 | 0,6542417 | 22 | 0,0466582 |
| 23 | 0,904838 | 23 | 0,1779248 |
| 24 | 0,3444247 | 24 | 0,5850704 |

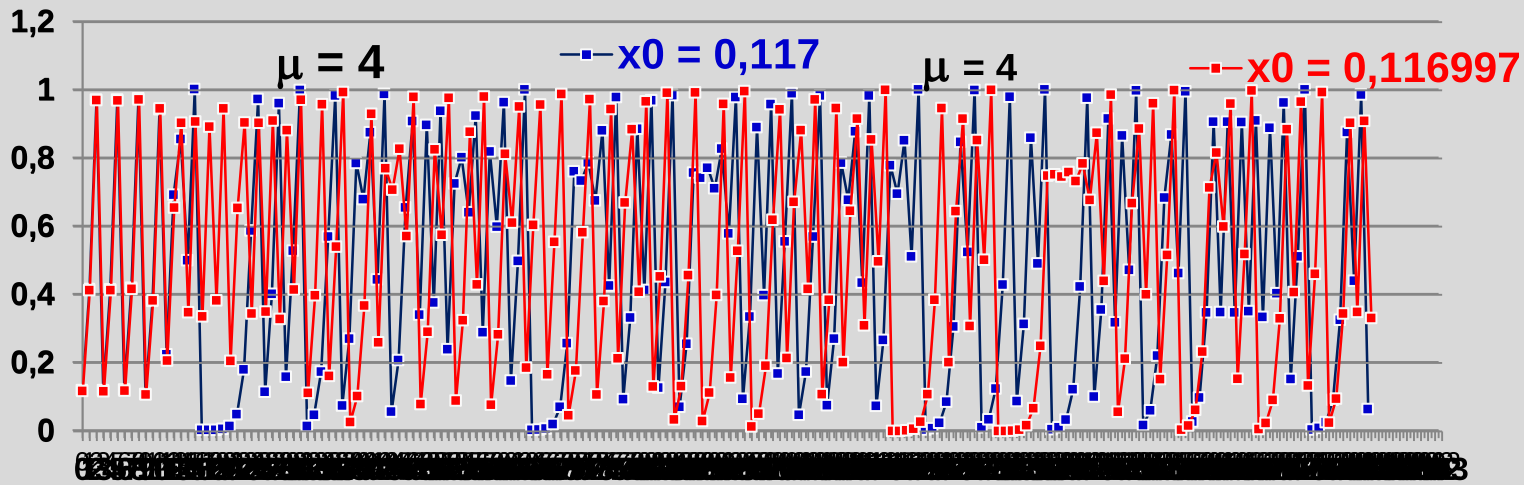


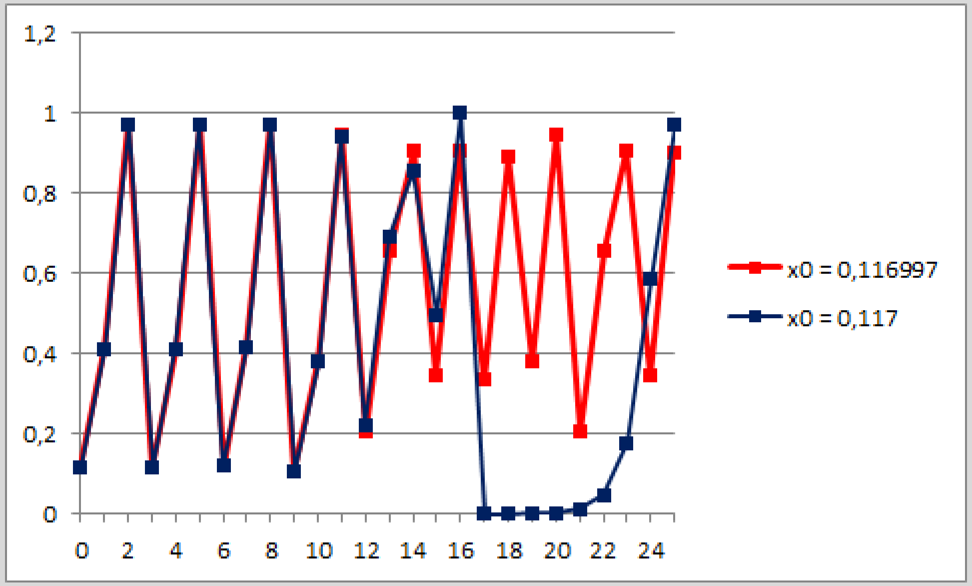



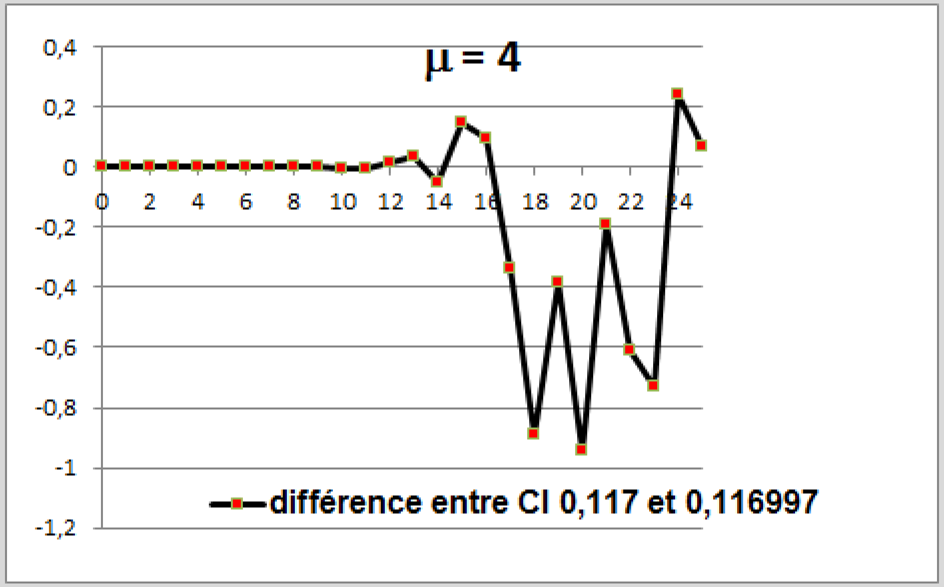



## Systèmes chaotiques - suite

- **Logistique - suite**

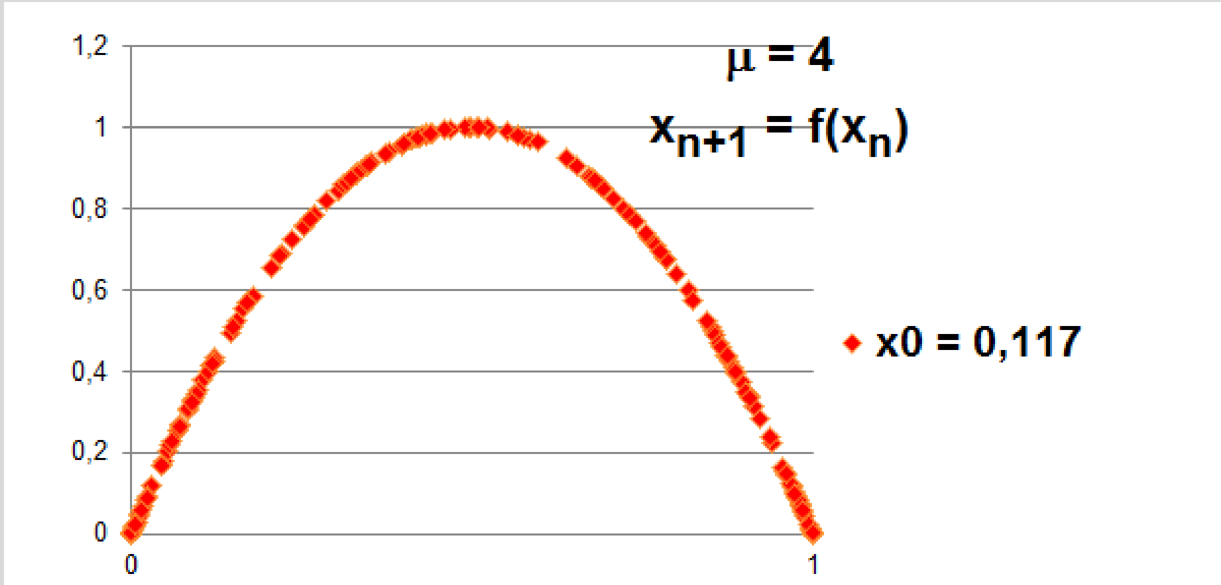


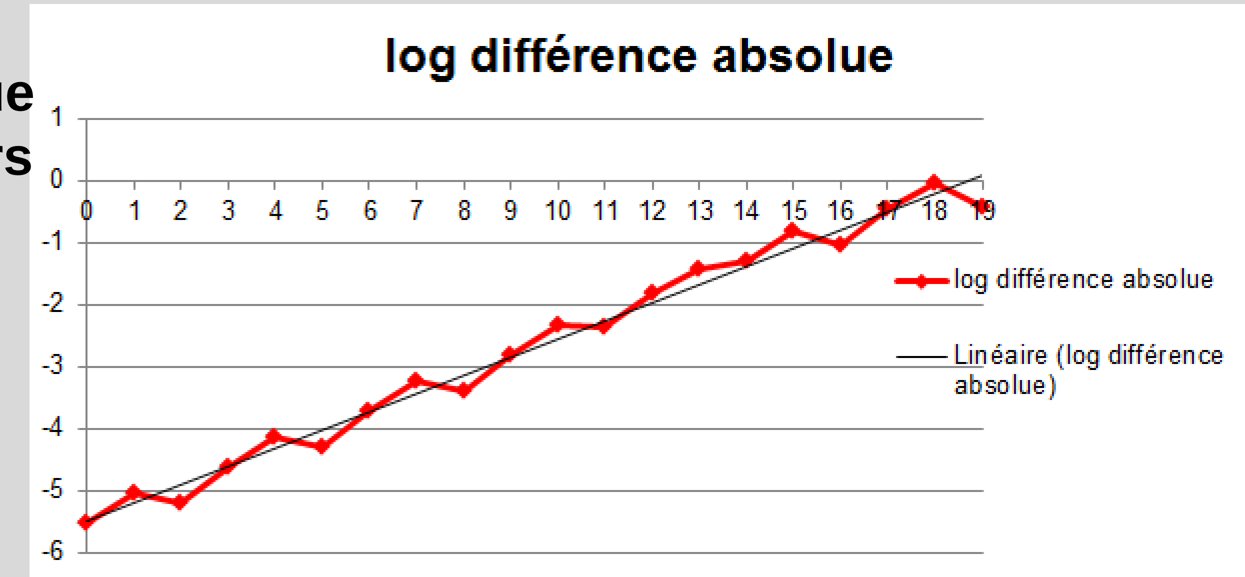
# Systèmes chaotiques - suite

- **Logistique – fin**
  - **Aléatoire, avec la troncature x0 = 0,117 ?**

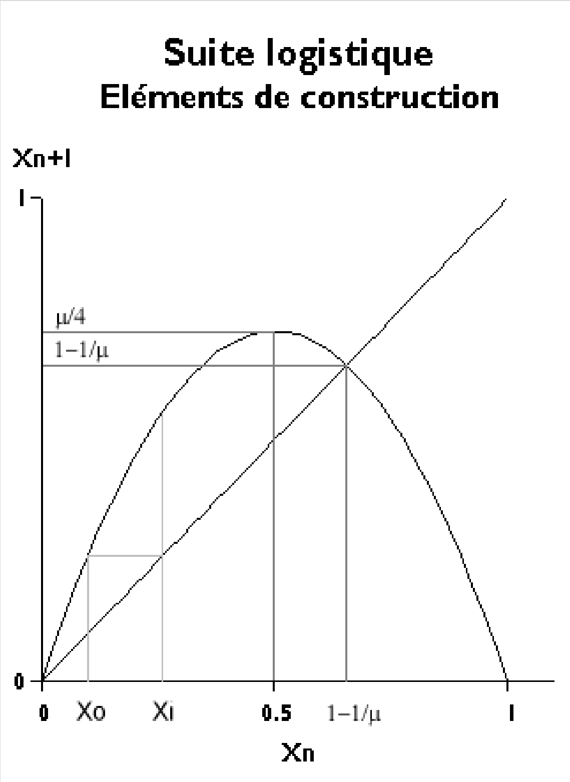


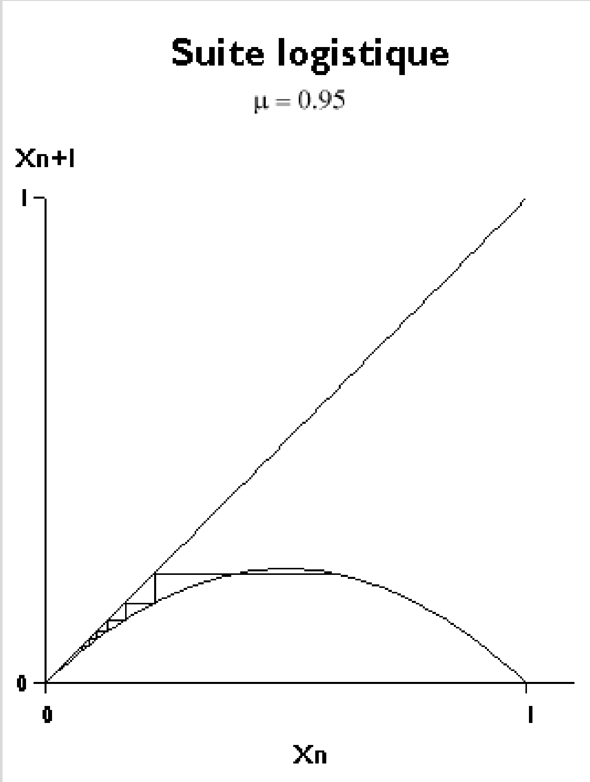

**C'est toujours la**
**Suite logistique $x_{n+1} = \mu\, x_n\,(1 - x_n)$**
**avec $\mu = 4$ !**

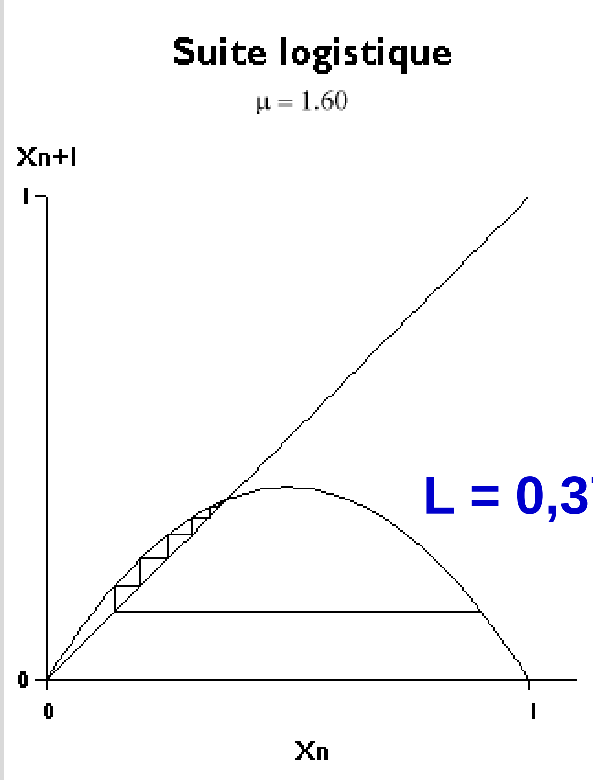
  - **Evolution de la valeur absolue de la différence entre les valeurs des 2 suites**



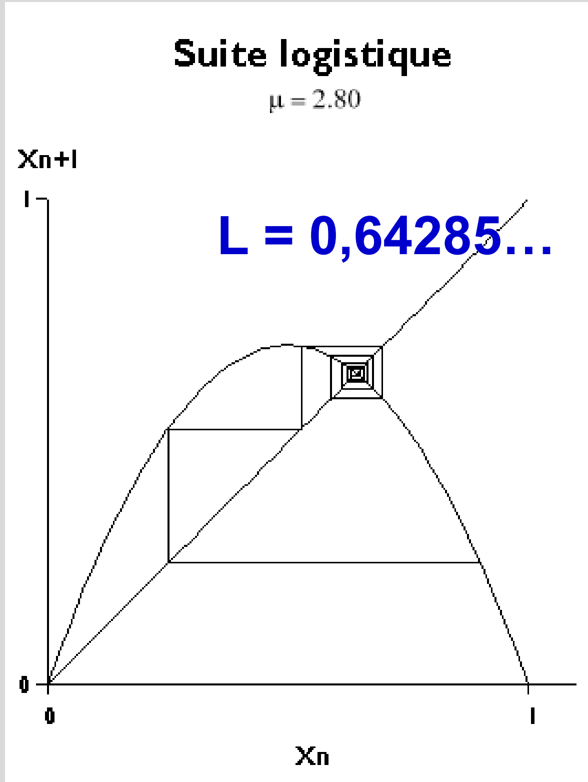

**La différence est multipliée par 10 tous les 4 pas**
**(« *temps caractéristique* »)**

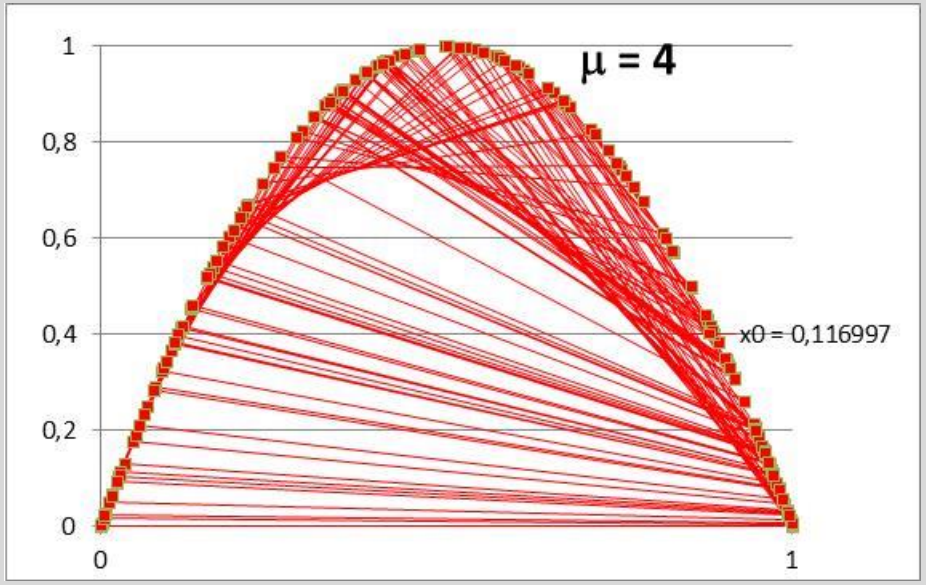

Suite logistique
Eléments de construction
Xn+l
l
μ/4
1−1/μ
0
0
Xo
Xl
0.5
1−1/μ
l
Xn

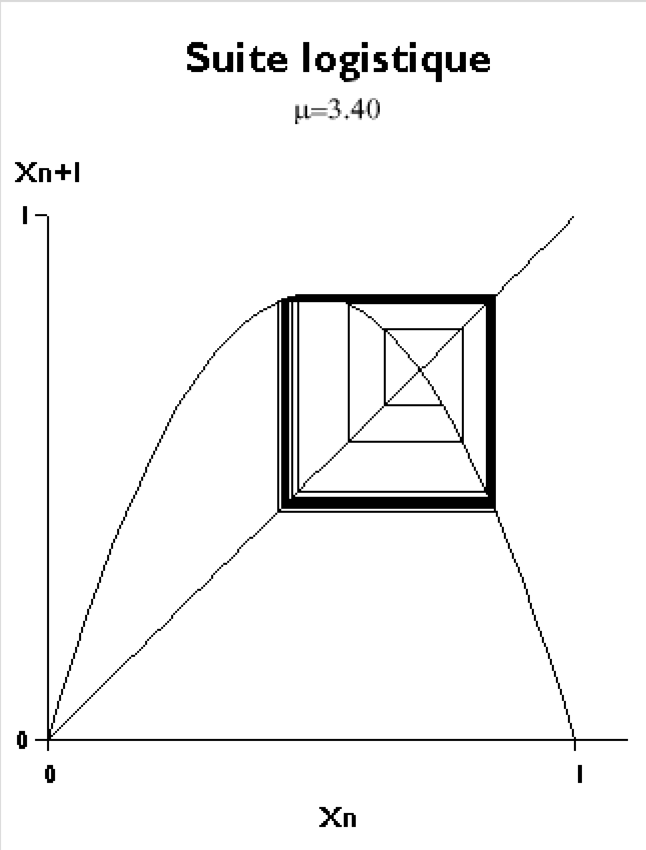

Suite logistique
μ = 0.95
Xn+l
l
0
0
l
Xn

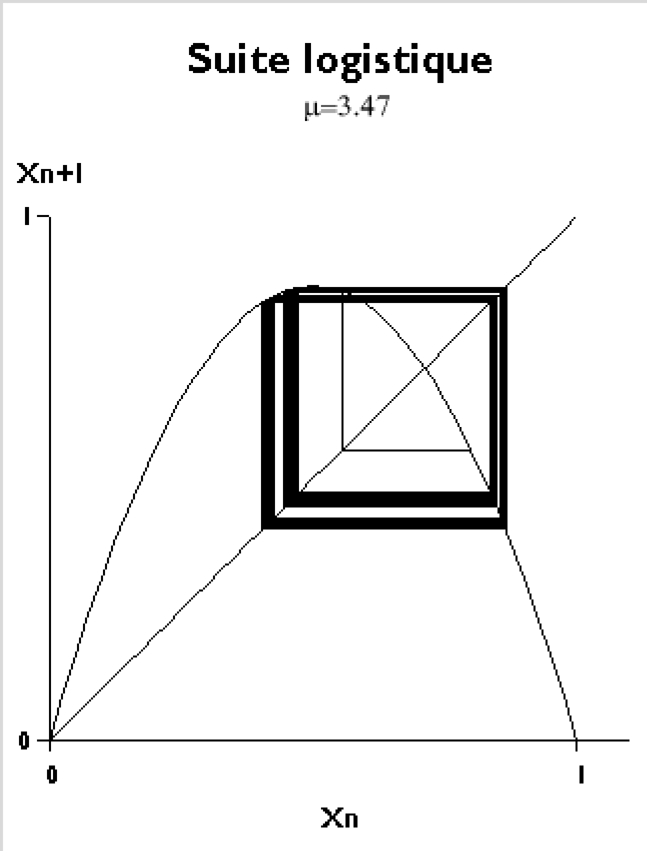

Suite logistique
μ = 1.60
Xn+l
l
0
0
l
Xn

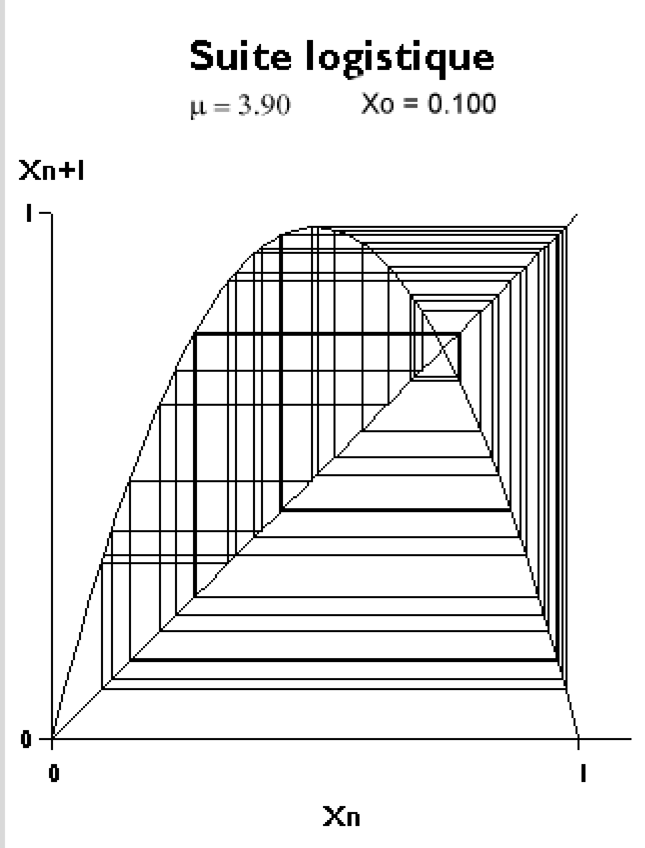
L = 0,375


Suite logistique
μ = 2.80
Xn+l
l
L = 0,64285…
0
0
l
Xn

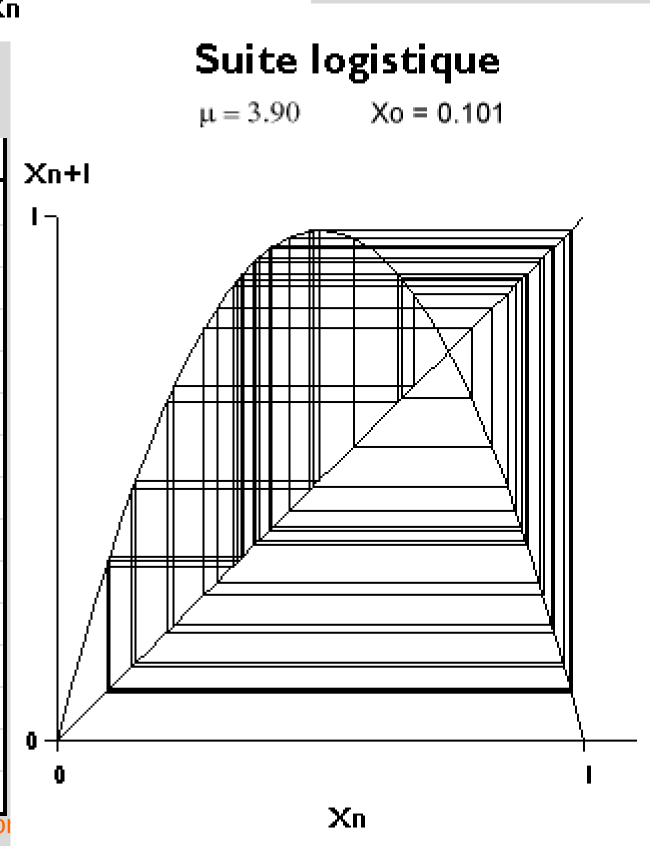

μ = 4
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
1
x0 = 0,116997



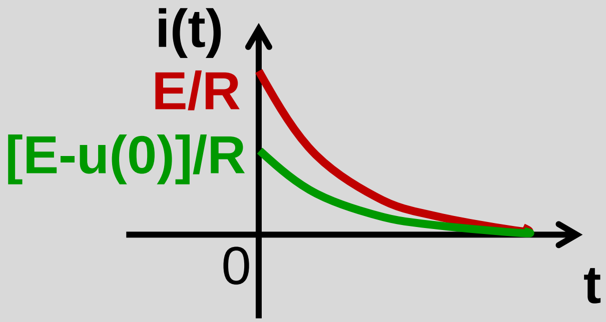



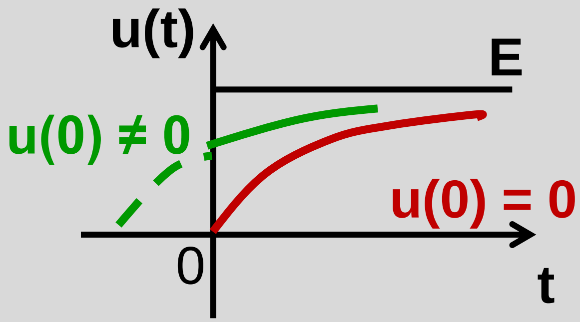

| | mu = 3,9 | |
|---|---|---|
| n | x n | x n |
| 0 | 0,1 | 0,101 |
| 1 | 0,351 | 0,354116 |
| 2 | 0,888416 | 0,892 |
| 3 | 0,386618 | 0,375711 |
| 4 | 0,924864 | 0,914754 |
| 5 | 0,271013 | 0,304119 |
| 6 | 0,770504 | 0,825359 |
| 7 | 0,689628 | 0,562151 |
| 8 | 0,83476 | 0,959935 |
| 9 | 0,537949 | 0,149992 |
| 10 | 0,969384 | 0,497228 |
| 11 | 0,115748 | 0,97497 |
| 12 | 0,399167 | 0,095174 |
| 13 | 0,935348 | 0,335851 |



# Systèmes chaotiques – suite : Sensibilité aux Conditions Initiales

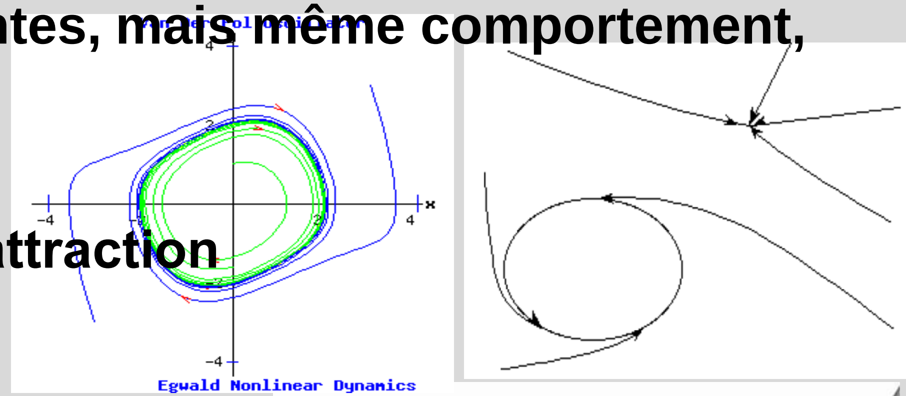
- ## Systèmes Linéaires
  - **Sensibilité quantitative (évolutions différentes, mais même comportement)**



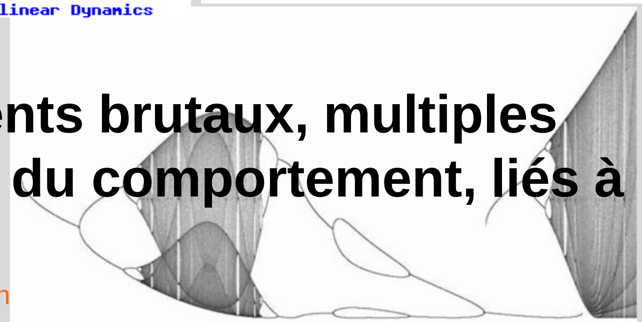




- ## Systèmes Non-Linéaires non Chaotiques, non sujets à Bifurcations
  - **Sensibilité quantitative (évolutions différentes, mais même comportement, des trajectoires vers les attracteurs)**
  - **Insensibilité des attracteurs aux CI…**
  - **…Mais il peut y avoir plusieurs bassins d'attraction**

    **$\Rightarrow$ sensibilité qualitative**




- ## Systèmes à Bifurcations et Chaotiques
  - **Sensibilité qualitative (donc quantitative) : changements brutaux, multiples (bifurcations) - voire infinis (chaos) - et imprévisibles du comportement, liés à la modification d'un paramètre**



# Systèmes chaotiques - suite

- **La métaphore du papillon : « petites causes, grands effets » ?**
  - **Conférence de Lorenz (1972) à l'*American Association for the Advancement of Science* « *Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set off a Tornado in Texas?* »**
  - **Le battement d'ailes du papillon ne provoque pas la tornade [*] mais induit sur le Système une différence de comportement dont l'effet est la tornade**
  - **la *différence de cause* (ici de conditions initiales) due à un battement d'ailes du papillon *induit* une *différence d'effet* qui est la tornade ; le battement d'ailes ne la provoque pas !**
  - **Battement d'ailes → Tornade**
    **→ Pas de tornade**

⇨ **Le battement d'ailes du papillon peut aussi empêcher la tornade !**

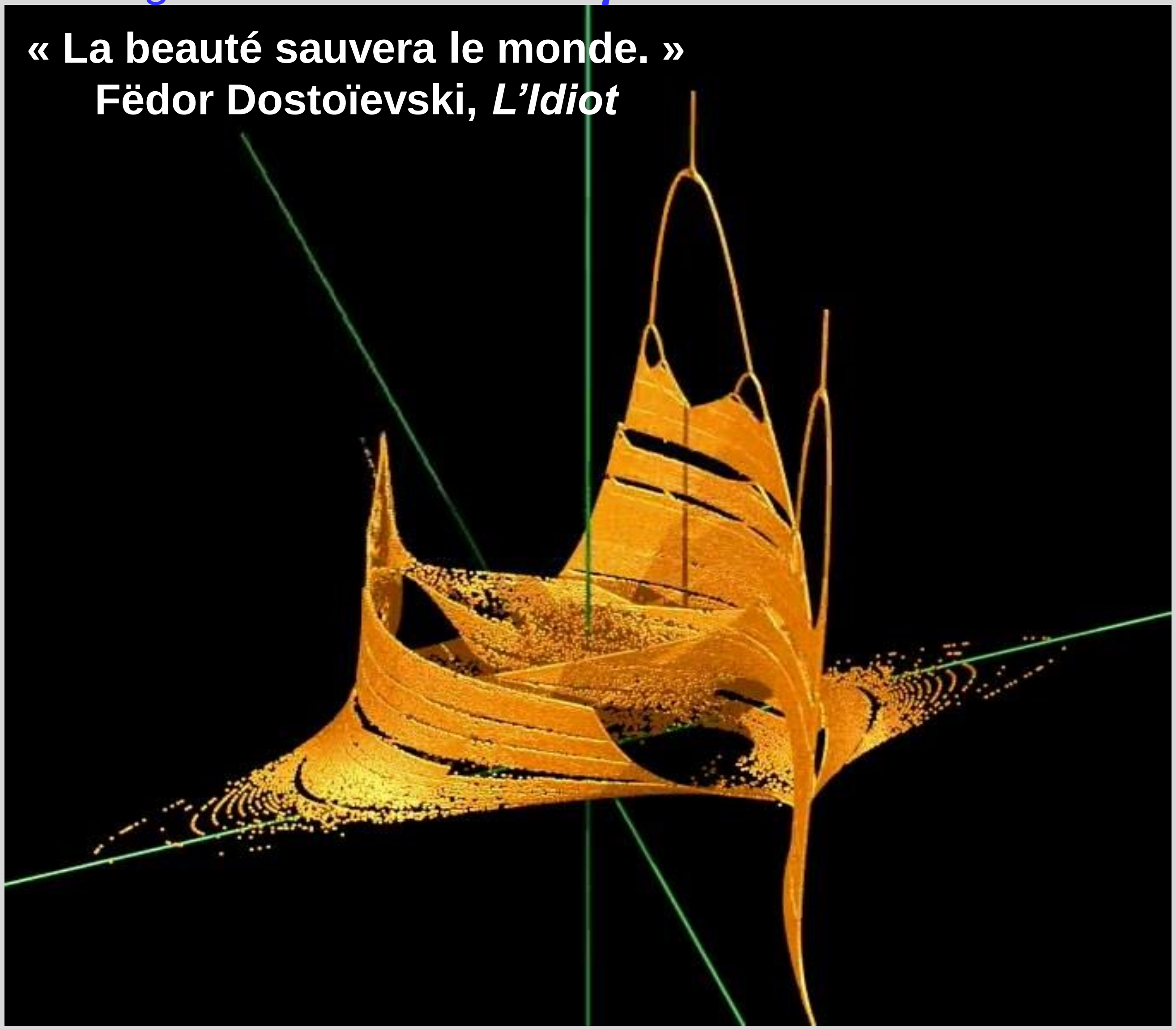
**[*] ce qui pourrait être vrai dans un Système Linéaire, cf. démarrage d'un oscillateur**

- Il est si simple de dire le temps, sans le modèle de Lorenz !

PatSys

# Systèmes chaotiques – suite et fin

- **Pour les math-addicts sévères et les esthètes (ce qui n'est pas incompatible), ce site du CNRS :** *images.math.cnrs.fr/**Sculptures-du-chaos**.html*



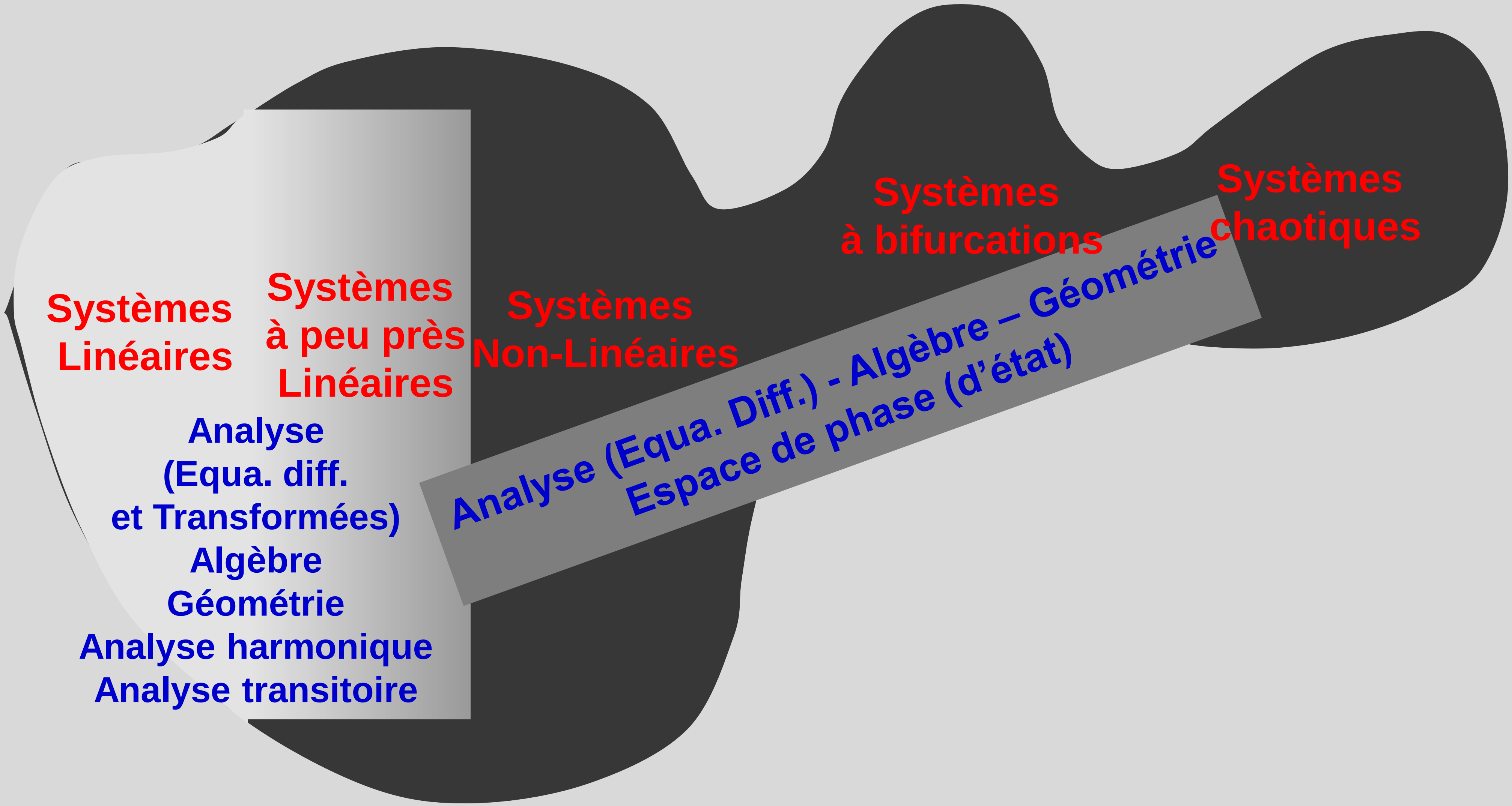

**Chaos économique :**
**Van der Pol + boucle de rétroaction**

***ou taper :***
***bifurcation Van der Pol***

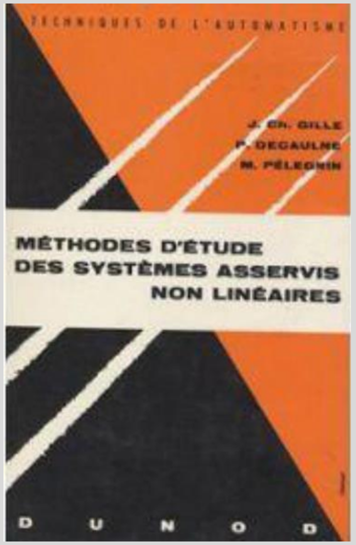
**et cliquer sur « *images* »**

PatSys

# Vous avez dit « En route vers le chaos ? »



## Bibliographie succincte sur le non-linéaire




- **Méthodes d'étude des systèmes asservis non-linéaires –**
  **J.-C. GILLE, P. DECAULNE, M. PELEGRIN, Dunod**

- **Etude des systèmes non-linéaires – Cours Master 2 : Commande robuste et systèmes non-linéaires – Frédéric LAUNAY**
  *www.lias-lab.fr/perso/**fredericlaunay**/Cours/RCA/Cours_Master.pdf*

- **Wikipedia : Système dynamique - Théorie du chaos – Suite logistique**

  ***Il n'y a pas que des math. dans ces références (il y a des explications et des interprétations en bon français),***

  ***mais il faut quand même***  ***aimer un peu les math…***

- **Le Chaos, Ivar Ekeland – Coll. Poche**
  ***Très lisible***

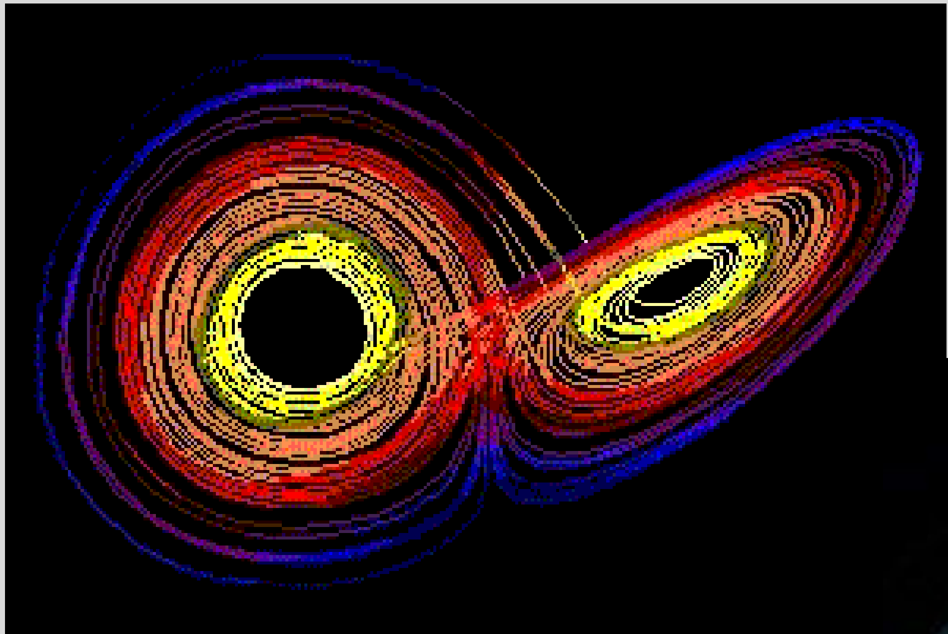
PatSys

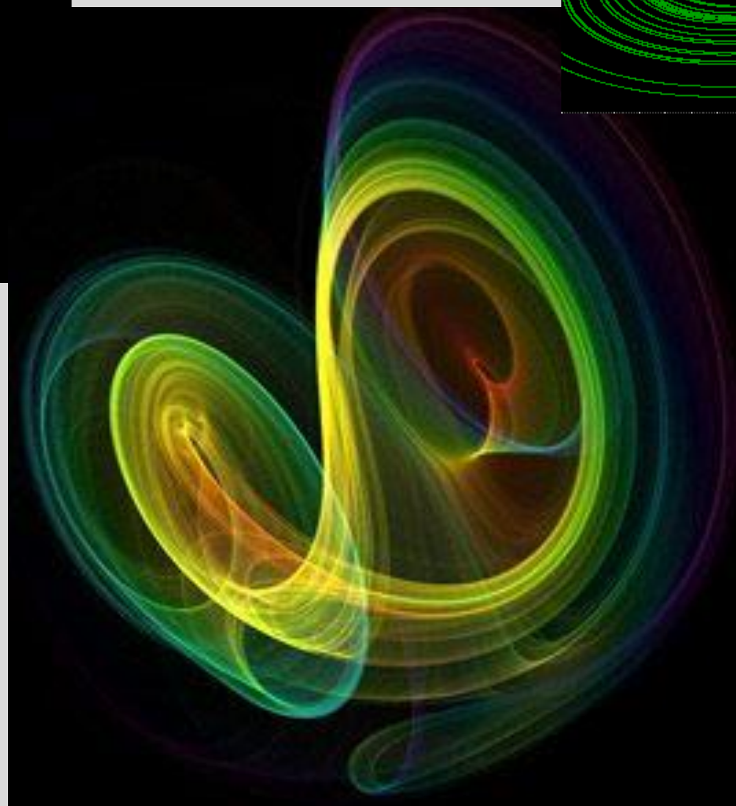
**Merci de votre attention.**

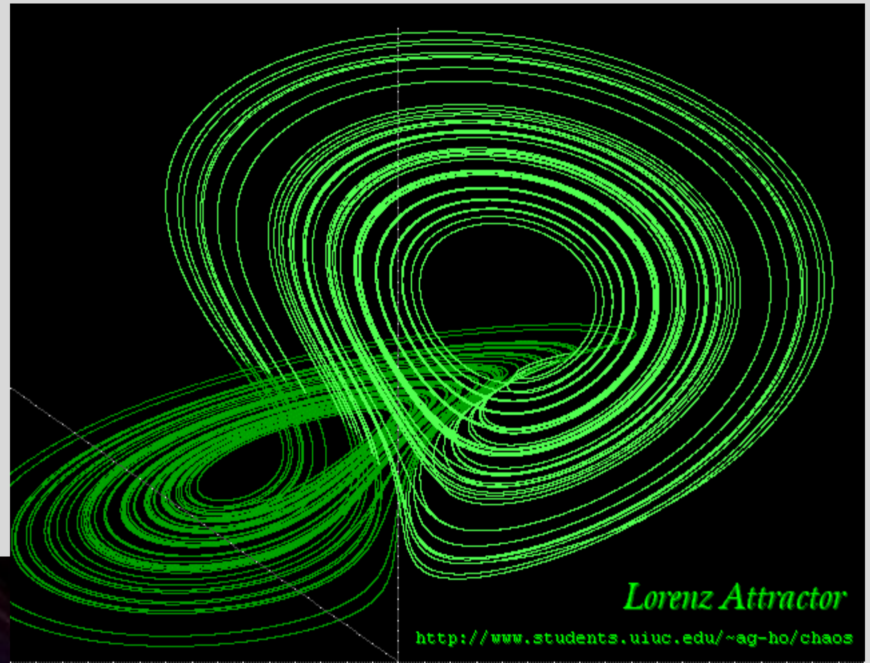
**A vous…**

- **Encore quelques quartiers de citron ?**

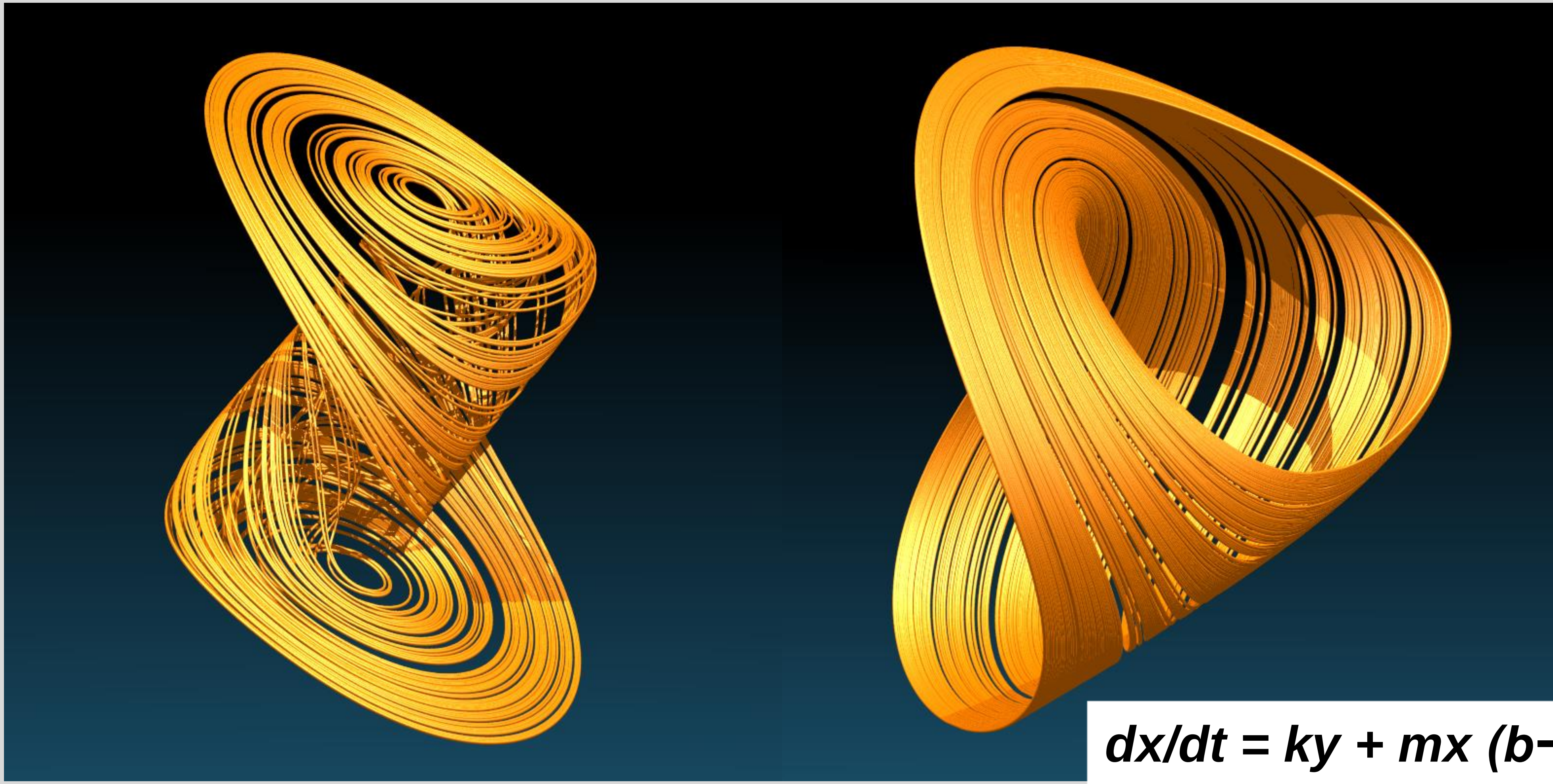
- Attracteur étrange de Lorenz





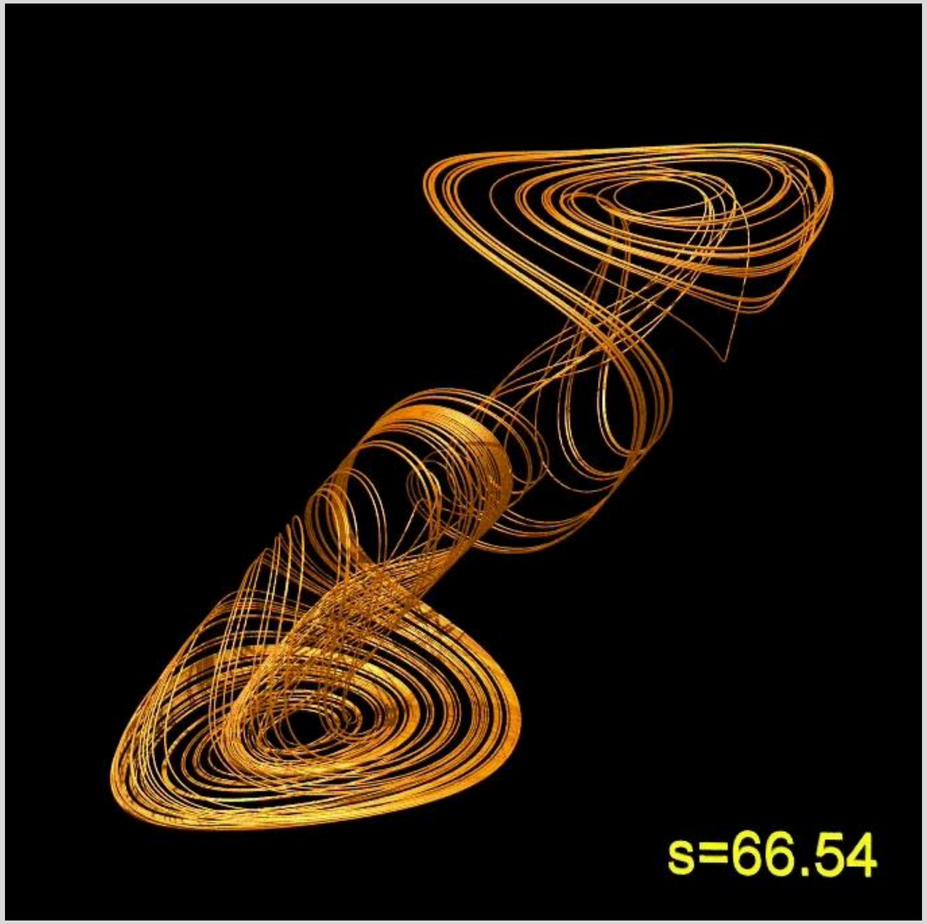


- Chaos économique : Van der Pol + boucle de rétroaction

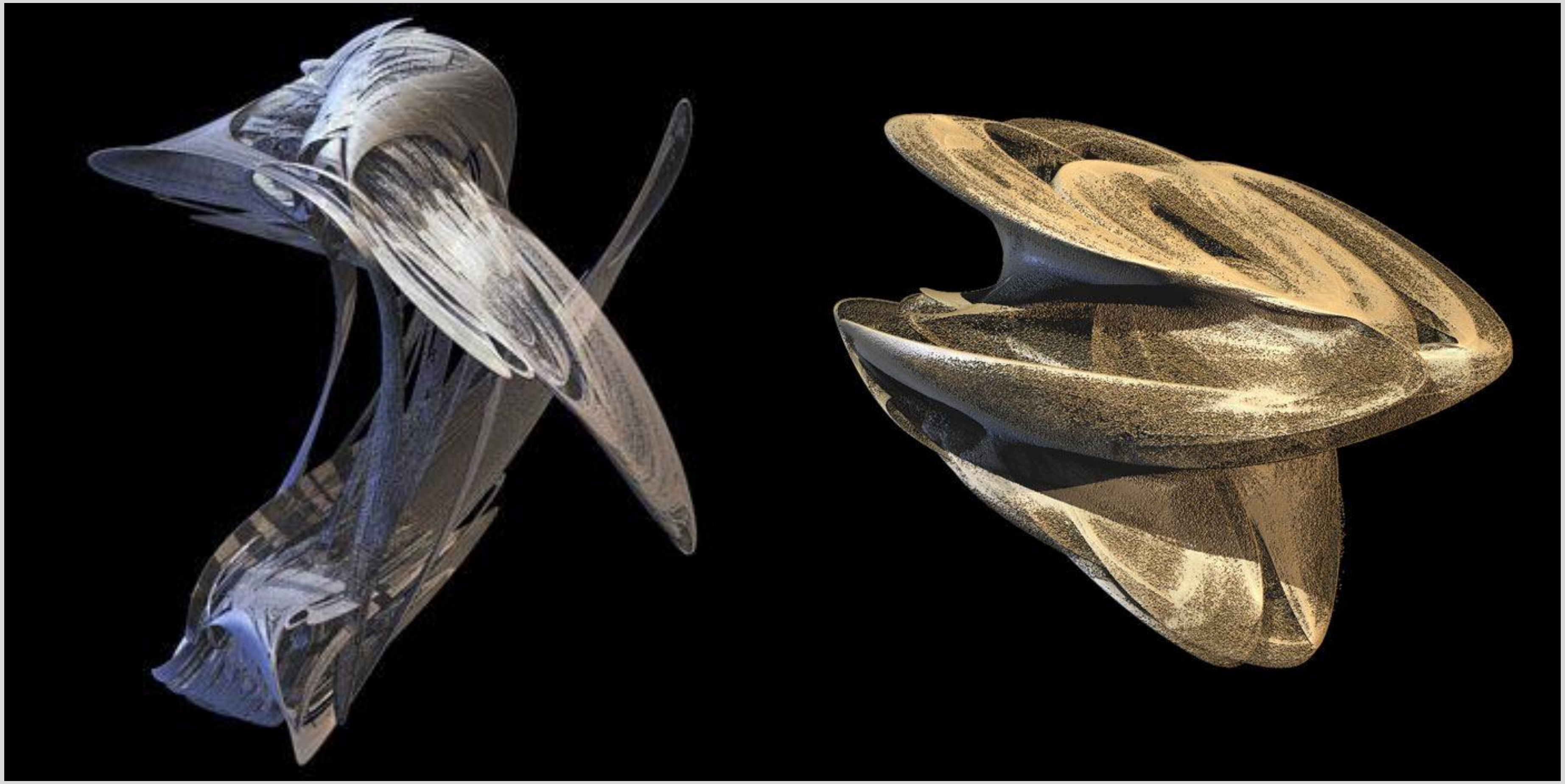


$$\frac{dx}{dt} = ky + mx\,(b - y^2)$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + sz$$
$$\frac{dz}{dt} = px - qy$$

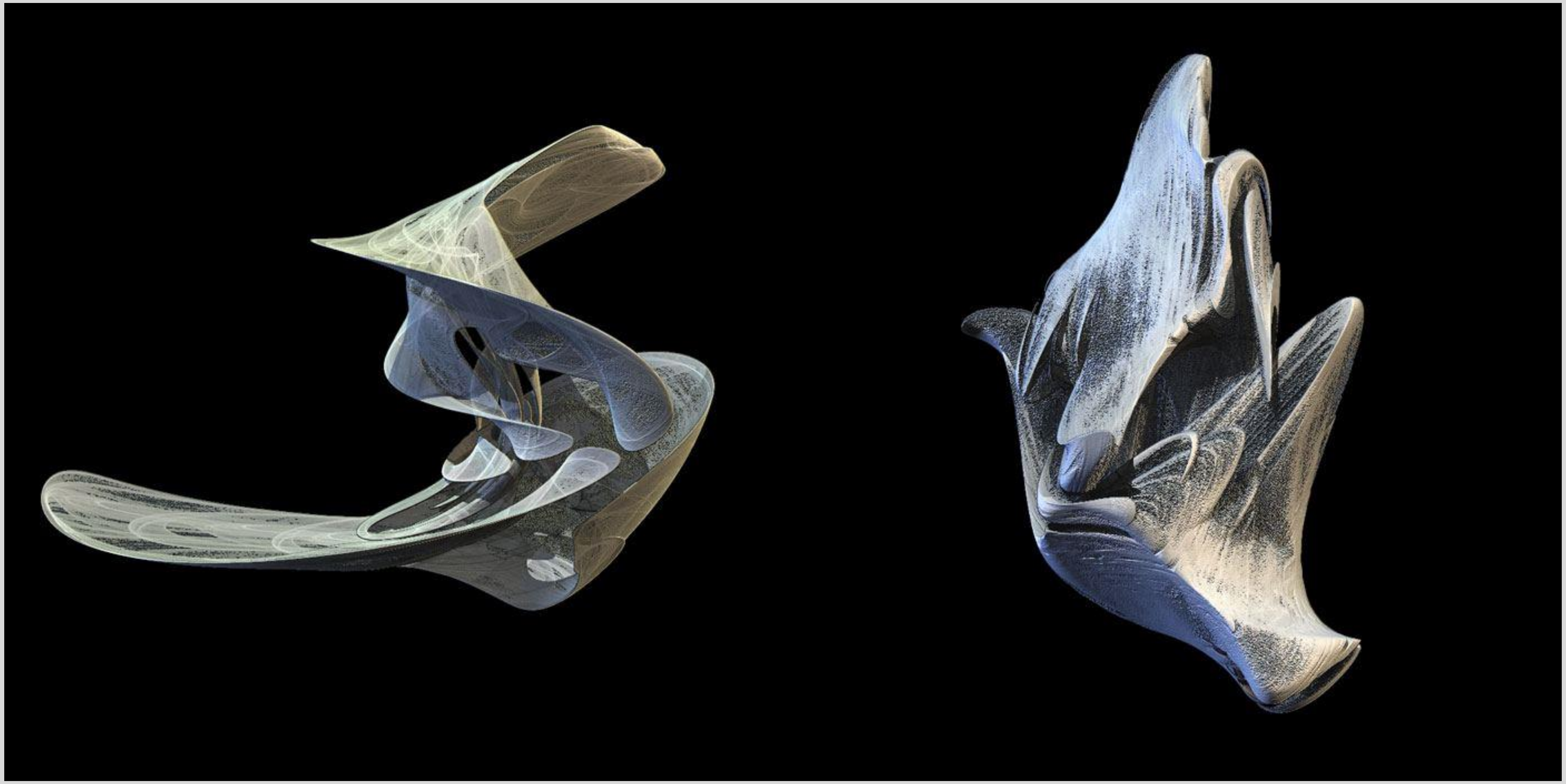
- Chaos économique : Van der Pol + boucle de rétroaction



- **Attracteur étrange de Hénon (1976) (orbites stellaires)**



- **Attracteur étrange de Hénon (1976) (orbites stellaires)**

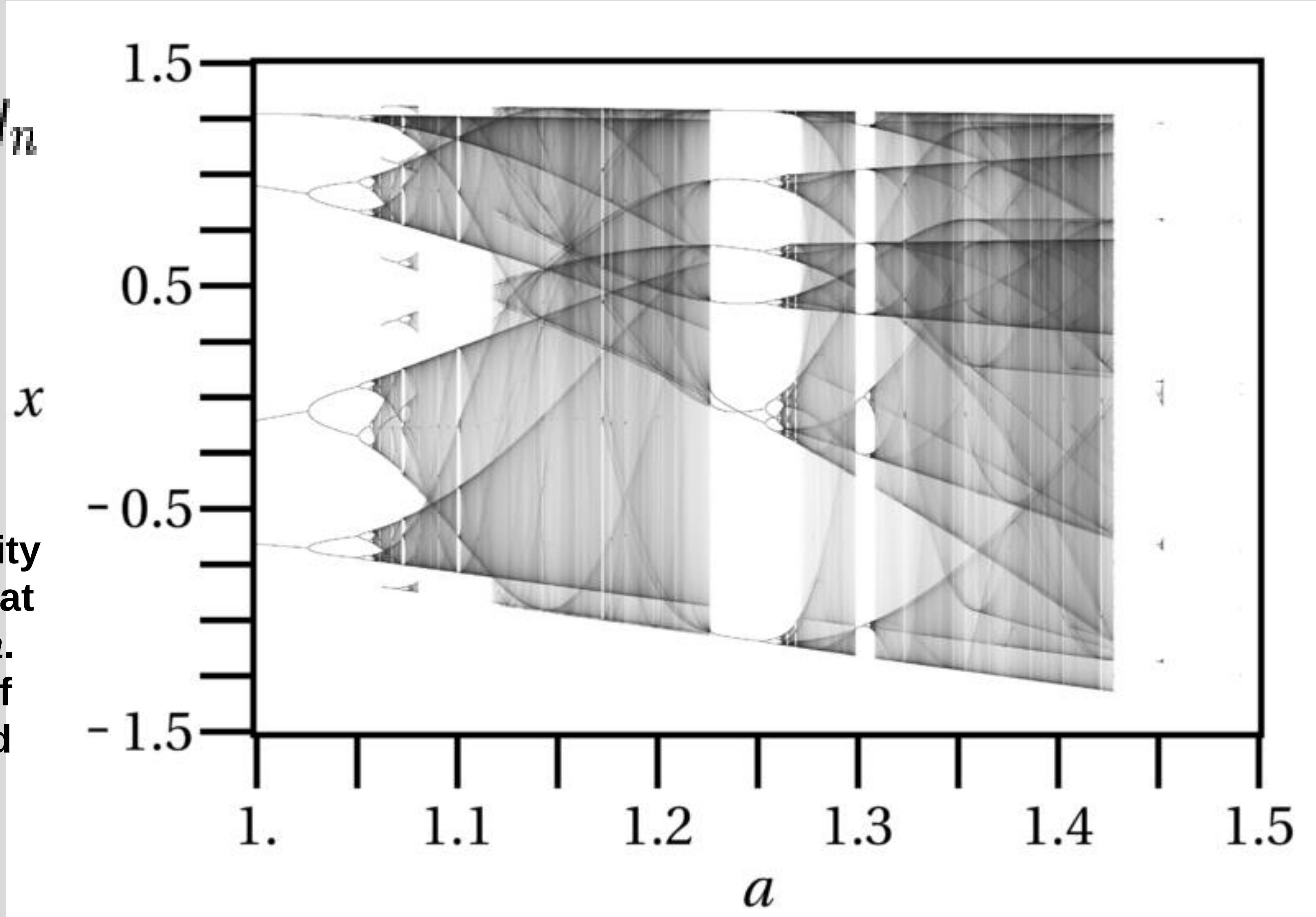


## Bifurcations de Hénon (1976)

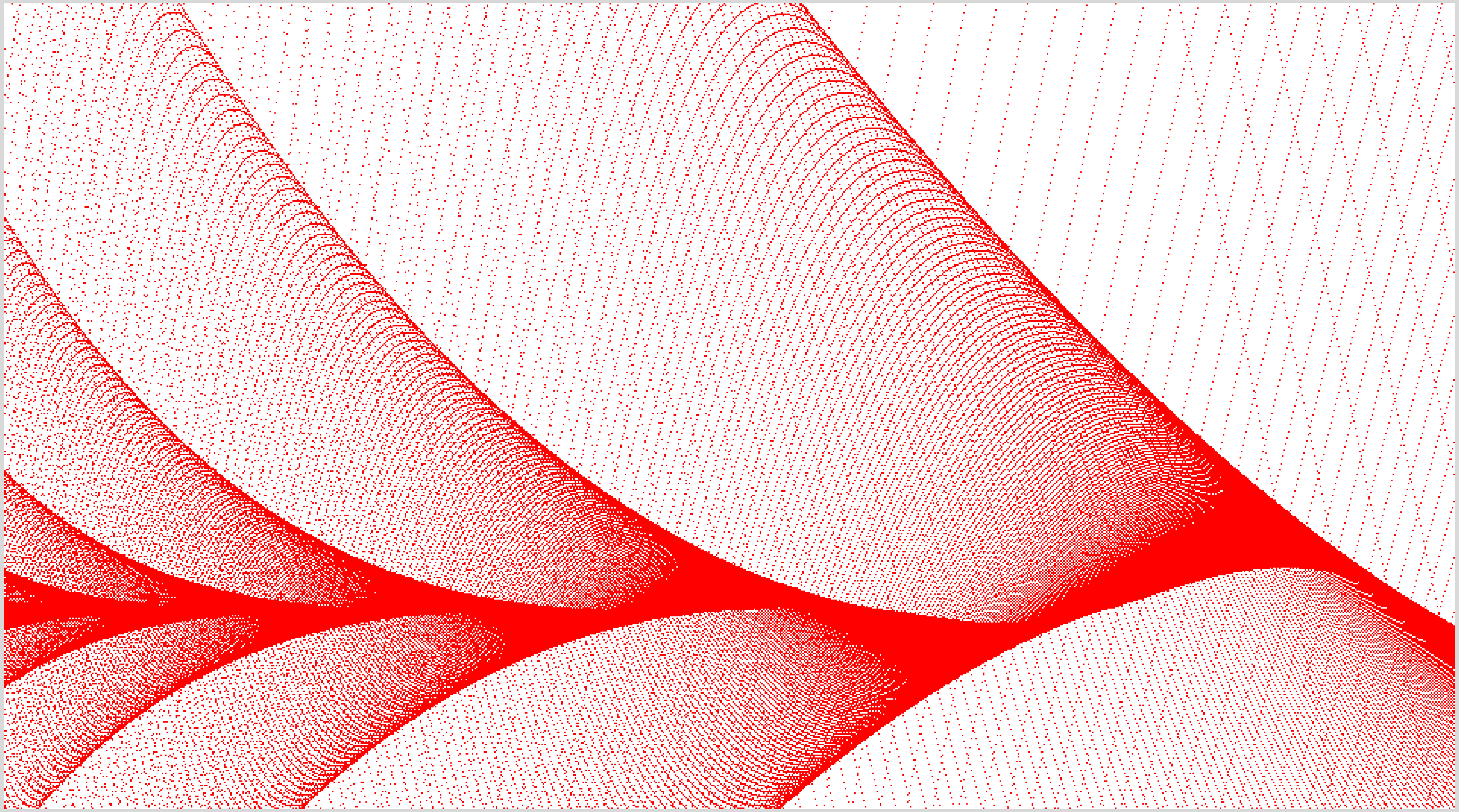
$$x_{n+1} = 1 - a x_n^2 + y_n$$

$$y_{n+1} = b x_n$$

**Orbit diagram for the Hénon map with *b = 0.3*.**
**Higher density (darker) indicates increased probability of the variable *x* acquiring that value for the given value of *a*.**
**Notice the *satellite* regions of chaos and periodicity around *a=1.075* -- these can arise depending upon initial conditions for *x* and *y***

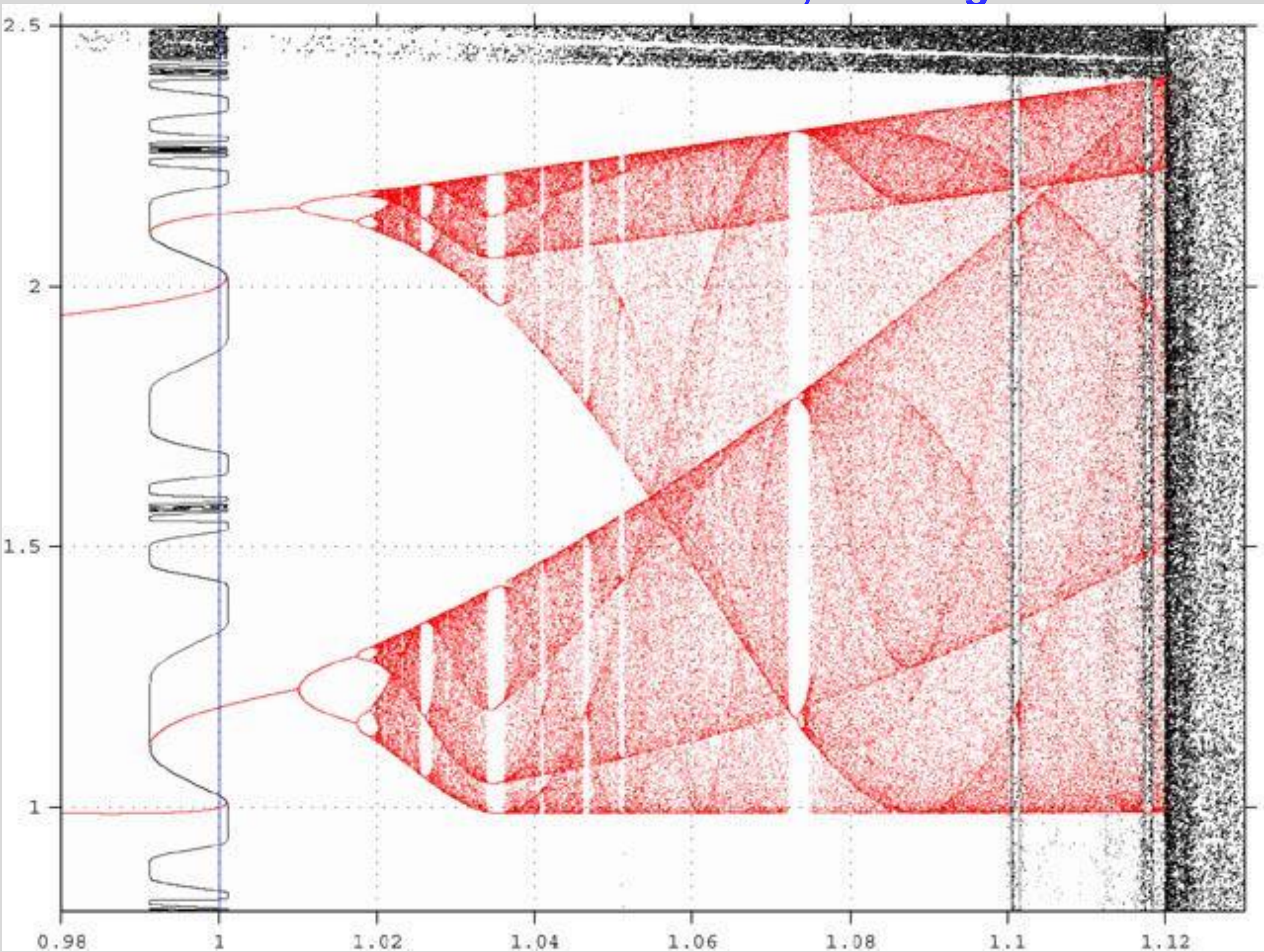


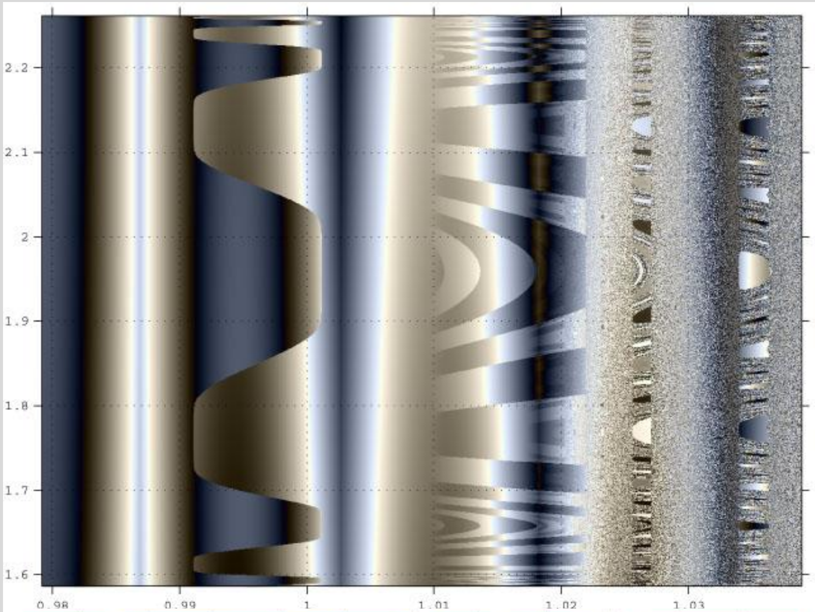
## Bifurcations du modèle de Lorenz

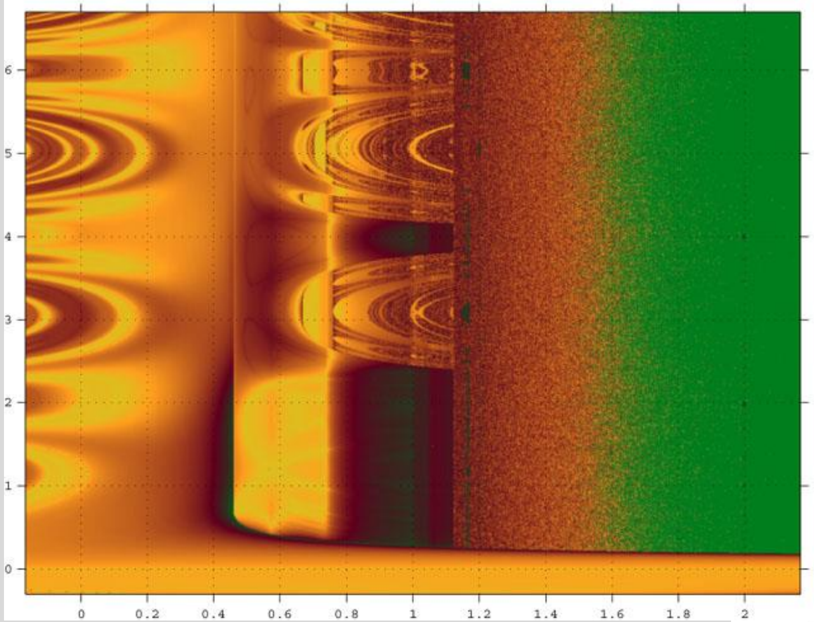


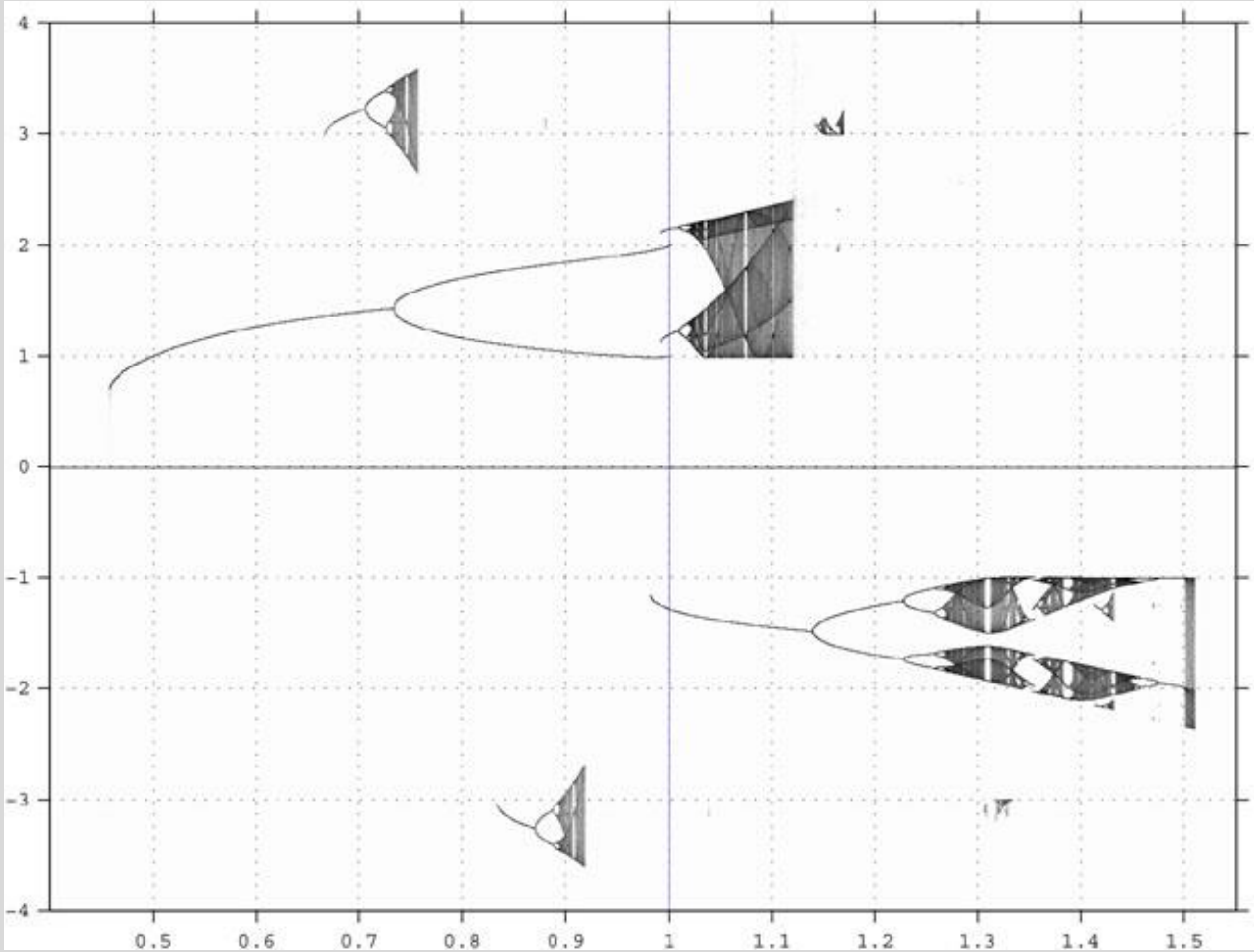
❑ **Bifurcations du « problème de Syracuse » (*www.probleme-syracuse.fr/math.html*)**

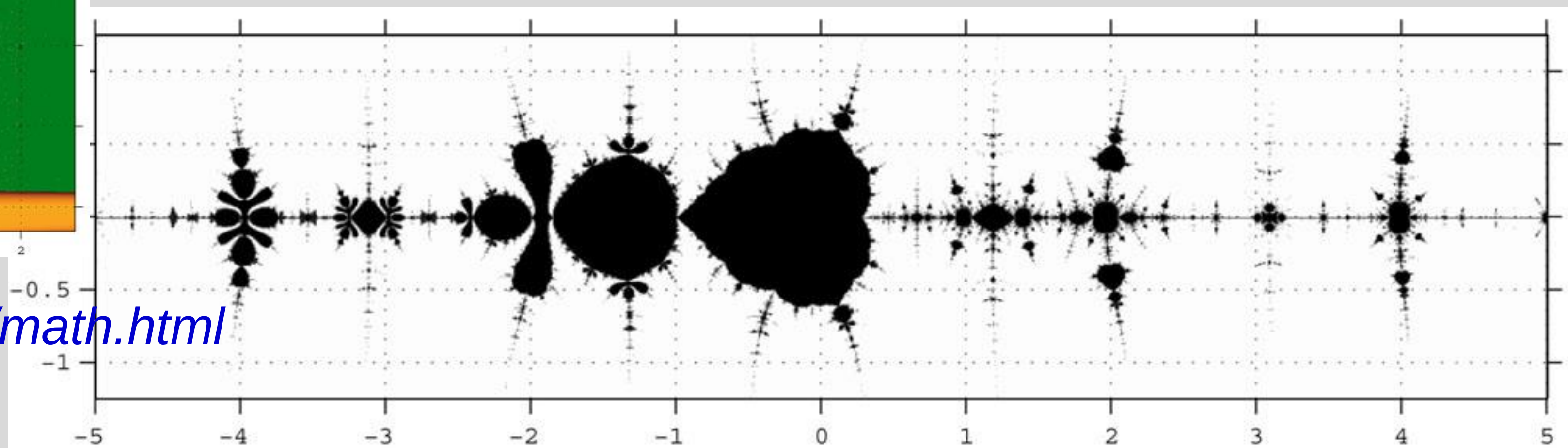
**En noir la frontière des bassins d'attraction, en rouge les attracteurs**



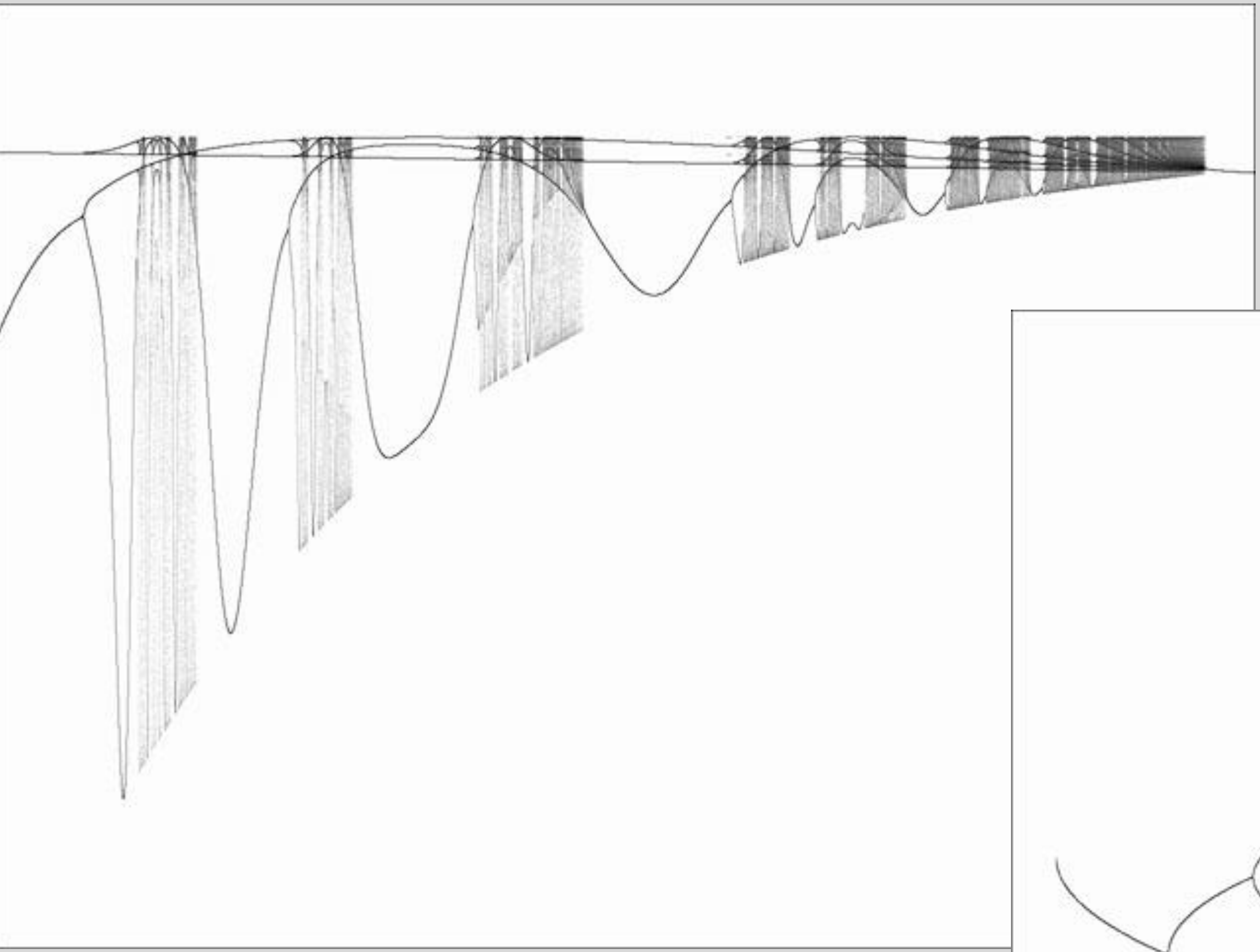


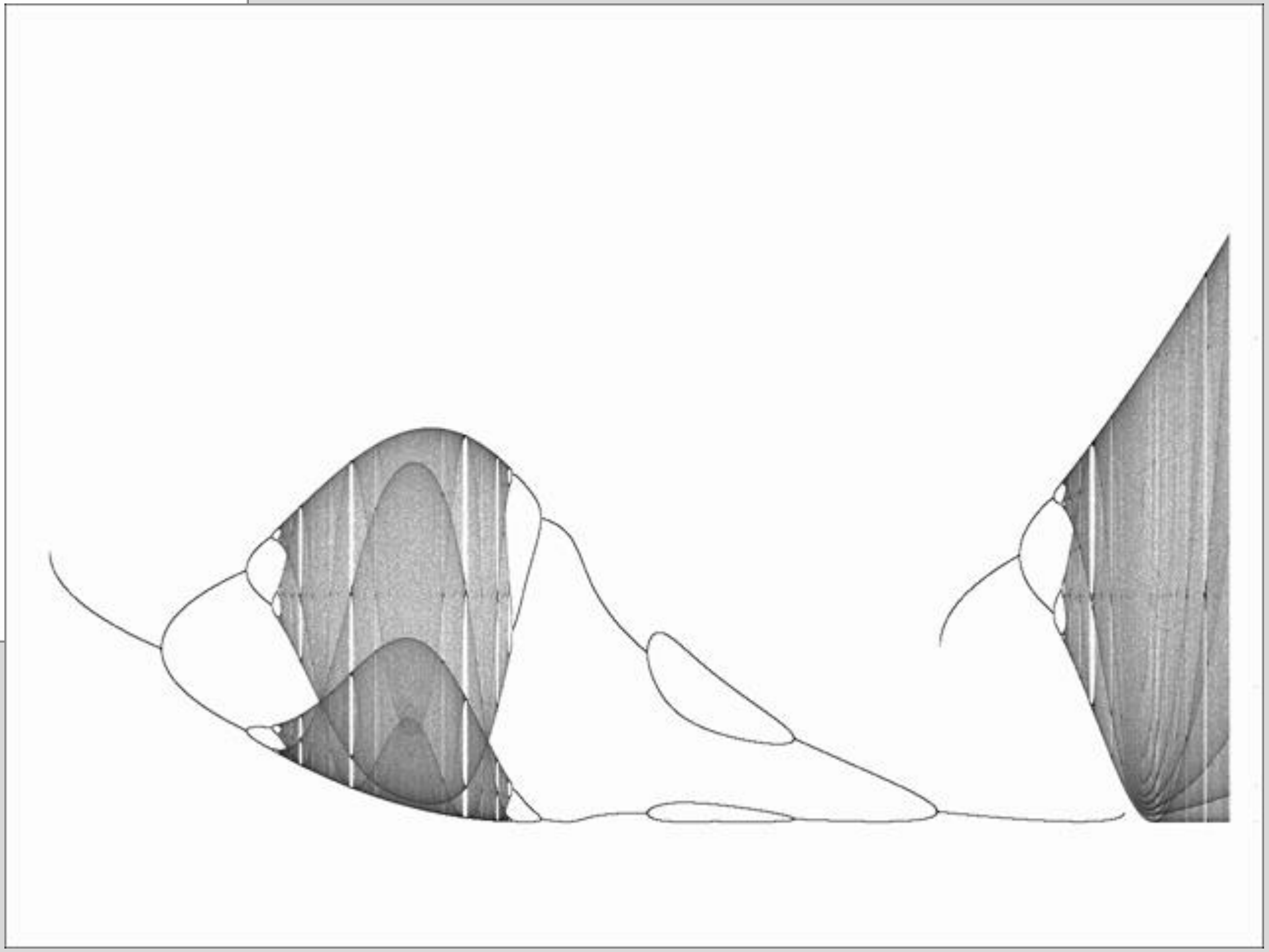





*www.**probleme-syracuse**.fr/math.html*





***www.probleme-syracuse.fr/gallerie.html***

- *« Une cause très petite qui nous échappe détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'Univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux : une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit. »*

**Henri Poincaré, *Science et Méthode*, 1903**

- *« Notre second exemple sera fort analogue au premier et nous l'emprunterons à la météorologie. Pourquoi les météorologistes ont-ils tant de peine à prédire le temps avec quelque certitude ? Pourquoi les chutes de pluie, les tempêtes elles-mêmes nous semblent-elles arriver au hasard, de sorte que bien des gens trouvent tout naturel de prier pour avoir la pluie ou le beau temps, alors qu'ils jugeraient ridicule de demander une éclipse par une prière ? Nous voyons que les grandes perturbations se produisent généralement dans les régions où l'atmosphère est en équilibre instable. Les météorologistes voient bien que cet équilibre est instable, qu'un cyclone va naître quelque part ; mais où, ils sont hors d'état de le dire ; un dixième de degré en plus ou en moins en un point quelconque, le cyclone éclate ici et non pas là, et il étend ses ravages sur des contrées qu'il aurait épargnées. Si on avait connu ce dixième de degré, on aurait pu le savoir d'avance, mais les observations n'étaient ni assez serrées, ni assez précises, et c'est pour cela que tout semble dû à l'intervention du hasard. Ici encore nous retrouvons le même contraste entre une cause minime, inappréciable pour l'observateur, et des effets considérables, qui sont quelquefois d'épouvantables désastres. »*

Henri Poincaré, *Science et Méthode*, 1903

- *Vous me demandez de vous prédire les phénomènes qui vont se produire. Si, par malheur, je connaissais les lois de ces phénomènes, je ne pourrais y arriver que par des calculs inextricables et je devrais renoncer à vous répondre ; mais, comme j'ai la chance de les ignorer, je vais vous répondre tout de suite. Et, ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que ma réponse sera juste.*

**Henri Poincaré**

- *« C'est une doctrine métaphysique que les mêmes antécédents produisent toujours les mêmes conséquents. Nul ne saurait le contredire. Mais ce n'est que de peu d'utilité dans un monde tel que celui-ci, où les mêmes antécédents ne se retrouvent jamais, et où rien ne se reproduit jamais deux fois […] L'axiome physique qui lui ressemble est que des antécédents semblables produisent des conséquents semblables. Mais ici nous sommes passés de l'exactitude à la similitude, de la précision absolue à une approximation plus ou moins grossière. Il y a certains types de phénomènes […] où une petite erreur dans les données n'introduit qu'une petite erreur dans le résultat […] Il y a d'autres types de phénomènes, plus compliqués, où l'on peut rencontrer des cas d'instabilité, la fréquence de ceux-ci augmentant extrêmement rapidement avec le nombre de variables. »*

  **James Clark Maxwell, 1873**

  **(Cité par Ivar Ekeland, *Le calcul, l'imprévu – Les figures du temps de Kepler à Thom*)**

- *« Pour ceux qui entrent dans les mêmes fleuves, autres et toujours autres sont les eaux qui s'écoulent . »*

  **Héraclite (- 544/541, - 480), *Fragments*, trad. Simone Weil**
  **(attribué à Arius Didyme ou Arius d'Alexandrie (- 85 ?, 9)**
  **par Eusèbe de Césarée (265, 339), *Préparation évangélique*)**

- *«  Plus jamais on ne dira: telle équation représente tel phénomène. Il faudra ajouter : le système est chaotique, son temps caractéristique est tant... si vous voulez calculer telle quantité, utilisez telle méthode plutôt que telle autre. En d'autres termes, on ne pourra plus énoncer une théorie scientifique sans dire ce qui est calculable dans cette théorie et ce qui ne l'est pas, et sans indiquer dans chaque cas les moyens de calcul appropriés. »*

**Ivar Ekeland, *Le Chaos*, 1995**

- « Au commencement donc fut le **Chaos**, puis Gaïa au vaste sein, éternel et inébranlable soutien de toutes choses, puis, dans le fond des abimes de la terre spacieuse, le ténébreux Tartare, puis enfin l'Amour, le plus beau des immortels, qui pénètre de sa douce langueur et les dieux et les hommes, qui dompte tous les cœurs, et triomphe des plus sages conseils. »

  Hésiode (VIII$^{e}$ /VII$^{e}$ s.), *Théogonie*, v. 115 sqq, trad. Henri Patin, 1892

- «Avant la création de la mer, de la terre et du ciel, voûte de l'univers, la nature entière ne présentait qu'un aspect uniforme ; on a donné le nom de **chaos** à cette **masse informe et grossière**, bloc inerte et sans vie, assemblage confus d'éléments discordants et mal unis entre eux. »

  Ovide (- 43, +17/18), *Métamorphoses*, Livre I, trad. auteurs multiples, 1850

- « Commencement de la création par Dieu du ciel et de la terre. La terre était **déserte et vide**, et la ténèbre à la surface de l'abîme… »

  *Genèse*, T.O.B.

- « Au commencement donc fut le Chaos, puis Gaïa au vaste sein, éternel et inébranlable soutien de toutes choses, puis, dans le fond des abimes de la terre spacieuse, le ténébreux Tartare, puis enfin l'Amour, le plus beau des immortels, qui pénètre de sa douce langueur et les dieux et les hommes, qui dompte tous les cœurs, et triomphe des plus sages conseils. Du Chaos et de l'Érèbe naquit la noire Nuit ; de la Nuit, l'Éther et le Jour, fruits de son union avec l'Erèbe. A son tour, Gaïa engendra d'abord, égal à elle-même en grandeur, Ouranos, qui devait la couvrir de toutes parts de sa voûte étoilée, et servir éternellement de séjour aux bienheureux immortels. Elle engendra les hautes Montagnes, demeure des Nymphes qui habitent leurs riants vallons ; elle produisit, sans l'aide de l'amour, la Mer au sein stérile, aux flots qui se gonflent et s'agitent. »
- « Ἦ τοι μὲν πρώτιστα Χάος γένετ᾽, αὐτὰρ ἔπειτα Γαῖ᾽ εὐρύστερνος, πάντων ἕδος ἀσφαλὲς αἰεὶ [ἀθανάτων, οἳ ἔχουσι κάρη νιφόεντος Ὀλύμπου, Τάρταρά τ᾽ ἠερόεντα μυχῷ χθονὸς εὐρυοδείης,] ἠδ᾽ Ἔρος, ὃς κάλλιστος ἐν ἀθανάτοισι θεοῖσι, λυσιμελής, πάντων δὲ θεῶν πάντων τ᾽ ἀνθρώπων δάμναται ἐν στήθεσσι νόον καὶ ἐπίφρονα βουλήν. Ἐκ Χάεος δ᾽ Ἔρεβός τε μέλαινά τε Νὺξ ἐγένοντο· Νυκτὸς δ᾽ αὖτ᾽ Αἰθήρ τε καὶ Ἡμέρη ἐξεγένοντο, οὓς τέκε κυσαμένη Ἐρέβει φιλότητι μιγεῖσα. Γαῖα δέ τοι πρῶτον μὲν ἐγείνατο ἶσον ἑ᾽ αὐτῇ Οὐρανὸν ἀστερόενθ᾽, ἵνα μιν περὶ πάντα καλύπτοι, ὄφρ᾽ εἴη μακάρεσσι θεοῖς ἕδος ἀσφαλὲς αἰεί. Γείνατο δ᾽ Οὔρεα μακρά, θεῶν χαρίεντας ἐναύλους, [Νυμφέων, αἳ ναίουσιν ἀν᾽ οὔρεα βησσήεντα.] Ἡ δὲ καὶ ἀτρύγετον πέλαγος τέκεν, οἴδματι θυῖον, »

Hésiode, *Théogonie*, v. 115 sqq, VIIIe /VIIe s., trad. Henri Patin, 1892

## Catastrophes