

DES MATHÉMATIQUES DANS LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Didier Robert
Université de Nantes
didier.robert@univ-nantes.fr

1 INTRODUCTION

2 ÉMERGENCE DE LA PHYSIQUE QUANTIQUE

3 LES FONDEMENTS

- onde ou corpuscule ?
- L'électron
- Probabilités et Incertitude
- classique ou quantique?

4 LE FORMALISME MATHÉMATIQUE

- Transformations, Matrices, Observables, Opérateurs
- Espace des états
- Mesures quantiques
- Principe d'incertitude
- Réduction de la fonction d'onde
- Équation d'évolution
- L'effet Zenon quantique

5 LE SPIN $1/2$ ET LES QUATERNIONS

6 VARIATIONS DU SPIN

Mathématiques et Physique se côtoient, se croisent, interagissent, depuis leurs origines.

Jusqu'au début du XXIème les chercheurs étaient le plus souvent à la fois mathématiciens et physiciens-théoriciens (de Archimède à Henri Poincaré en passant par Newton, Leibniz, Joseph Fourier).

Dans sa conférence de 2005 à l'Université de Tous les Savoirs, Edouard Brézin a commenté de nombreux exemples passés et actuels d'interactions mathématiques-physique.

Galilée [1564-1642] a ainsi résumé le lien fondamental entre mathématiques et physique.

“ La philosophie est écrite dans ce grand livre qui se tient constamment ouvert devant les yeux, je veux dire l'univers. Mais elle ne peut se saisir si tout d'abord on ne saisit point la langue et si on ignore les caractères dans laquelle elle est écrite. Cette philosophie, elle est écrite en langue mathématique. Ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans le moyen desquelles il est impossible de saisir humainement quelque parole, et sans lesquelles on ne fait qu'errer dans un labyrinthe obscur.”

Feynman, prix Nobel 1965, dans une conférence grand public:
“Chacune de nos lois s'énonce sous forme mathématique et en des termes souvent complexes et abstraits. La loi de la gravitation telle que Newton l'énonça n'utilise que des mathématiques assez simples mais au fur et à mesure que nous avançons les énoncés deviennent de plus en plus complexes.
Pourquoi? Je n'en ai pas la moindre idée. Le drame de cette conférence c'est justement que je dois vous faire comprendre qu'on ne peut sérieusement expliquer la beauté des lois de la Nature sans une connaissance profonde des mathématiques”

Émergence de la physique quantique

Fin XIX^{ème} siècle la physique était considérée comme une science quasiment achevée : le théorie de Maxwell pour les ondes électro-magnétiques, la mécanique de Newton pour les corps matériel, la thermodynamique pour les échanges de chaleur. Quelques grains de sable vont enrayer la machine : d'abord la découverte de la radio-activité par Bequerel (1896) puis des travaux de Planck (1900) sur le rayonnement émis par des corps chauffés (corps noir).

Afin d'obtenir une unique formule mathématique valable pour toutes les fréquences, Planck est conduit à introduire un nombre noté h , appelé depuis **constante de Planck**, de valeur numérique

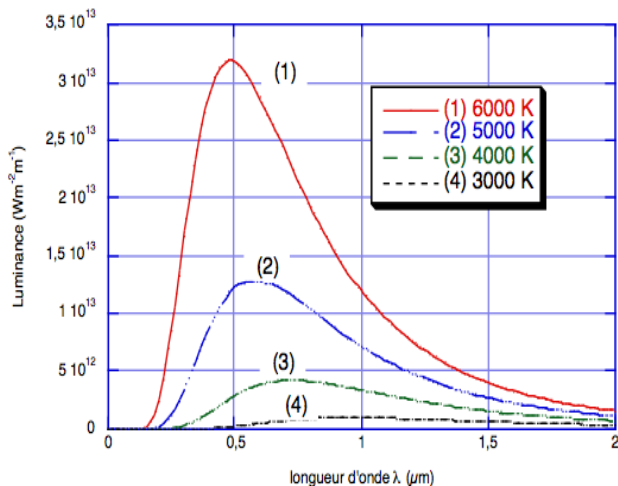
$$h \approx 6,622.10^{-34} \text{ Joule.seconde}$$

Planck obtient ainsi une formule générale pour la densité d'énergie pour le corps noir en fonction de la température T et de la fréquence ν en accord avec les expériences :

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h \left(\frac{\nu}{c}\right)^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}.$$

Cette nouvelle constante physique h paraissait alors mystérieuse et artificielle, y compris pour Planck lui-même.

FIGURE: courbes de la loi de Planck selon la température



C'est Einstein, en 1905, qui allait trouver la bonne l'interprétation physique de h :

L'énergie du rayonnement de fréquence ν ne peut prendre que des valeurs multiples de $h\nu$ (quantum d'énergie, minimale).

Il donnait ainsi une explication de l'effet photo-électrique : les échanges d'énergie entre les rayons lumineux et les électrons ne peuvent se faire que par multiples de $h\nu$ (quantum d'énergie). Il en résulte que les ondes lumineuses apparaissent alors comme des faisceaux de corpuscules (appelés photons).

Cette découverte peut-être considérée comme le début de la révolution quantique et des difficultés à venir pour concilier les aspects ondulatoires et corpusculaires de la lumière puis de la matière.

Le deuxième acte de la révolution quantique allait être accompli par Niels Bohr (1913) pour expliquer la stabilité de l'atome d'hydrogène.

On savait depuis Rutherford (1911) que l'atome d'hydrogène est constitué d'un noyau autour duquel tourne un électron (modèle planétaire). L'électron étant une particule électrique chargée, selon les lois de l'électro-magnétisme il devrait finir par s'écraser sur le noyau, en contradiction avec la stabilité de l'atome d'hydrogène.

FIGURE: wikipedia

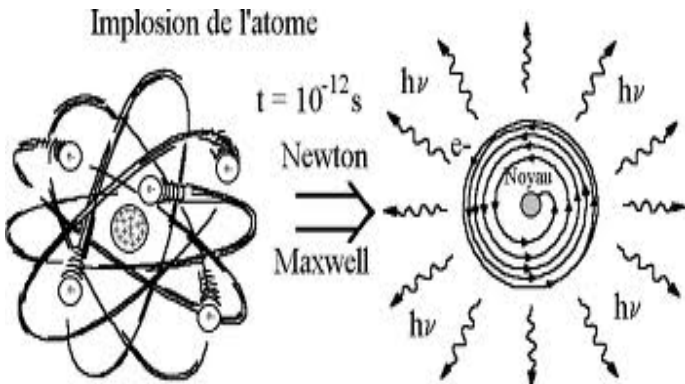
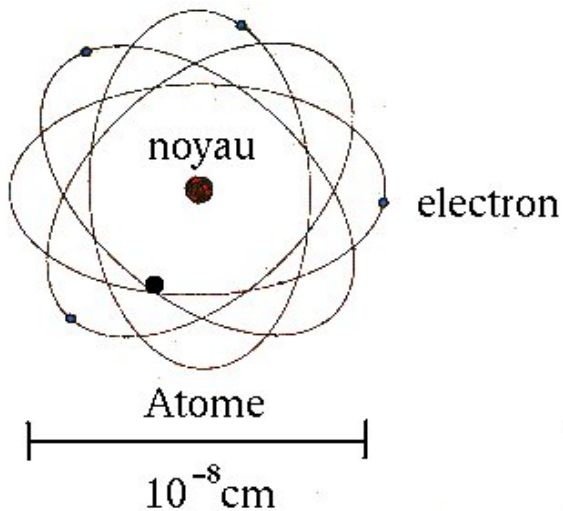


FIGURE: un atome (wikipedia)



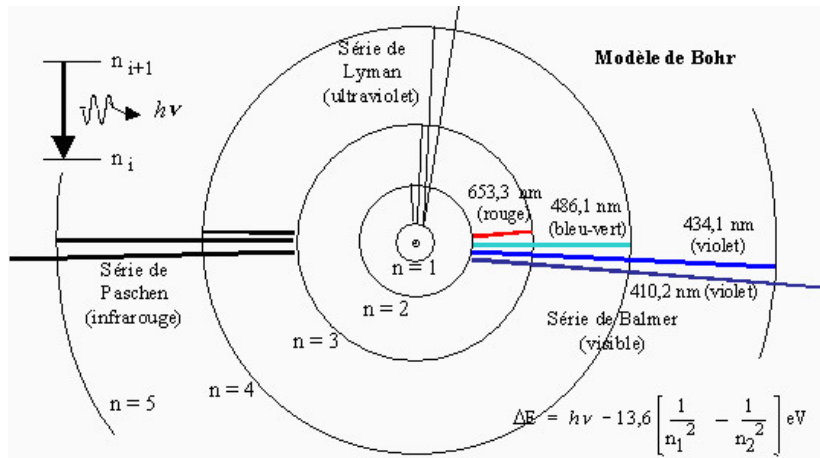
Bohr ajouta alors au modèle de Rutherford, l'hypothèse suivante :

L'électron ne peut changer d'orbite autour du noyau que par sauts discontinus d'énergie, multiple de $h\nu$, ν étant la fréquence de la lumière émise ou absorbée.

La nouvelle constante découverte par Planck voit ainsi son statut de constante fondamentale de la physique confirmé.

Cette hypothèse permettait d'expliquer les raies observées dans le spectre d'énergie de l'hydrogène et de retrouver les règles empiriques connues en spectroscopie (Balmer, Lyman, Rydberg) .

FIGURE: l'atome d'hydrogène (Guy Collin, professeur émérite, UQAC)



La théorie de Bohr ne permettait pas d'expliquer certains détails du spectre d'émission d'atomes en présence de champs magnétiques (dédoublage des raies spectrales).

Stern et Gerlach (1922) montrent expérimentalement qu'un faisceau d'atomes d'argent (électriquement neutres) est dévié par un champ magnétique.

Pauli (1925) découvre le principe d'exclusion ("2 électrons ne peuvent pas occuper le même état") et un nouveau nombre quantique qui deviendra le *spin* (Uhlenbeck-Goudsmit).

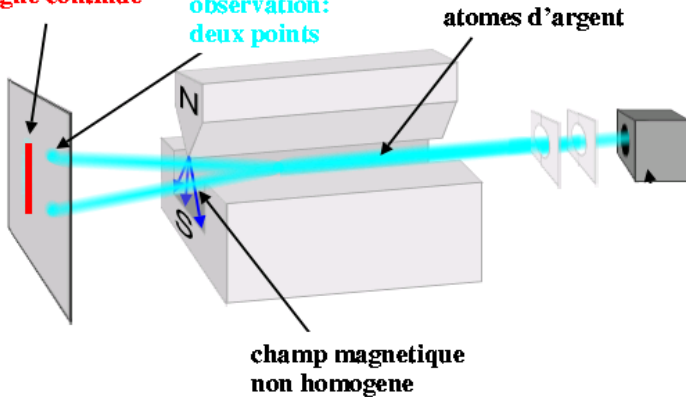
Pour l'électron le spin ne prend que 2 valeurs : $\{+, -\}$

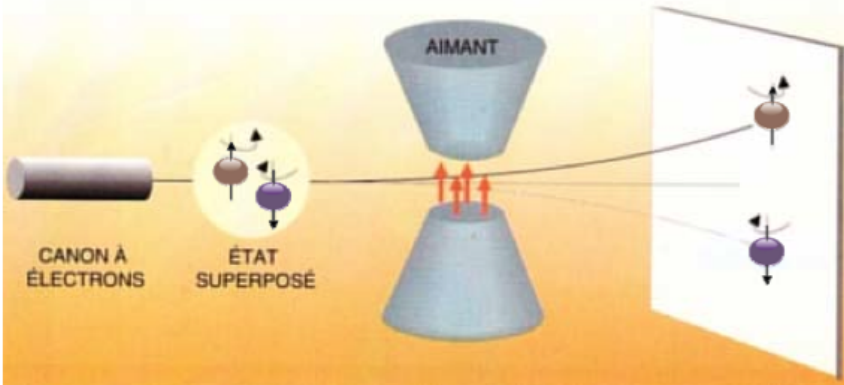
Le spin n'a pas d'équivalent classique et il est difficile à interpréter intuitivement. L'image usuelle est de l'assimiler à une rotation de la particule sur elle-même. Il est relié à une propriété subtile des rotations de l'espace, découverte par Pauli.

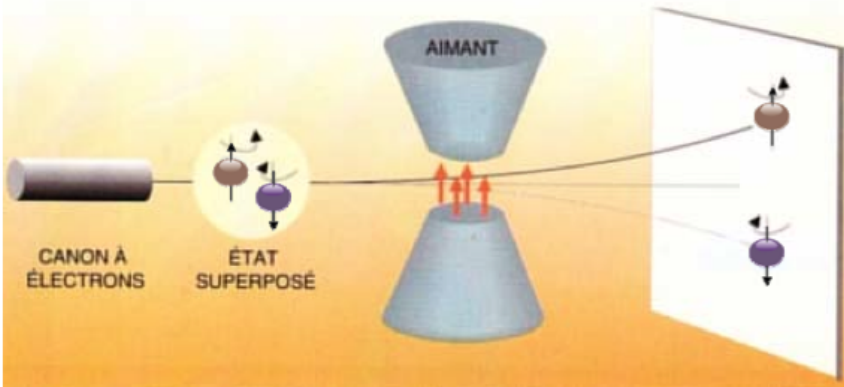
FIGURE: expérience de Stern et Gerlach (1922), Wikipedia

physique classique:
ligne continue

observation:
deux points



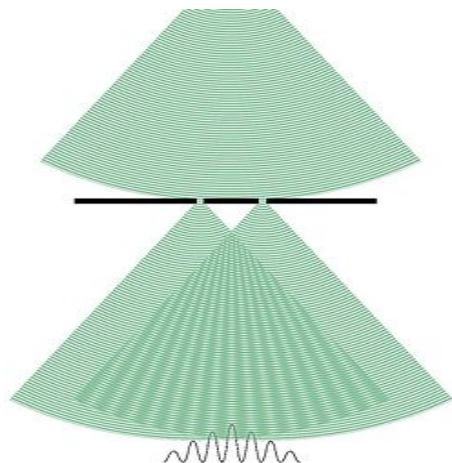




Suite à ces constatations expérimentales l'histoire s'accélère.

La mécanique quantique comme théorie cohérente décrivant le comportement de la matière au niveau atomique, en accord avec les faits expérimentaux, a été élaborée entre 1923 et 1928.

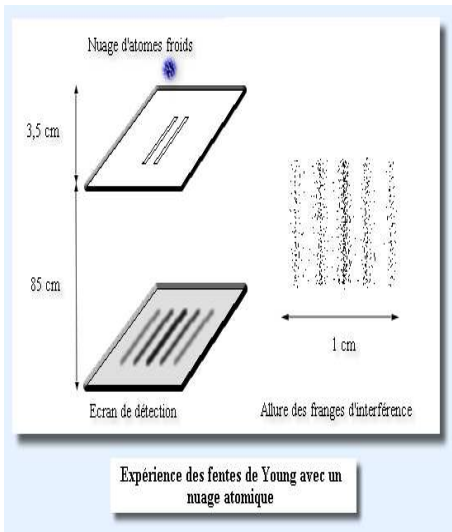
- 1923 : Louis de Broglie dans sa thèse introduit la fonction d'onde, souvent notée ψ , associée à tout système physique.
- 1925 : Werner Heisenberg crée "la mécanique des matrices". Toute variable physique (i.e donnant lieu à des mesures) est représentée par une matrice (infinie).
- 1926 : Erwin Schrödinger retrouve les règles de quantification de l'atome d'hydrogène à partir d'une équation vérifiée par la fonction d'onde de de Broglie. Il montre que son équation est mathématiquement équivalente à l'équation "matricielle" de Heisenberg.
- 1928 : Paul Adrien Dirac étend l'équation de Schrödinger au cadre de la relativité restreinte. Il retrouve ainsi le spin et prévoit l'existence de l'anti-électron (découvert en 1932).



L'expérience d'interférence d'ondes lumineuses par des fentes de Young.

En 1927 Davisson et Germer constatent que des faisceaux d'électrons peuvent également diffracter.

FIGURE: Expérience d'interférences atomiques réalisée en 1992 par une équipe japonaise de l'université de Tokyo



Pour un électron la fonction d'onde ψ de de Broglie est une fonction de 3 variables à valeurs complexes :

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \psi(x_1, x_2, x_3)$$

On notera $x = (x_1, x_2, x_3)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ (distance au noyau).

Pour de Broglie ψ représentait une onde variant en fonction de la position x de l'électron et du temps (onde pilote).

Pour un électron libre (i.e isolé) :

$$\psi(t, x) = \overbrace{a(t, x)}^{\text{amplitude} \geq 0} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \overbrace{(Et - p \cdot x)}^{\text{phase}}\right)$$

E est l'énergie, p l'impulsion, $p \cdot x = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

L'énergie E est reliée à la fréquence ν de l'onde :

$$E = h\nu \quad (\text{relation de Planck-Einstein}).$$

$$k = \frac{p}{\hbar}, \quad k \text{ est le vecteur d'onde (relation de de Broglie)}$$

L'onde se propage dans l'espace perpendiculairement au vecteur k .
 Pour un électron soumis à des forces extérieures (attraction du noyau) la fonction ψ est de la forme

$$\psi(t, x) = a(t, x) \exp\left(\frac{i}{\hbar}(S(t, x))\right)$$

a et S sont à valeurs réelles, ψ est **complexe**.

$$\psi(t, x) = a(t, x) \left(\cos\left(\frac{S(t, x)}{\hbar}\right) + i \sin\left(\frac{S(t, x)}{\hbar}\right) \right) \quad (1)$$

$$|\psi(t, x)|^2 = a(t, x)^2 \quad (2)$$

L'équation de Schrödinger que doit vérifier ψ pour l'atome d'hydrogène, dans un état stationnaire d'énergie E , s'écrit

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{énergie cinétique} & & \text{énergie potentielle} \\ \underbrace{\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \psi} & + & \underbrace{-\frac{e^2}{r} \psi} = E\psi \end{array}}$$

et pour des états évoluant avec le temps

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi - \frac{e^2}{r} \psi}$$

Avec l'aide du mathématicien Herman Weyl, Schrödinger a calculé toutes les solutions de l'équation stationnaire.

Il retrouve alors les formules empiriques de spectroscopie dûe à Balmer-Rydberg.

Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène

$$E_n = -\frac{e^4 m}{2\hbar^2 n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

L'atome d'hydrogène est le plus simple des atomes. La résolution de l'équation de Schrödinger pour des atomes et des molécules plus complexes devient rapidement très difficile (pratiquement impossible).

Lorsque le nombre de particules à traiter dépasse 3 on sait depuis Poincaré qu'on ne peut plus résoudre exactement les équations de la dynamique classique; on retrouve les mêmes difficultés dans le cas quantique.

Les mathématiciens et physiciens y travaillent toujours!

L' intervention de Max Born, un tournant

Contre l'avis de ses contemporains (Einstein, Schrödinger, de Broglie,...) mais avec le soutien de Bohr et Heisenberg, Born propose d'interprétation suivante de la fonction d'onde ψ :

$|\psi(x)|^2$ représente la densité de probabilité de trouver le corpuscule dans la position x .

Si ψ_1 est la fonction d'onde de l'électron passant par la fente 1 et ψ_2 par la fente 2 alors l'ensemble a pour fonction d'onde

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x) + \psi_2(x)).$$

Un calcul sur les nombres complexes explique les zones claires et les zones sombres sur l'écran de détection.

Poser $\psi_j = a_j e^{i \frac{S_j}{\hbar}}$ et supposer $a_1 = a_2$.

Heisenberg formule en 1927 le principe dit d'incertitude. Certains auteurs préfèrent dire principe d'indétermination :

Il n'est pas possible de mesurer simultanément la position et la vitesse d'un corpuscule quantique :

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Le sens de cette inégalité sera clarifié par H. Weyl (1928).

Puis Bohr énonce le **principe de complémentarité** :

les aspects ondulatoires et corpusculaires ne peuvent pas se manifester en même temps, ils se manifestent alternativement selon les circonstances.

Bohr a également formulé le **principe de correspondance**

Quand la constante de Planck h peut être considérée comme petite par rapport aux autres paramètres tels que masse, distances, alors la théorie quantique peut être approchée par la théorie classique (i.e la mécanique de Newton).

La mécanique de Newton est une approximation de la mécanique quantique ($h \rightarrow 0$) et de la relativité ($c \rightarrow +\infty$). Elle reste pertinente à notre échelle.

Le déplacement d'un point matériel est caractérisé par sa position x et son impulsion $p = mv$.

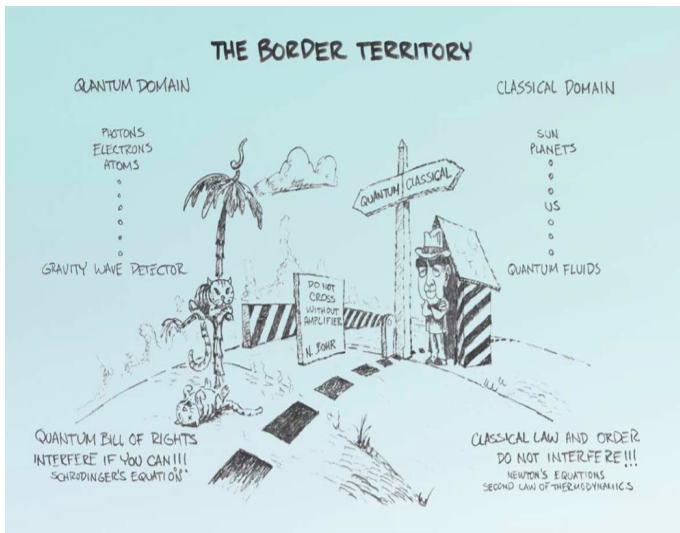
En mécanique classique (Newton), le couple (x, p) caractérise l'état (classique) de la particule .

En mécanique quantique l'état d'un corpuscule est caractérisé par sa fonction d'onde de de Broglie ψ .

Par une analyse mathématique approfondie on peut montrer qu'un état quantique ψ tend à se comporter comme un état classique (x, p) lorsque $\hbar \rightarrow 0$ (approximation semi-classique).

On peut donc dire que la dynamique quantique se rapproche d'une dynamique classique si \hbar peut être considérée comme négligeable.

Depuis les années 1980, une autre approche de la transition quantique-classique connaît un grand essor : **la décohérence**.



Où se situe la frontière quantique-classique?
Zurek (Physics Today, 1991)

Espaces de Hilbert et opérateurs

Au tournant des années 1924-25, le challenge était alors de construire une théorie englobant les principes précédents et permettant une interprétation cohérente des résultats expérimentaux.

Dans un livre paru en 1932 (édition Allemande) John von Neumann construit une représentation mathématique de la théorie quantique englobant les principes dégagés par Bohr, Born, Dirac, Heisenberg, Schrödinger.

Les travaux de Born et Heisenberg conduisent à interpréter la fonction d'onde comme donnant la probabilité de présence de l'électron dans une portion D de l'espace par la formule

$$\text{Proba}[D] = \int_D |\psi(x)|^2 dx$$

$\psi \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ joue le rôle d'une norme euclidienne. qui ici doit être égale à 1.

On voit poindre ici l'espace de Hilbert comme scène sur laquelle vont évoluer les états quantiques et leurs observables.

L'interprétation qui suit est celle de l'École de Copenhague. Les implications philosophiques et les interprétations alternatives ne seront pas discutées ici.

Les paradoxes illustrés par les expériences de pensée d'EPR (Einstein-Podolski-Rosen), ou du chat de Schrödinger, ont été résolus en faveur du modèle issu de l'École de Copenhague.

En 1925 les espaces de Hilbert étaient connus mais pas la théorie des opérateurs auto-adjoints (hermitiens) et leur diagonalisation, indispensables pour une théorie quantique cohérente et rigoureuse. Pour ce faire von Neumann (1926) crée une nouvelle branche des mathématiques, sous l'impulsion de David Hilbert (à Erlangen). La première difficulté est que le formalisme nécessite d'introduire des espaces qui sont la plupart du temps de dimension infinie. Pour le spin on peut se ramener à des espaces de dimension finie.

Un espace de dimension finie ou infinie est un ensemble de vecteurs repérés par une infinité de coordonnées (dans un espace de dimension 3 un vecteur a trois coordonnées).

Partons d'une base infinie (dénombrable) $\{e_0, e_1, \dots, e_n, \dots\}$ d'un espace \mathcal{H} , tout élément u de \mathcal{H} s'écrit sur cette base

$$u = \sum_{n=0}^{n=+\infty} c_n e_n$$

En mécanique quantique les coordonnées des vecteurs sont complexes, donc les coordonnées c_n de u sont à priori des nombres complexes (avec un module et un argument).

Un espace de Hilbert \mathcal{H} est muni d'un produit scalaire.

Si $u = \sum_{n=0}^{n=+\infty} c_n e_n$ et $v = \sum_{n=0}^{n=+\infty} d_n e_n$ alors

$$\langle u|v \rangle = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \bar{c}_n d_n. \quad (\text{notation de Dirac}).$$

La longueur du vecteur u est donnée par la formule

$$\|u\| = \sqrt{\langle u|u \rangle}$$

Noter l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle u|v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

Si $\|u\| = \|v\| = 1$ et si $|\langle u|v\rangle| = 1$ alors u et v sont proportionnels:
 $u = \lambda v$, λ étant un nombre complexe de module 1.

Si on remplace dans les formules précédentes $+\infty$ par $N - 1$ on obtient un espace de Hilbert de dimension N . Pour décrire un spin 1/2 (isolé) on choisit $N = 2$ mais pour décrire l'atome d'hydrogène on est contraint de choisir $N = +\infty$.

N est le nombre de degrés de liberté (complexes) de l'espace.

Les transformations (ou opérateurs), notés \hat{A} , de \mathcal{H} sont représentées par des tableaux de nombres appelés matrices

$\hat{A} = \{a_{n,m}, n = 0, 1 \dots m = 0, 1, \dots\}$ de sorte que $a_{n,m} = \langle e_n | \hat{A} e_m \rangle$.

Un vecteur v de \mathcal{H} est transformé par \hat{A} en un vecteur $w = \hat{A}v$ suivant la formule

$$w_n = \sum_{m=0}^{m=N-1} a_{n,m} v_m$$

La matrice $\delta_{n,m} = \langle e_n | e_m \rangle$ représente la transformation identité. $\{e_n\}$ est une base orthonormée de \mathcal{H} .

Les opérateurs sont notés avec un chapeau pour mieux les distinguer.

Si \hat{A} est une transformation, \hat{A}^* est la transformation conjuguée de matrice : $a_{n,m}^* = \overline{a_{m,n}}$.

\hat{A} est hermitienne (ou auto-adjointe) si $\hat{A}^* = \hat{A}$.

Une transformation \hat{U} de \mathcal{H} est unitaire si $\hat{U}^* = \hat{U}^{-1}$.

Un vecteur v , non nul, est un vecteur propre de \hat{A} si $\hat{A}v = \lambda v$, λ est un nombre complexe appelé valeur propre de \hat{A} .

Propriétés fondamentales: Toute opérateur hermitien \hat{A} admet une base orthonormée de vecteurs propres:

$$\psi = \sum_{n=0}^{n=N-1} c_n \varphi_n, \quad c_n = \langle \varphi_n | \psi \rangle, \quad N < +\infty$$

$$\|\psi\|^2 = \sum_{n=0}^{n=N-1} |c_n|^2$$

$$\hat{A}\varphi_n = E_n\varphi_n, \quad \langle \varphi_m | A\varphi_n \rangle = \delta_{n,m}E_n$$

Dans les espaces de dimension infinie les propriétés précédentes doivent être adaptées (travaux de von Neumann).

Dans les espaces de dimension infinie les propriétés précédentes doivent être adaptées (travaux de von Neumann).

L'interprétation de l'École de Copenhague mise en forme mathématique par von Neumann est résumée en quelques postulats fondamentaux qui ont permis, jusqu'à aujourd'hui, de rendre compte de la plupart des phénomènes observés.

La récente théorie de la décohérence (Zurek, 1981-1982) et les expériences de Aspect, Brune-Raymond-Haroche,, y ont trouvé naturellement leurs places.

Postulat I. *A un système quantique isolé est associé un espace de Hilbert \mathcal{H} . Un vecteur d'état (on dira souvent état) est un vecteur de \mathcal{H} (souvent choisi de norme 1). Une conséquence du postulat I est le principe de superposition: si ψ et φ sont des états, alors $\psi + \varphi$ est un état possible. (état quantique "pure" = fonction d'onde).*

Postulat II. *Si ψ et φ sont deux états normalisés alors le produit scalaire $\langle \varphi | \psi \rangle$ s'interprète comme une amplitude de probabilité, notée $[\psi \rightarrow \varphi]$. La probabilité pour le système de passer de l'état ψ à l'état φ est donnée par la formule*

$$P[\psi \rightarrow \varphi] = |[\psi \rightarrow \varphi]|^2 = |\langle \varphi | \psi \rangle|^2 \quad (3)$$

Les deux vecteurs φ et $\varphi' = e^{i\alpha}\varphi$ représentent le même état physique.

Postulat III. *A toute propriété physique \mathcal{A} est associée un opérateur hermitien \hat{A} dans \mathcal{H} , représentation mathématique de \mathcal{A} . Si le système est dans l'état ψ et si l'on effectue un grand nombre de mesures de \mathcal{A} alors la moyenne de ces mesures, notée $\langle \hat{A} \rangle_\psi$ est donnée par*

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad (4)$$

L'opérateur \hat{A} est souvent appelé "observable".

Comme en probabilité, à la moyenne est associée une variance définie par

$$(\Delta_\psi \hat{A})^2 = \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle_\psi \mathbb{I})^2 \rangle_\psi \quad (5)$$

\hat{A} étant hermitien on en déduit pour l'écart-type de la mesure la formule suivante :

$$\Delta_{\psi}\hat{A} = \|(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle_{\psi}\mathbb{I})\psi\| \quad (6)$$

On en tire alors l'interprétation suivante :

la mesure donne un résultat exact (i.e “avec probabilité 1”) si et seulement si le système a été préparé dans un état propre de \hat{A} , le résultat de la mesure étant la valeur propre associée à ψ .

En effet si $\Delta_{\psi}\hat{A} = 0$ alors $\hat{A}\psi = E\psi$ avec $E = \langle\hat{A}\rangle_{\psi}$.

Dans le cas général, on diagonalise A dans une base orthonormée (en dimension infinie cette opération peut-être délicate). On a alors

$$\hat{A}\psi = \sum_{n=1}^{n=N-1} E_n \langle \varphi_n | \psi \rangle \varphi_n, \quad \hat{A}\varphi_n = E_n \varphi_n$$

et

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \sum_{n=0}^{n=N-1} E_n |\langle \varphi_n | \psi \rangle|^2$$

D'après le Postulat II, la probabilité de transition de ψ vers φ_n est $|\langle \varphi_n | \psi \rangle|^2$. C'est aussi la probabilité de trouver E_n pour résultat de la mesure, puisque $\langle \varphi_n | \hat{A} | \varphi_n \rangle = E_n$ (cas d'une valeur propre simple).

L'une des propriétés surprenantes de l'univers quantique est que les résultats de deux mesures sur un état donné avec des appareils différents dépend de l'ordre des opérations.

On considère une particule dans l'état ψ et deux appareils de mesure représentés par les observables \hat{A} et \hat{B} (par exemple la position et la vitesse).

Le résultat suivant, appelé inégalité de Heisenberg ou principe d'incertitude, limite la possibilité de mesures simultanées exactes.

Pour tout état ψ normalisé ($\|\psi\| = 1$) on a

$$\Delta_{\psi}\hat{A}\Delta_{\psi}\hat{B} \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle_{\psi}| \quad (7)$$

$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ (commutateur).

Appliquons l'inégalité de Heisenberg aux observables position et impulsion. $\hat{A} = \hat{x}_1$, $\hat{B} = \hat{p}_1 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}$. On trouve ici $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \hat{1}$ et donc

$$\Delta_{\psi} \hat{x}_1 \Delta_{\psi} \hat{p}_1 \geq \frac{\hbar}{2}$$

Ceci montre que l'on ne peut pas mesurer en même temps la position et l'impulsion. On notera que l'on peut mesurer en même temps x_1 et p_2 .

L'obstacle pour pouvoir mesurer simultanément des observables vient de $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ (le produit de matrices dépend de l'ordre des facteurs).

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 16 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 16 & 17 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Donc si $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ alors

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La principe de la réduction de la fonction est subtile et son interprétation est parfois controversée. Son énoncé général est le suivant

Réduction de la fonction d'onde. Considérons un système quantique dans l'état ψ . On effectue sur ce système une mesure avec un appareil \mathcal{A} (représentée par une observable \hat{A}). On suppose que le résultat de la mesure donne E_n . Alors immédiatement après la mesure le système se trouve dans l'état φ_n si $\hat{A}\varphi_n = E_n\varphi_n$.

Dans le but d'éclaircir ce principe de la réduction de la fonction d'onde, le physicien W.H Zurek (Los-Alamos-USA) a initié une théorie appelée "théorie de la décohérence".

Pour une présentation voir son article dans Physics Today (1991). Il y décrit en particulier le processus de transition entre l'univers quantique et l'univers classique et donne une explication de l'expérience (de pensée!) du chat de Schrödinger.

Cette expérience de pensée a récemment été testée en laboratoire.

Quelle dynamique pour les états quantiques?

Quelle est l'analogie quantique de la loi de Newton " $F = m\gamma$ "?

Postulat IV : L'équation d'évolution de Schrödinger

L'évolution dans le temps de l'état $\psi(t)$ d'un système quantique isolé est régie par l'équation d'évolution suivante :

$$\boxed{i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = \hat{H}\psi(t)} \quad (10)$$

L'opérateur \hat{H} est une observable représentant l'énergie totale du système.

La solution à un instant t est reliée à la solution à l'instant t_0 par un opérateur unitaire $\hat{U}(t, t_0)$ (i.e ne modifiant pas la norme dans l'espace de Hilbert). On a donc : $\boxed{\psi(t) = \hat{U}(t, t_0)\psi(t_0)}$.

Le principe de la réduction de la fonction d'onde et l'équation de Schrödinger ont pour conséquences que l'effet Zenon peut exister en mécanique quantique.

Le philosophe grec Zénon d'Élée (480-420 avant J-C) a cru trouver un paradoxe montrant l'impossibilité de tout mouvement "la flèche ne peut pas atteindre le talon d'Achille".

En 1977 deux théoriciens (Misra et Sudarshan) ont remarqué qu'en mécanique quantique on pouvait empêcher un corpuscule d'évoluer, avec une probabilité proche de 1, en effectuant une succession de mesures de plus en plus fréquentes.

En 1990, un groupe de physiciens (Itano, Heisen, Bollinger, Wineland) a réalisé un montage expérimental prouvant l'existence d'un effet Zénon quantique.

Le principe de la réduction de la fonction d'onde et l'équation de Schrödinger ont pour conséquences que l'effet Zenon peut exister en mécanique quantique.

Le philosophe grec Zénon d'Élée (480-420 avant J-C) a cru trouver un paradoxe montrant l'impossibilité de tout mouvement "la flèche ne peut pas atteindre le talon d'Achille".

En 1977 deux théoriciens (Misra et Sudarshan) ont remarqué qu'en mécanique quantique on pouvait empêcher un corpuscule d'évoluer, avec une probabilité proche de 1, en effectuant une succession de mesures de plus en plus fréquentes.

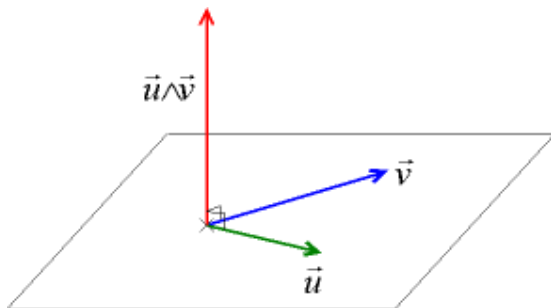
En 1990, un groupe de physiciens (Itano, Heisen, Bollinger, Wineland) a réalisé un montage expérimental prouvant l'existence d'un effet Zénon quantique.

Il semble décidément bien difficile de mettre en défaut la théorie quantique issue de l'École de Copenhague même dans ses conséquences les plus surprenantes.

Le spin est une propriété purement quantique liée aux propriétés des rotations dans l'espace. C'est un **moment cinétique intrinsèque** du corpuscule.

Une rotation dans l'espace est caractérisée par un axe et un angle. Le moment cinétique d'une particule ponctuelle dans la position \vec{x} et d'impulsion \vec{p} par rapport à une origine O est le vecteur

$$\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p}, \quad \vec{L} \perp \{\vec{x}, \vec{p}\}$$



Pour un système isotrope en évolution le moment cinétique est constant (fondement des lois de Képler).

En coordonnées on a

$$L_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2$$

$$L_2 = x_3 p_1 - x_1 p_3$$

$$L_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1$$

L'analogie quantique du moment cinétique pour l'électron s'obtient par le principe de correspondance de Bohr-Schrödinger par la substitution

$$p_k \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} := \hat{p}_k.$$

On obtient le moment cinétique orbital de l'électron sous la forme d'un triplet d'observables, opérateurs dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_e = L^2(\mathbb{R}^3)$.

$$\begin{aligned}\hat{L}_1 &= \frac{\hbar}{i} \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ \hat{L}_2 &= \frac{\hbar}{i} \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\ \hat{L}_3 &= \frac{\hbar}{i} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)\end{aligned}$$

Les relations de commutation de Heisenberg deviennent ici

$$\boxed{\hat{L}_1, \hat{L}_2] = i\hbar\hat{L}_3} \quad \text{et permutations circulaires.}$$

Le spin est un moment cinétique intrinsèque : cela veut dire que les observables correspondantes vont agir dans un espace de Hilbert \mathcal{H}_s , indépendant de \mathcal{H}_e et vérifiant les mêmes relations de commutation que le moment cinétique orbital. On obtient alors 3 observables de spin $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$ vérifiant

$$\boxed{[\hat{S}_1, \hat{S}_2] = i\hbar\hat{S}_3} \text{ et permutations circulaires.}$$

Le spin est un moment cinétique intrinsèque : cela veut dire que les observables correspondantes vont agir dans un espace de Hilbert \mathcal{H}_s , indépendant de \mathcal{H}_e et vérifiant les mêmes relations de commutation que le moment cinétique orbital. On obtient alors 3 observables de spin $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$ vérifiant

$$\boxed{[\hat{S}_1, \hat{S}_2] = i\hbar\hat{S}_3} \text{ et permutations circulaires.}$$

On démontre que l'on peut réaliser "d'une seule manière" ces relations de commutation dans des espaces "minimaux" de dimension finie arbitraire (théorie des représentations).

Il est d'usage de désigner l'espace \mathcal{H}_s de dimension $2s + 1$ comme l'espace de spin s , s est alors un demi-entier.

L'espace \mathcal{H}_s ne dépend que du type de corpuscule considéré.

$s = \frac{1}{2}$: \mathcal{H}_s est de dimension 2 (l'électron)

$s = 1$: \mathcal{H}_s est de dimension 3 (le photon, son spin est associé à la polarisation de la lumière).

$s = 0$, \mathcal{H}_s est de dimension 1, les opérateurs de spin sont tous nuls (boson de Higgs).

Donc pour $s = \frac{1}{2}$ on a $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ (couples de nombres complexes).

Pauli a introduit les 3 matrices hermitiennes suivantes

$$\hat{S}_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

\hat{S}_3 mesure le spin dans la direction \vec{Ox}_3 (verticale).

On appelle usuellement matrices de Pauli, les matrices suivantes :

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'algèbre engendrée par les matrices de Pauli a des parentés avec l'algèbre des quaternions inventée par le mathématicien-physicien irlandais William Hamilton (1843) pour décrire les rotations de l'espace tout comme les nombres complexes servent à décrire les rotations du plan.

Effectuer une rotation dans le plan d'angle θ revient à multiplier par $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$.

L'algèbre des quaternions est un espace de dimension réel 4 (de dimension complexe 2). On peut en donner plusieurs descriptions équivalentes selon les propriétés que l'on veut mettre en évidence.



“Ici, le 16 octobre 1843, alors qu’il se promenait, Sir William Rowan Hamilton découvrit dans un éclair de génie la formule fondamentale sur la multiplication des quaternions : $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$ et la grava sur une pierre du pont” (pont de Broom (Dublin)).

On ajoute la matrice identité $\sigma_0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les 4 matrices

$$E, I = i\sigma_3, J = i\sigma_2, K = i\sigma_1$$

DEFINITION (1)

On appelle quaternion toute combinaison réelle q des 4 matrices E, I, J, K i.e

$$q = xE + yI + uJ + vK,$$

x, y, u, v sont des nombres réels arbitraires.

DEFINITION (2)

On appelle quaternion toute matrice 2×2 du type suivant

$$q = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

a, b sont des nombres complexes arbitraires.

On passe d'une définition à l'autre en posant $a = x + iy$,
 $b = u + iv$, $\bar{a} = x - iy$.

L'avantage de la définition[2] est que l'on peut multiplier les quaternions en multipliant les matrices. On obtient ainsi une algèbre (non commutative) notée \mathbb{H} en l'honneur de Hamilton.

Si dans la définition précédente on suppose que a, b sont des nombres réels alors on décrit l'ensemble des nombres complexes; la multiplication correspond à la multiplication des matrices et

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autrement dit $i^2 = -1$ si $i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Revenons aux quaternions. [▶ rotation](#)

Si q est un quaternion, son conjugué est le quaternion q^* ,

$$q^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix}$$

On a la relation

$$q^* q = q q^* = (|a|^2 + |b|^2) E$$

Donc tout quaternion non nul a un inverse: $q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$

$$|q| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}.$$

L'algèbre des quaternions ressemble beaucoup à l'algèbre des nombres complexes.

Mais maintenant la multiplication dépend de l'ordre des facteurs.

On distingue en particulier les quaternions réels et les quaternions purs.

q est réel si $q^* = q$; q est pur si $q^* = -q$.

On voit facilement que q est réel signifie $q = xE$ et q est pur signifie $q = yI + uJ + vK$.

Tout quaternion est somme d'un quaternion réel et d'un quaternion pur : $q = r + p$, a réel, p pur.

La multiplication des quaternions prend alors la forme suivante

$$qq' = \underbrace{rr' - \langle p, p' \rangle}_{\text{réel}} + \underbrace{rp' + r'p + p \wedge p'}_{\text{pur}}$$

Si q est un quaternion pur de module 1 on obtient alors

$$q^2 = -1, q^3 = -q, q^4 = 1, q^5 = q, \dots$$

Ici on a indentifié la matrice unité E avec le nombre 1.

On a ainsi, pour les quaternions de norme 1, l'analogue de la formule de Moivre pour les nombres complexes

$$e^{\theta q} = \cos \theta + q \sin \theta, \quad \theta \text{ réel, } q \text{ pur, } \|q\| = 1.$$

Tout quaternion de norme 1 est de cette forme.

De cette formule on déduit après calculs,

$$e^{-\theta q/2} u e^{\theta q/2} = u \cos \theta - q \wedge u \sin \theta + \langle q, u \rangle q (1 - \cos \theta)$$

pour tout quaternion pur u .

Cette formule montre que la transformation $u \mapsto e^{-\theta q/2} u e^{\theta q/2}$ a le même effet qu'une rotation de u d'un angle θ autour de l'axe d'orientation q (identifié à un vecteur unitaire de l'espace).

Signification de la formule précédente:

Pour tout quaternion pur : $u = u_1I + u_2J + u_3K$ on a

$$\boxed{e^{-\theta q/2} u e^{\theta q/2} = v_1I + v_2J + v_3K} \quad (11)$$

où le vecteur \vec{v} de composantes (v_1, v_2, v_3) se déduit du vecteur \vec{u} de composantes (u_1, u_2, u_3) par la rotation d'angle θ et d'axe q (identifié à un vecteur unitaire).

Cette propriété résume le lien profond entre rotations de l'espace et quaternions.

L'ensemble noté \mathbb{H}_p des quaternions purs est un espace de dimension réel égal à 3 que l'on peut identifier à notre espace euclidien ordinaire. Ce qui permet de ramener toute manipulation sur les rotations de l'espace à un calcul dans l'algèbre des quaternions, ce qui était la motivation initiale de Hamilton.

Les quaternions de norme 1 s'identient aux matrices de la forme

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Ces matrices forment un groupe noté $SU(2)$. L'ensemble des rotations de l'espace forment également un groupe noté $SO(3)$.

On a obtenu une transformation $U \mapsto R(U)$ qui associe une rotation de l'espace à toute matrice de $SU(2)$. Cela "permet presque" de remplacer $SO(3)$ par $SU(2)$ où les calculs sont plus facile. Le codage des rotations par les quaternions n'est pas parfait! Il y a une ambiguïté de signe qui est inévitable pour des raisons géométriques que l'on retrouve dans le spin: il faut faire 2 tours dans $SU(2)$ pour un tour dans $SO(3)$.

La rotation d'angle θ d'axe $Oz = OX_3$ est représentée par la matrice

$$U_3(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}.$$

Noter que $U(2\pi) = -\mathbb{I}$ (1 tour) et que $U(4\pi) = \mathbb{I}$ (2 tours).

Le spin se cache derrière cette anomalie.

Un appareil pour mesurer le spin est dans une orientation de vecteur unitaire \vec{u} de composantes (x_1, x_2, x_3) . L'observable associée est la matrice $\hat{A} = x_1 \hat{S}_1 + x_2 \hat{S}_2 + x_3 \hat{S}_3$. On l'écrit sous la forme $\hat{A} = \frac{\hbar}{2} \sigma(\vec{u})$. Alors $\hat{S}_j = \sigma(\vec{e}_j)$ pour $j = 1, 2, 3$.

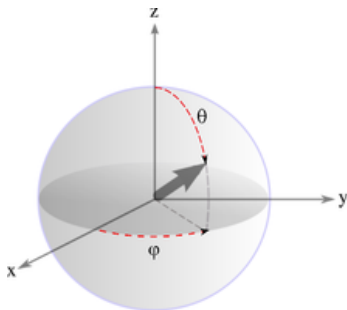
Par une rotation on peut toujours transformer le vecteur \vec{u} en le vecteur \vec{e}_3 de composantes $(0, 0, 1)$. D'après la formule précédente \hat{A} est alors transformé en la matrice équivalente \hat{S}_3 , qui a deux valeurs propres $\pm \frac{\hbar}{2}$.

Le spin 1/2 prend donc toujours les mêmes valeurs $\pm \frac{\hbar}{2}$ quelque soit l'orientation de l'appareil.

Reprenons l'interprétation du spin à l'aide des postulats précédents. On a vu qu'une rotation autour de l'axe Ox_3 donne lieu à un spin de matrice $\hat{S}_3 = \frac{\hbar}{2}\sigma_3$. Une rotation d'axe v donne lieu à une matrice $\hat{S}_v = \frac{\hbar}{2}\sigma(v)$.

L'orientation du spin est modifiée en faisant agir un champ magnétique de direction v .

On fait passer un faisceau d'électrons dans un champ vertical. Les électrons se répartissent sur les deux états $|\pm\rangle$, $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ensuite on fait passer le faisceau dans un champ de direction v quelconque. Les électrons se répartissent alors sur deux autres états notés $|\pm v\rangle$. On cherche à calculer les valeurs moyennes $\langle \pm v | \hat{S}_3 | \pm v \rangle$ et les probabilités de transition de $|+\rangle$ vers $|\pm v\rangle$.



v se déduit de e_3 par une rotation d'angle θ et vecteur w .
Représentons v en coordonnées sphériques,

$$v_1 = \sin \theta \cos \varphi$$

$$v_2 = \sin \theta \sin \varphi$$

$$v_3 = \cos \theta$$

On utilise alors la relation

$$e^{i\theta\sigma(w)/2}\sigma(v)e^{-i\theta\sigma(w)/2} = \sigma_3$$

On déduit alors les nouveaux états possibles du spin et on obtient les probabilités de transition des états de spin :

$$P[|+\rangle \rightarrow |+\nu\rangle] = \cos^2(\theta/2) \quad (12)$$

$$P[|+\rangle \rightarrow |-\nu\rangle] = \sin^2(\theta/2) \quad (13)$$

On inverse si on part de $|-\rangle$.

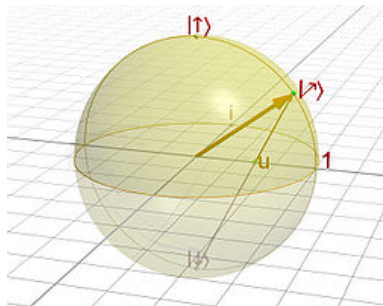
On calcule les valeurs moyennes en utilisant le produit scalaire dans \mathbb{C}^2 :

$$\langle +v | \hat{S}_3 | +v \rangle = \cos \theta$$

$$\langle +v | \hat{S}_2 | +v \rangle = \sin \theta \sin \varphi$$

$$\langle +v | \hat{S}_1 | +v \rangle = \sin \theta \cos \varphi$$

On retrouve les composantes de v , nouvelle direction du spin, visualisé sur la sphère de Bloch.



L'énergie d'un spin 1/2 pour une particule plongée dans un champ magnétique de direction ν est de la forme

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma(\nu), \quad \sigma(\nu) = \nu_1\sigma_1 + \nu_2\sigma_2 + \nu_3\sigma_3$$

ω dépend de l'intensité du champ magnétique.

L'évolution du spin se calcule alors facilement en utilisant l'équation de Schrödinger :

$$\boxed{e^{-it\hat{H}} = \cos\left(\frac{t\omega}{2}\right)\sigma_0 - i\sin\left(\frac{t\omega}{2}\right)\sigma(\nu)} \quad (14)$$

Cette formule résulte d'un calcul sur les quaternions pour $q = i\sigma(\nu)$ et $e^{\theta q} = \cos\theta + q\sin\theta$.

On oriente d'abord le spin verticalement à l'aide d'un champ magnétique $\vec{B} = B\mathbf{e}_3$. L'hamiltonien \hat{H} de Schrödinger est alors

$$\hat{H} = \frac{\omega_0}{2} \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

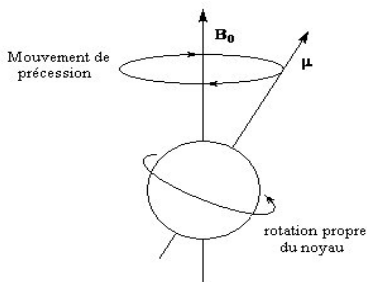
Calculons l'évolution d'un état initial ψ de spin orienté dans une direction ν de coordonnées (θ, φ) . [voir figure](#) Avec les notations précédentes on obtient la solution de l'équation de Schrödinger :

$$\psi(t) = e^{i\varphi/2} \left(\cos(\theta/2) e^{-i(\varphi + \omega_0 t)/2} |+\rangle + \sin(\theta/2) e^{i(\varphi + \omega_0 t)/2} |-\rangle \right).$$

Cette formule montre que à l'instant t le spin est orienté selon les angles $(\theta, \varphi + \omega_0 t)$, on observe donc **une précession de Larmor du spin autour du champ magnétique.**

Joseph Larmor (1857-1942), physicien irlandais.

FIGURE: le champ magnétique B_0 fait tourner l'axe $v = \mu$ du spin autour de la direction du champ (précession de Larmor)



Cette propriété est utilisée pour la Résonance Magnétique Nucléaire (IRM) car la valeur de ω_0 donne des informations sur les propriétés chimiques du milieu.

Rabi (en 1930) a trouvé une technique pour déterminer ω_0 .
On fait tourner à vitesse constante un champ magnétique dans le plan horizontal (champ de radiofréquence).

$$\vec{B}_1(t) = b_1(e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t)$$

où $\{e_1, e_2\}$ est une base orthonormée du plan horizontal. Le nouvel hamiltonien de notre système devient

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_3 + \frac{1}{2} \hbar \omega_1 (\sigma_1 \cos \omega t - \sigma_2 \sin \omega t)$$

($\omega_1 = \gamma b_1$.)

Rabi a montré que lorsque la fréquence du champ horizontal coïncide avec la fréquence de la précession de Larmor alors le spin oscille périodiquement entre les états $|+\rangle$ et $|-\rangle$.

On résout l'équation de Schrödinger pour l'opérateur d'énergie $H(t)$ à partir de la donnée initiale $\psi(0) = |+\rangle$. Posons $\delta = \omega - \omega_0$. On obtient, en utilisant le calcul avec les quaternions,

$$\psi(t) = e^{i\frac{t}{2}\omega\sigma_3} e^{-i\frac{t}{2}(\delta\sigma_3 - \omega_1\sigma_1)} \psi(0) \quad (15)$$

Posons $\Omega = \sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}$. On calcule la probabilité de transition :

$$\mathbb{P}[|\psi(t)\rangle \rightarrow |-\rangle] = |\langle\psi(t)|-\rangle|^2 = \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \sin^2(\Omega t/2). \quad (16)$$

Interprétation de la formule de Rabi :

$$\mathbb{P}[|\psi(t)\rangle \rightarrow |- \rangle] = \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \sin^2(\Omega t/2).$$

Le cas résonnant: $\omega = \omega_0$, oscillations de Rabi:

$$\mathbb{P}[|\psi(t)\rangle \rightarrow |- \rangle] = \sin^2(\omega_1 t/2).$$

Or on a

$$\langle \psi(t) | - \rangle = \sin(\omega_1 t/2) e^{i\omega t/2}$$

Pour $t = t_k = \frac{(2k+1)\pi}{\omega_1}$ on a $\psi(t_k)$ et $|- \rangle$ sont dans le même état.

Le spin oscille donc périodiquement de l'état $|+ \rangle$ à l'état $|- \rangle$ avec la période $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$.

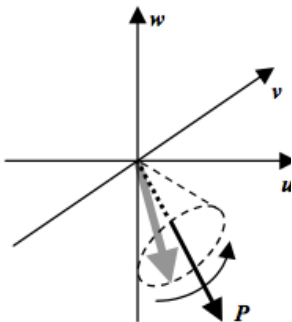


FIGURE: basculement du spin

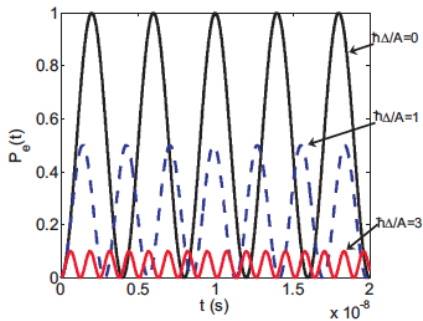


FIGURE: oscillations de Rabi

Bibliographie sommaire

vulgarisation

E. Klein, Petit voyage dans le monde des quanta, Flammarion 2004

V. Scarani, Initiation à la physique quantique, Vuibert, 2003

B. Cox et J. Forshaw, L'univers quantique (tout ce qui peut arriver arrive), Dunod 2013

textes fondateurs

B. Escoubès et J. Leite-Lopes, Source et évolution de la physique quantique, EDP Sciences 2005

traité détaillé

R. Feynman, Mécanique quantique, InterEditions, 1979 (traduction française du célèbre cours de Feynman)

M. Lebellac, Physique quantique, EDP Sciences 2007.

textes littéraires

P. Forest, Le chat de Schrödinger, Gallimard, 2013

A. Connes, D. Chéreau et J. Dixmier, Le théâtre quantique, O. Jacob, 2013

Merci pour votre attention et votre patience