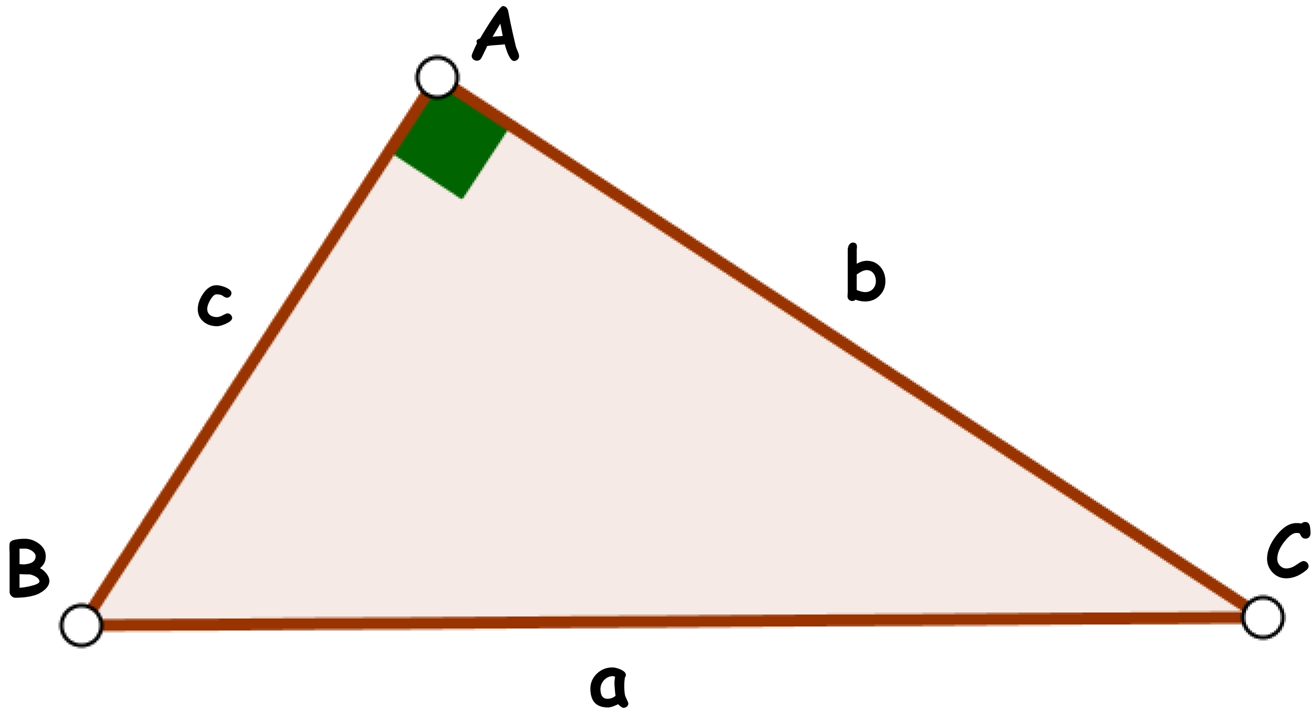
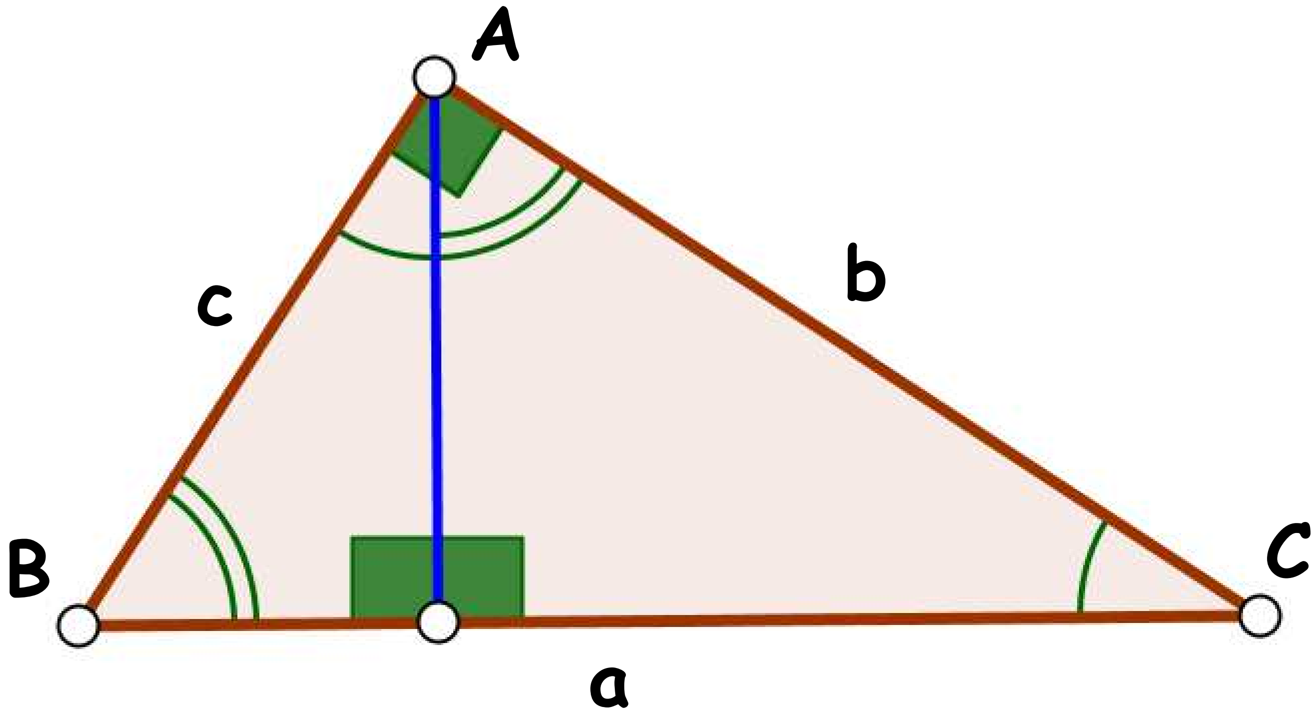
PYTHAGORE

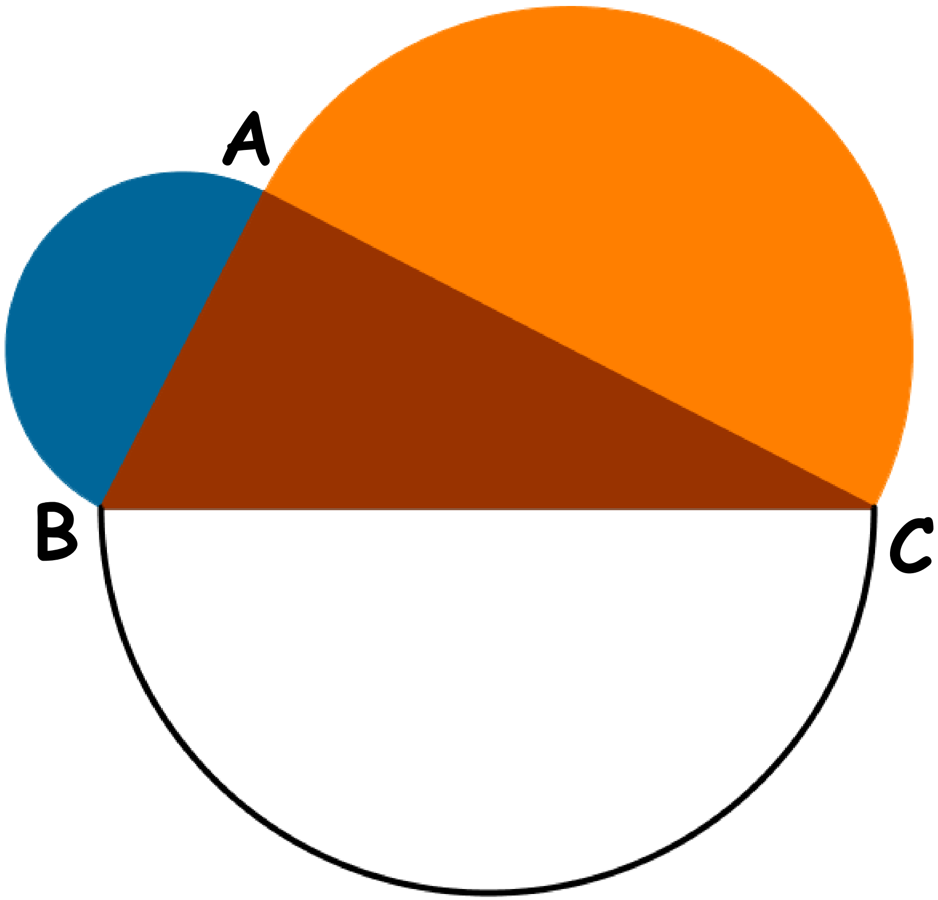


PYTHAGORE

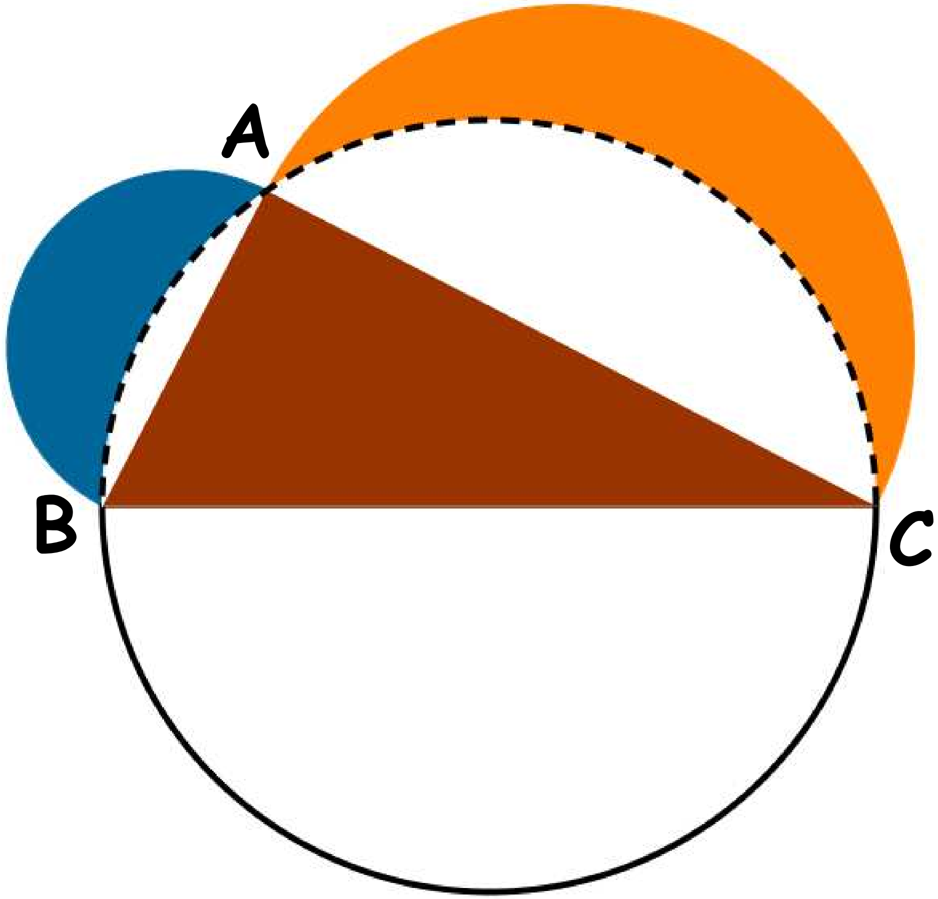


$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

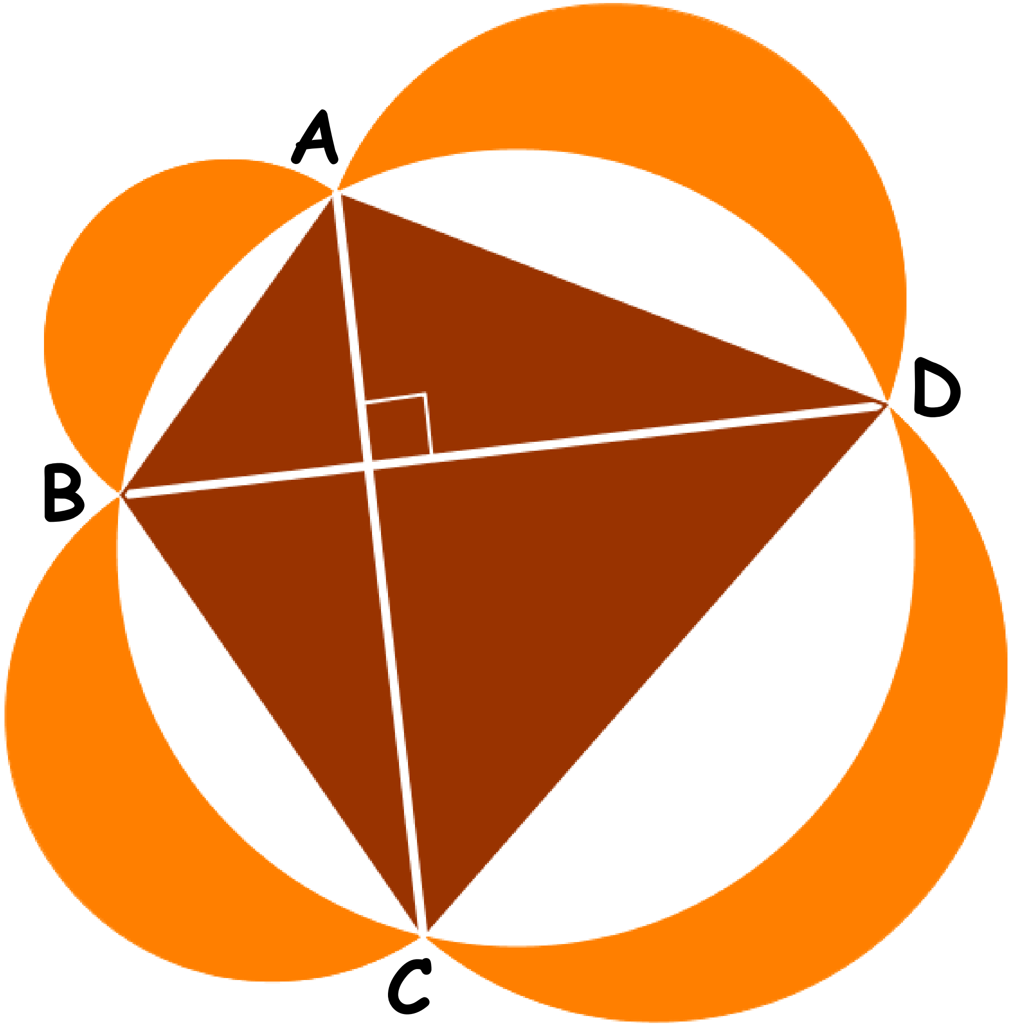
Hippocrate de Chios



Hippocrate de Chios



Généralisation *(F. Sammarcelli)*

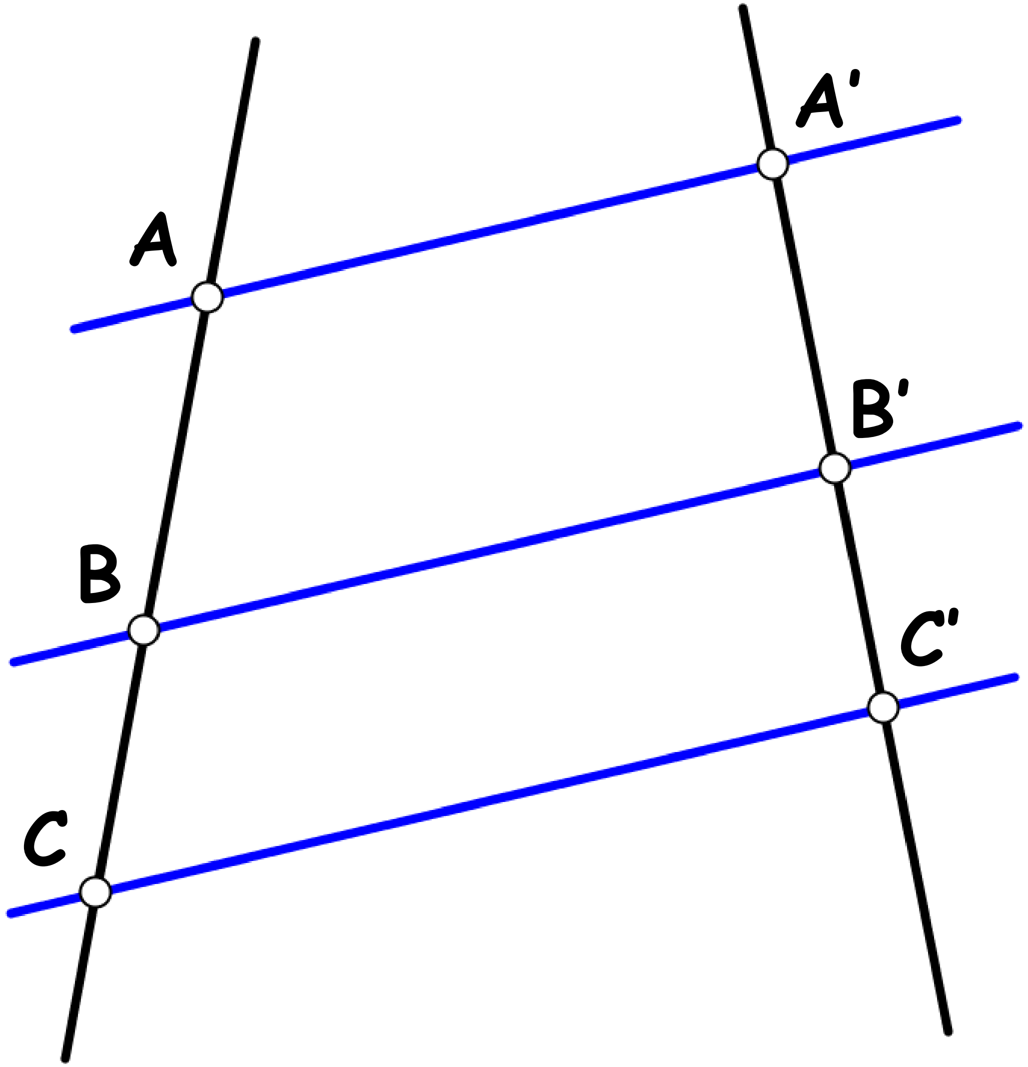


THALES

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

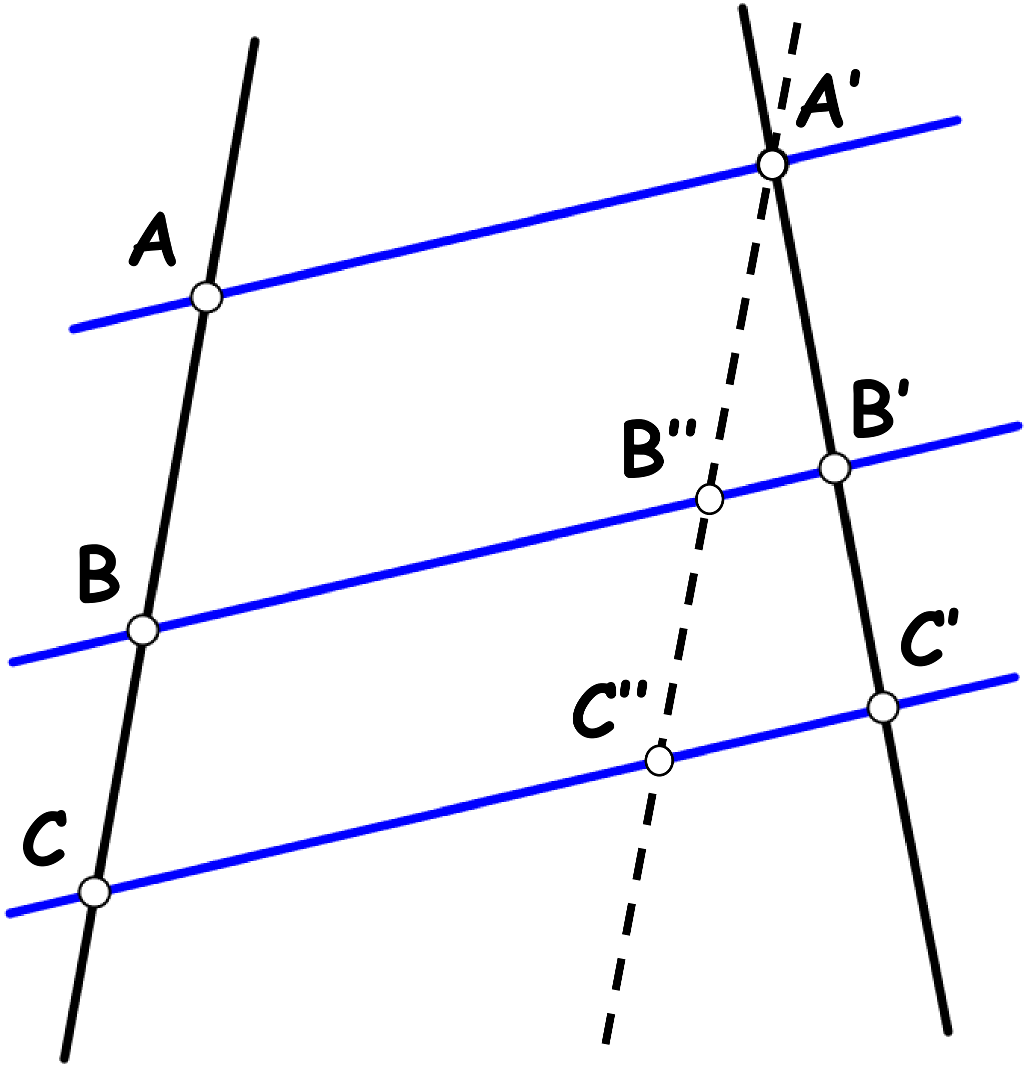


« L'ancienne » géométrie du triangle

THALES

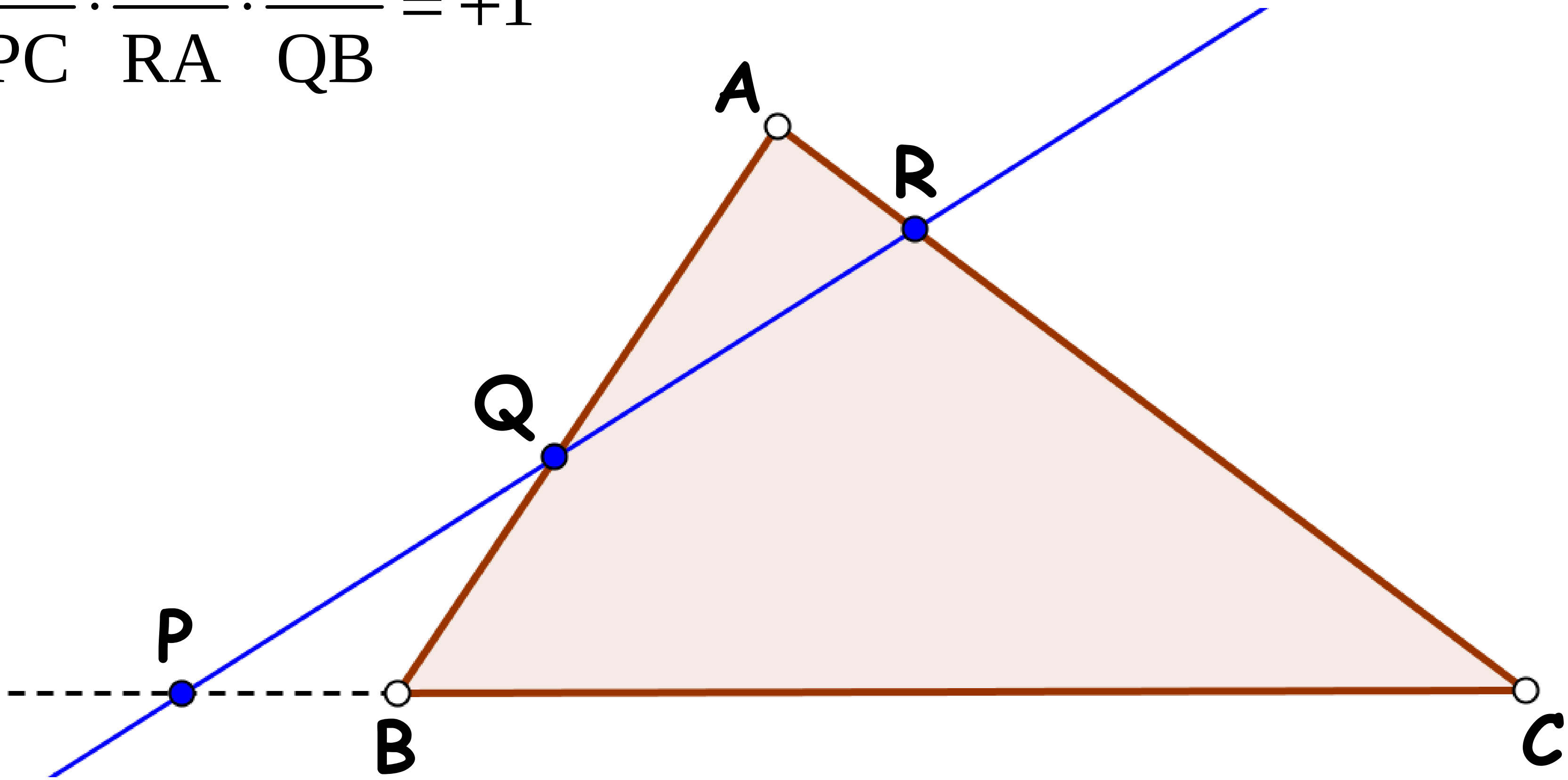
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

$$\frac{A'B''}{A'B'} = \frac{A'C''}{A'C'} = \frac{B'B''}{C'C''}$$



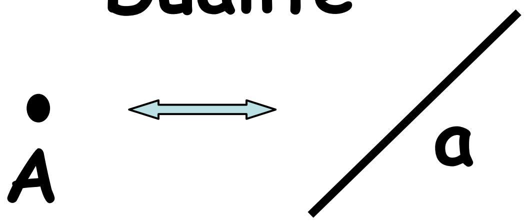
Ménélaüs

$$\frac{PB}{PC} \cdot \frac{RC}{RA} \cdot \frac{QA}{QB} = +1$$

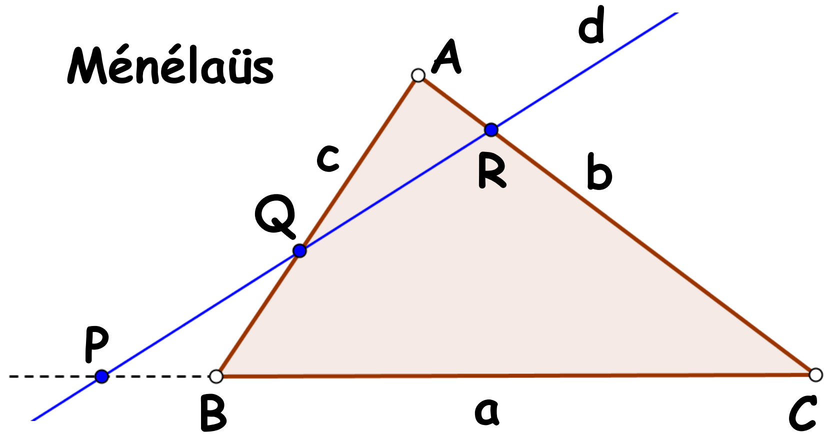


« L'ancienne » géométrie du triangle

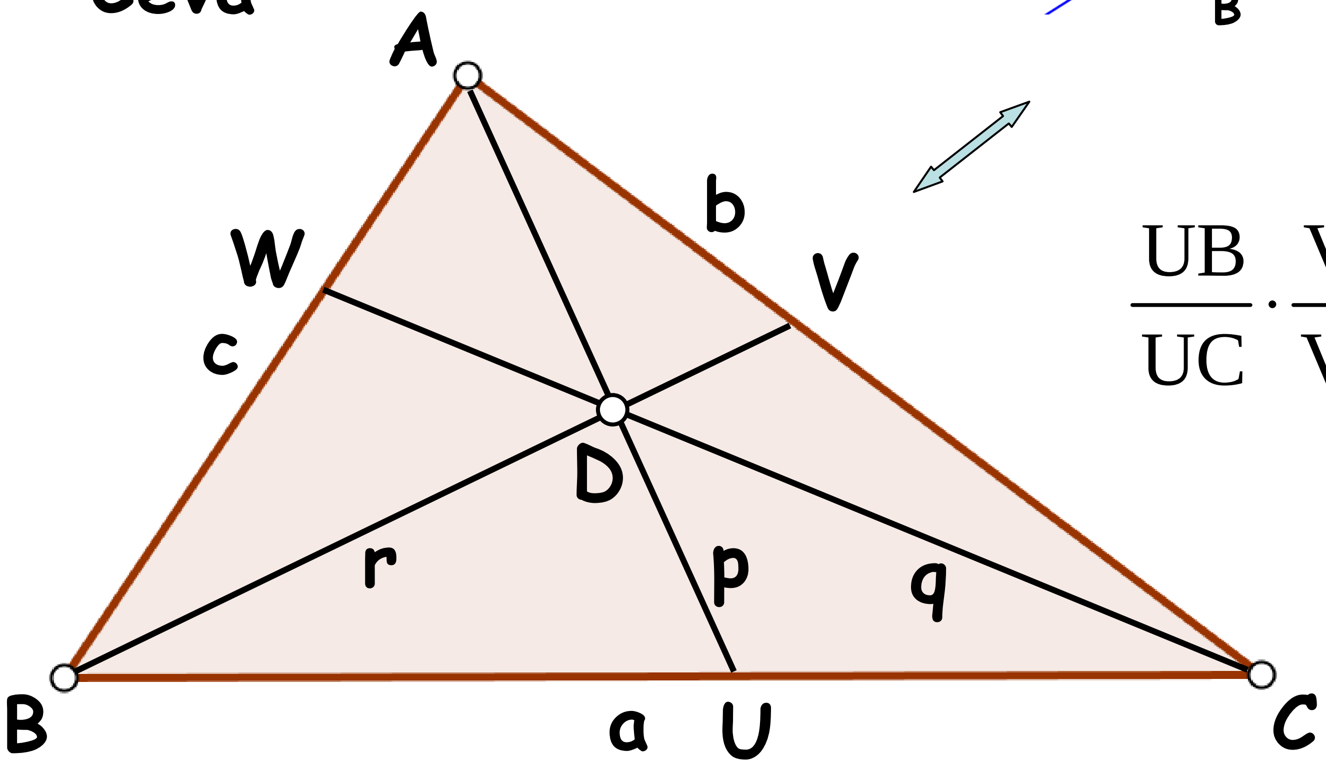
Dualité



Ménélaüs



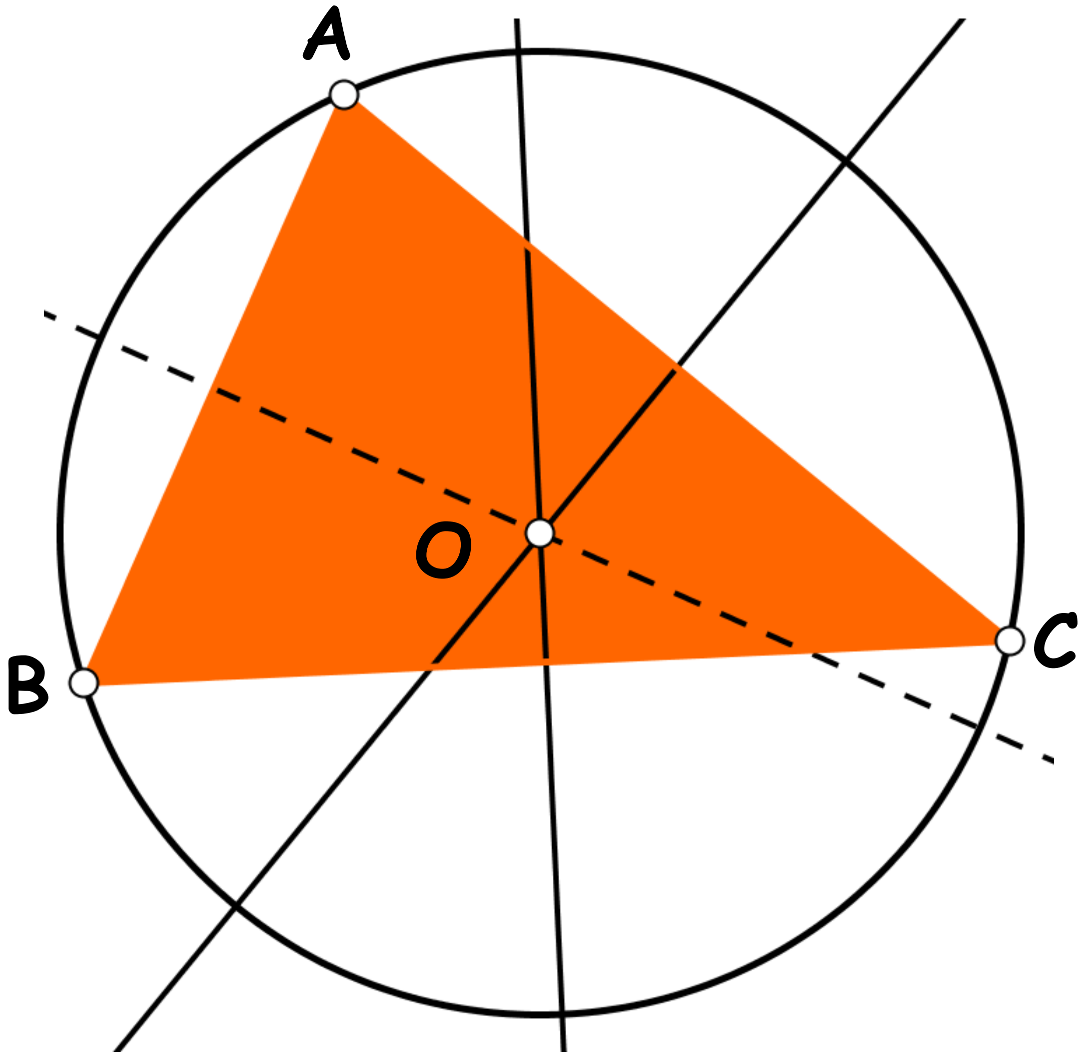
Céva



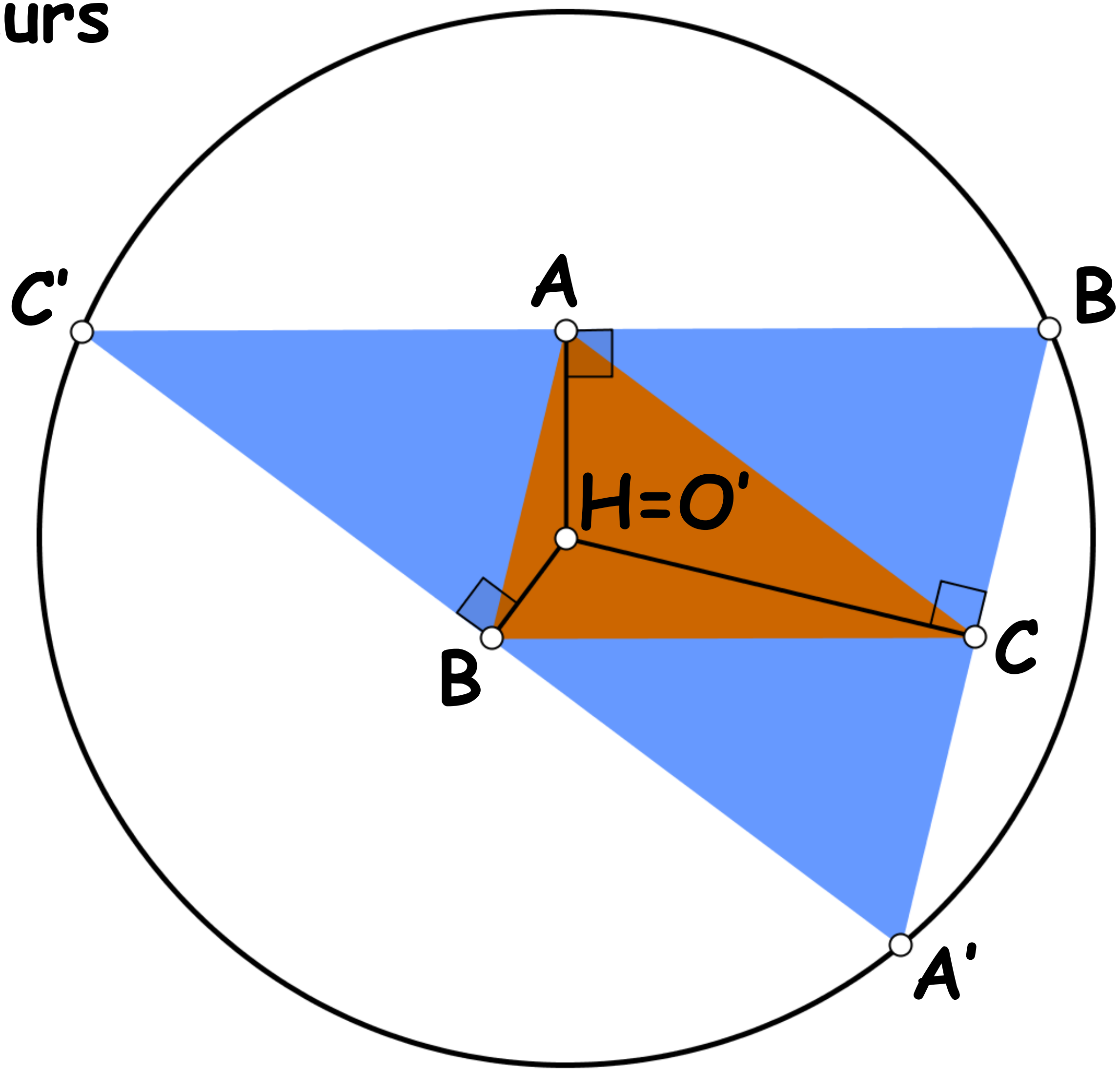
$$\frac{UB}{UC}\cdot\frac{VC}{VA}\cdot\frac{WA}{WB}=-1$$

droites concourantes

Médiatrices



Hauteurs

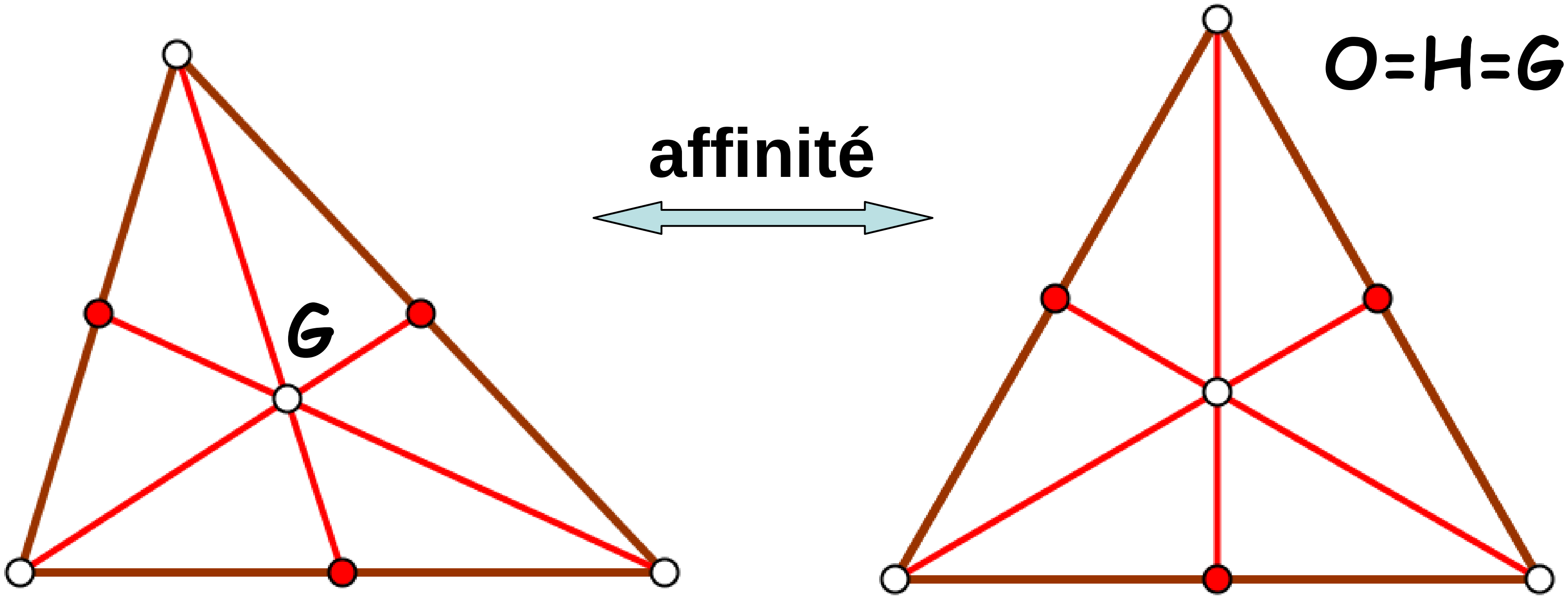


droites concourantes

Médianes

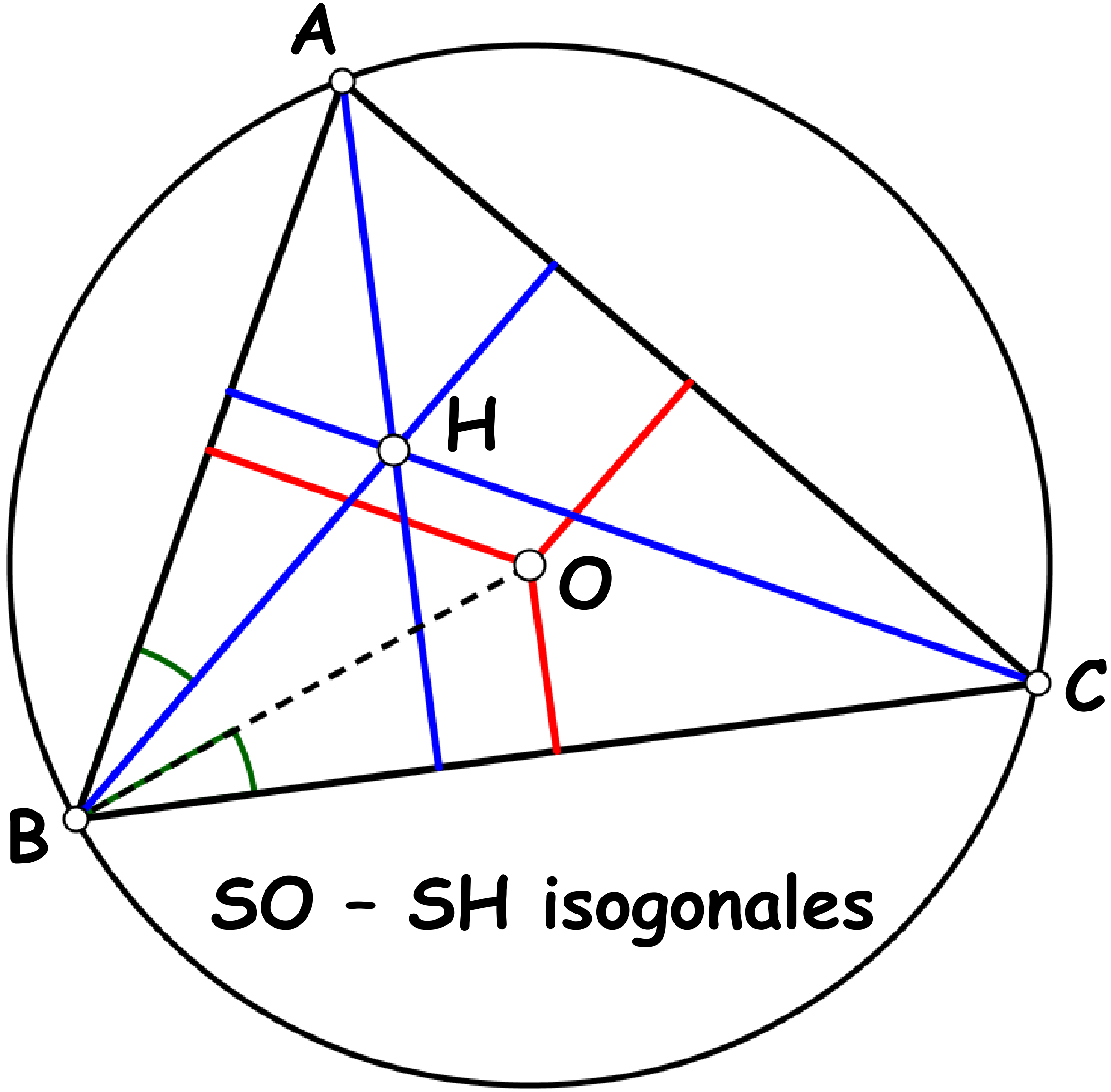
Affinité conserve: alignement-concourances
ne conserve pas: angle (orthogonalité)

droites concourantes



médianes concourantes ← médianes=médiatrices

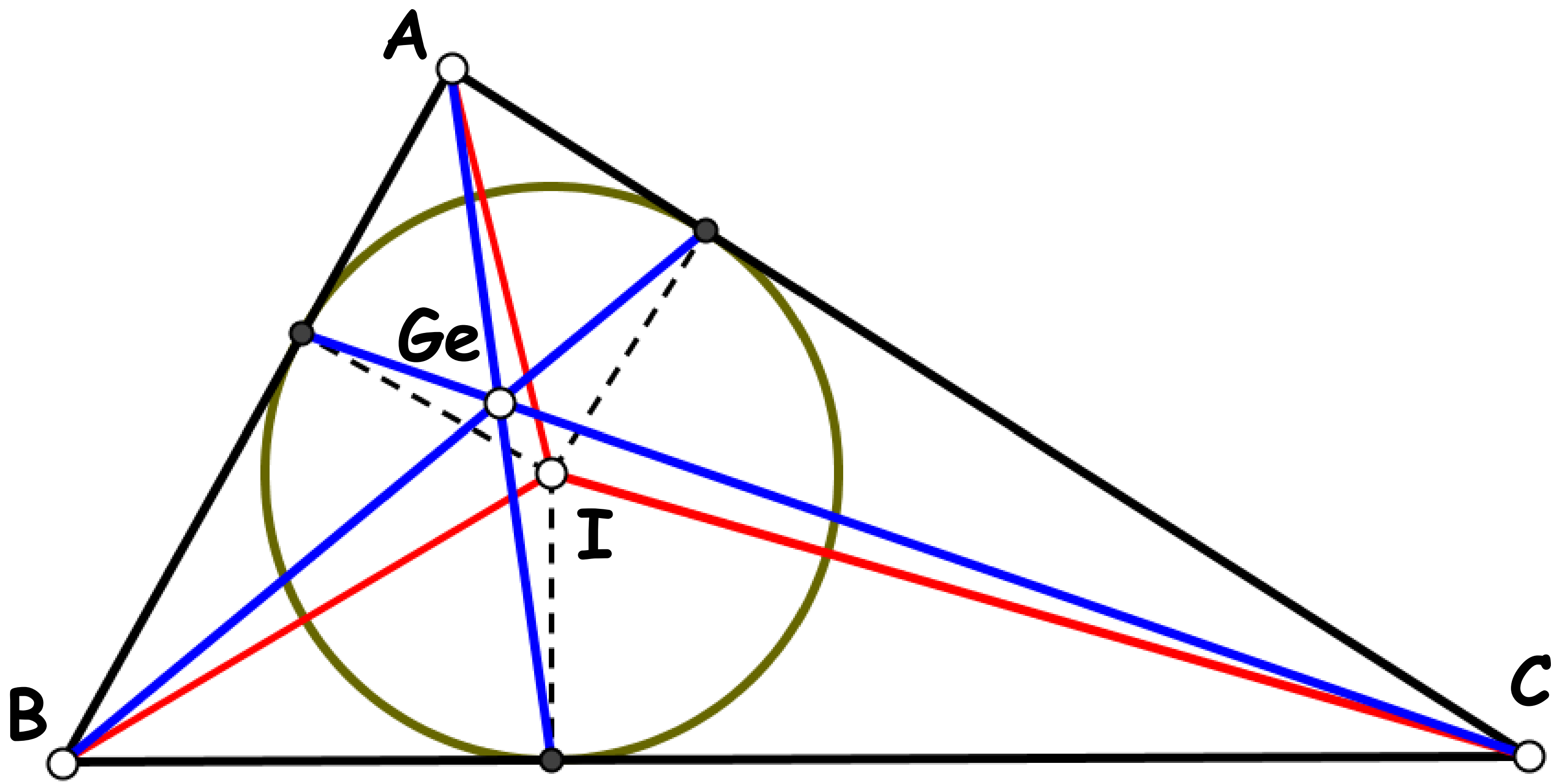
OH!



SO – SH isogonales

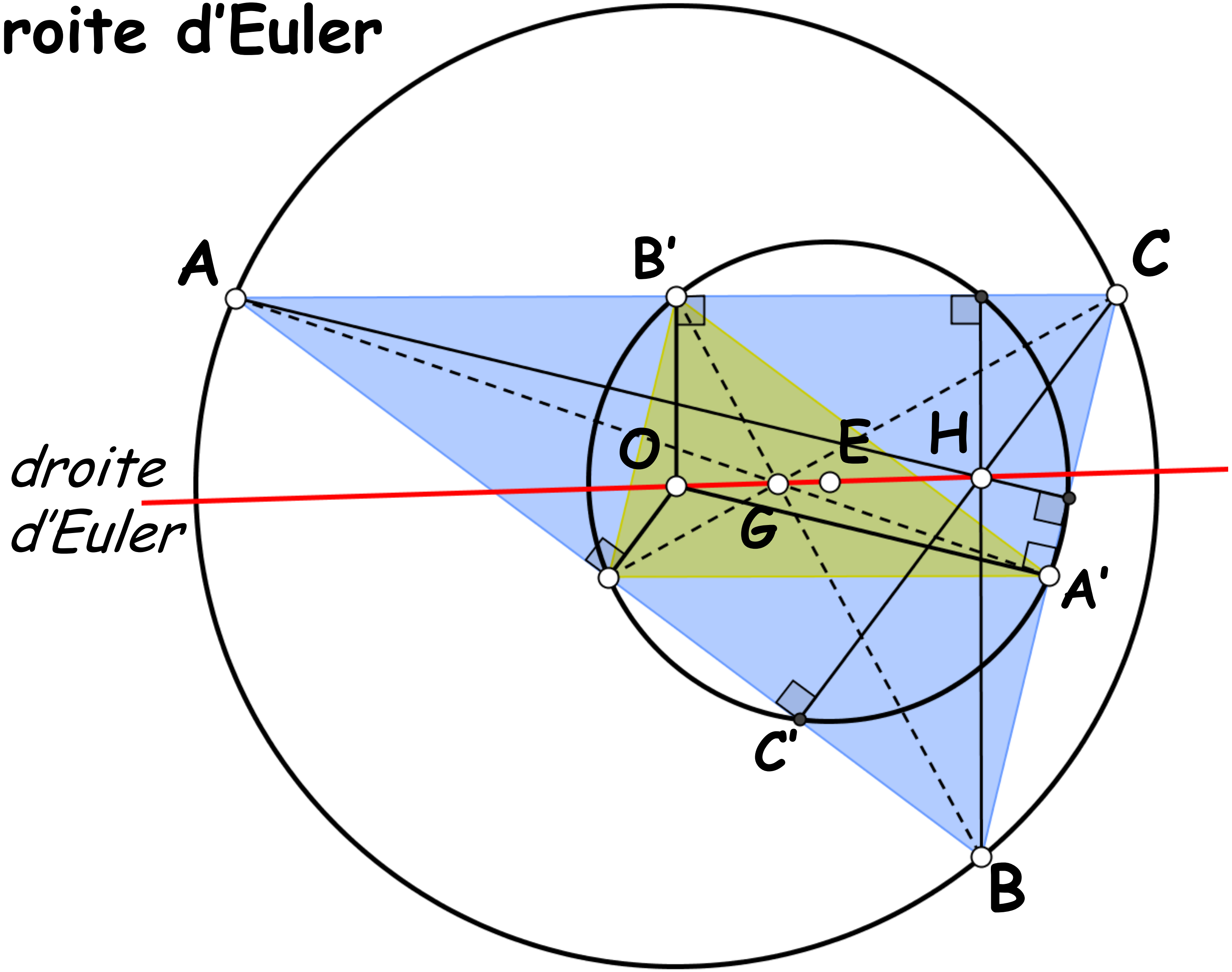
Inscrit - Gergonne

Centres classiques

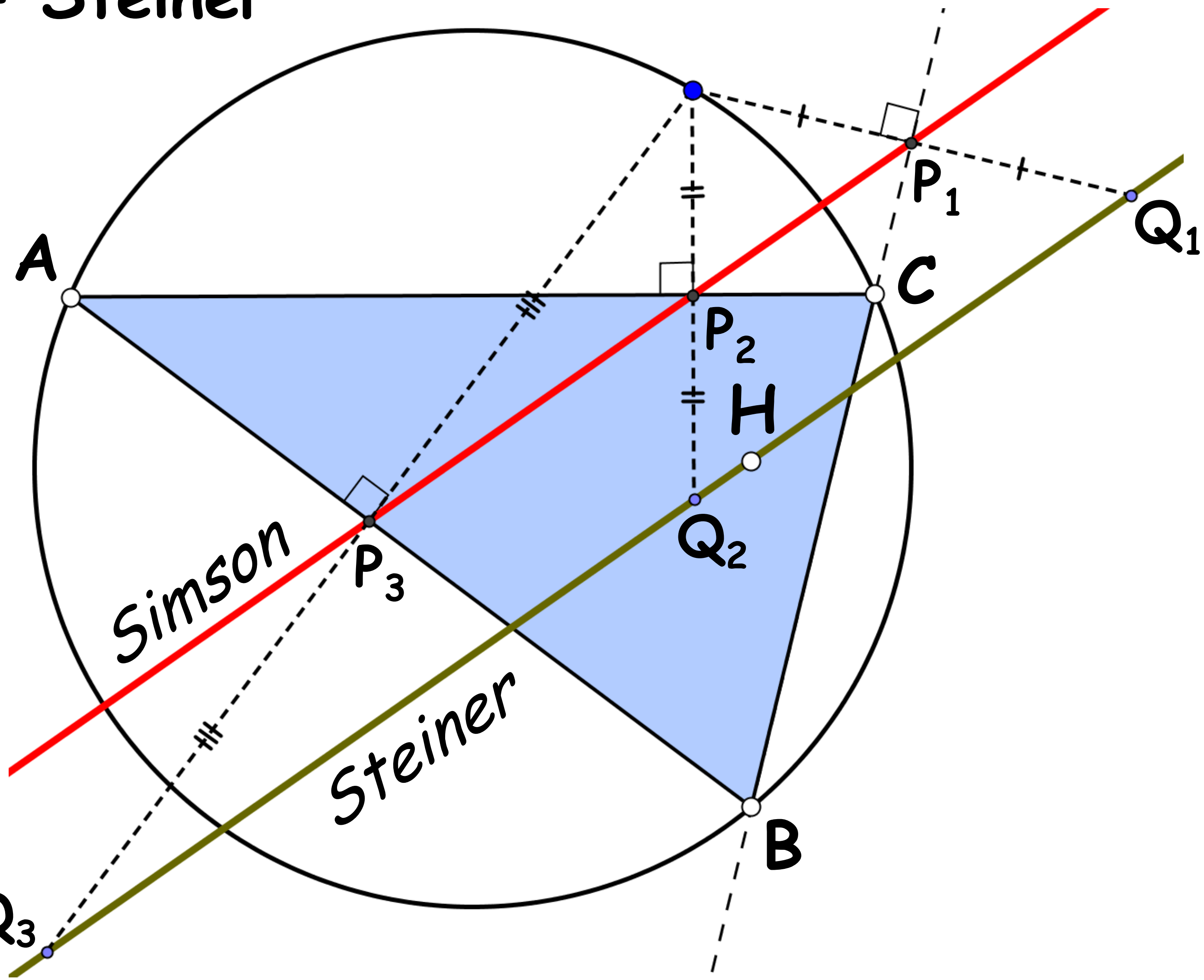


Droite d'Euler

Droites classiques

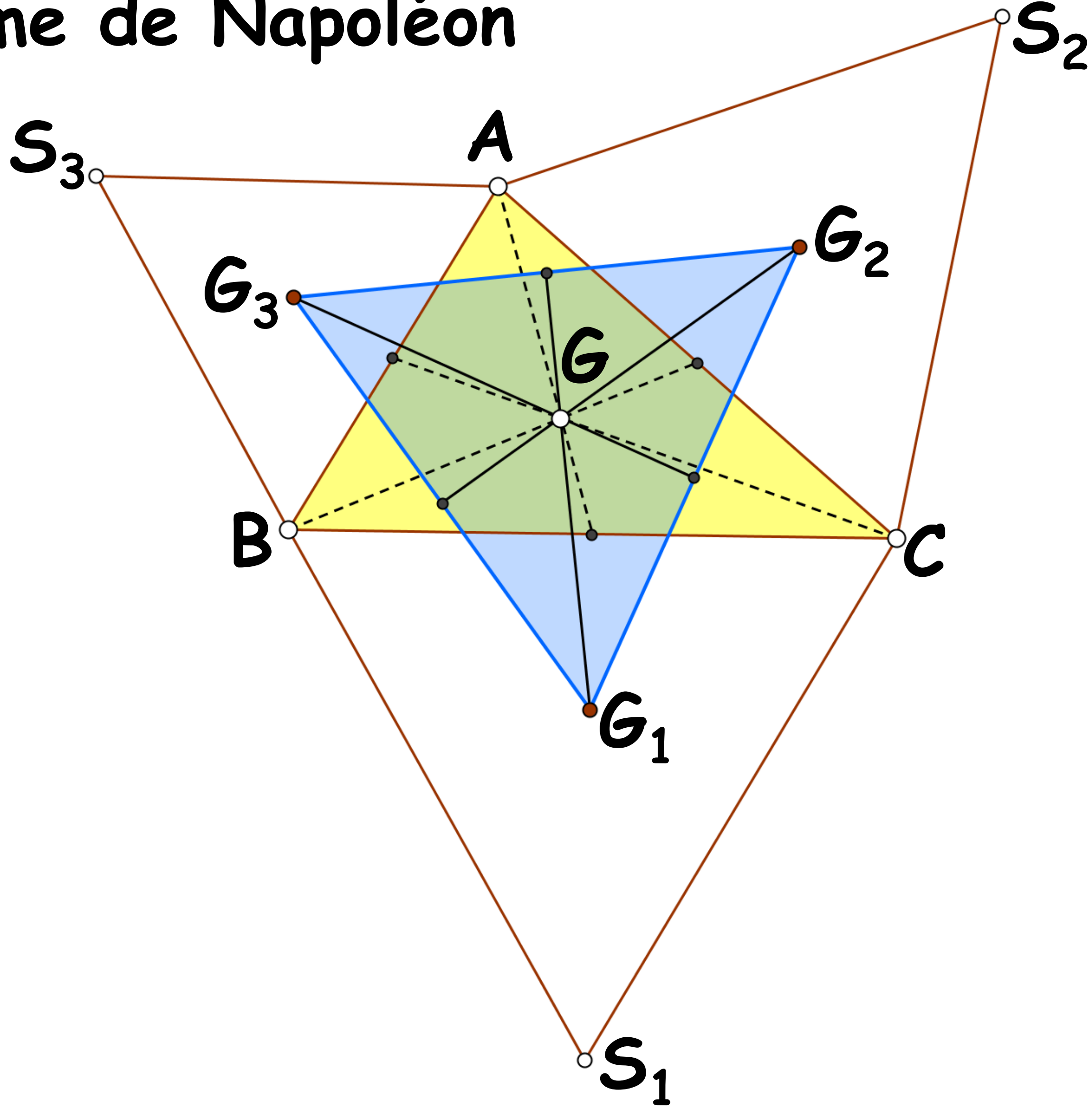


Simson - Steiner

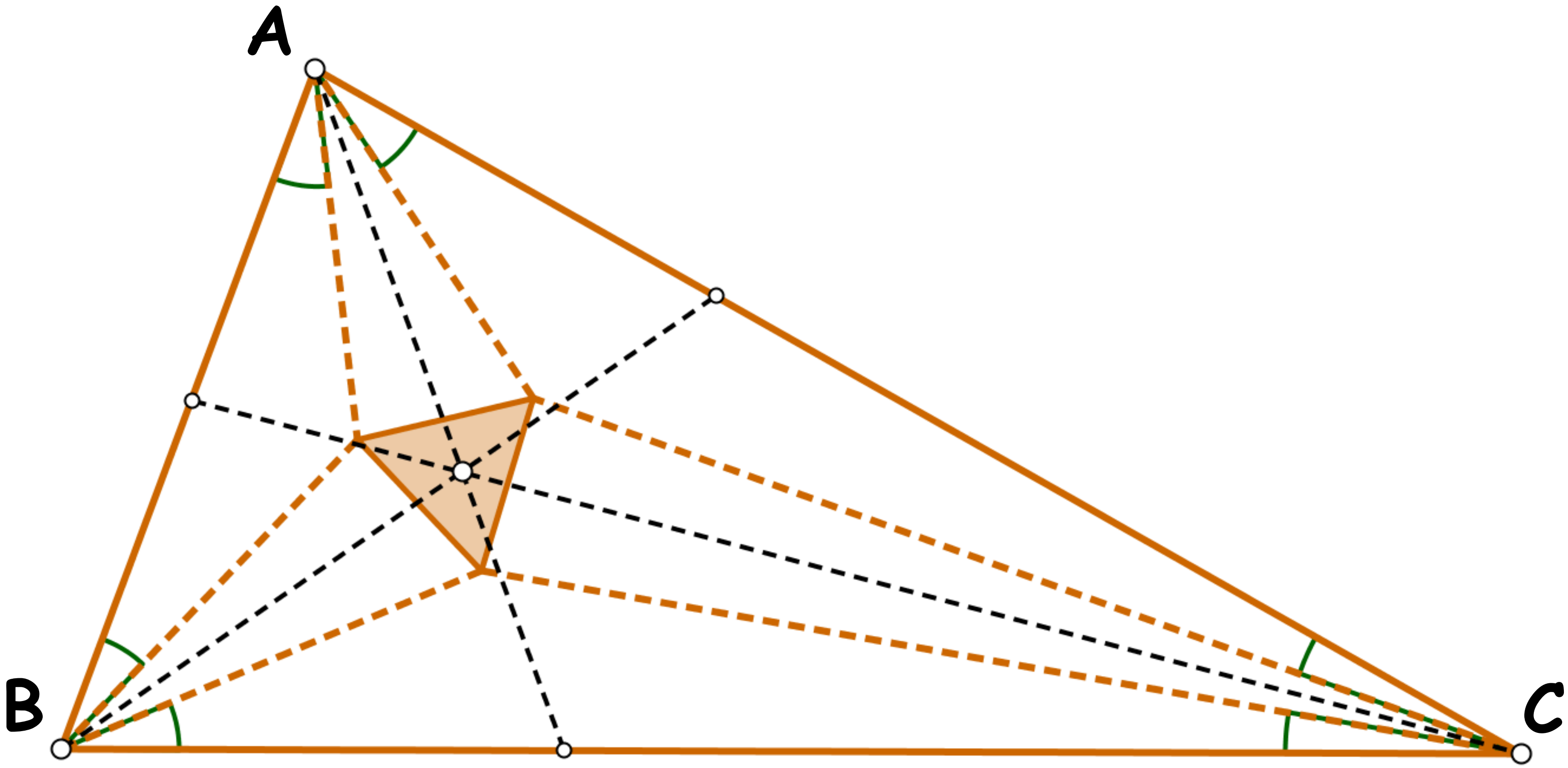


Théorèmes classiques

Théorème de Napoléon



Miracle de Morley



La « nouvelle » géométrie du triangle

Regain d'intérêt pour la géométrie du triangle depuis les années « 80 ».

Rappels : systèmes de coordonnées

Isoconjugaison : transformations isotomique et isogonale

Lois de groupes : Triangle, Cubique

Exemples

Notations de Conway

Triangle ΔABC de surface $S/2$.

Pour tout angle θ, on note : $S_\theta = S.\cot(\theta)$

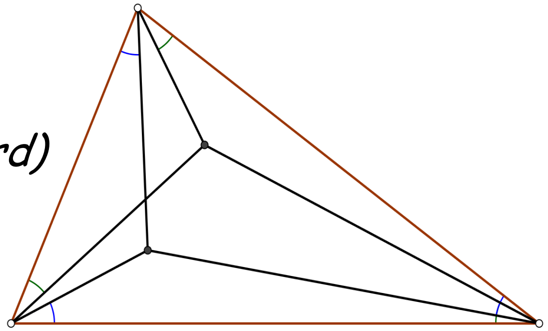
De la loi des cosinus, nous obtenons :

$S_A=(b^2+c^2-a^2)/2=b.c.\cos(A)$ $\quad S_B=(c^2+a^2-b^2)/2$ $\quad S_C=(a^2+b^2-c^2)/2$

(S_A = puissance de A par rapport au cercle de diamètre BC)

On note : $S_{AB} = S_A S_B$

Relations de Conway :



$a^2 = S_B+S_C$; $b^2 = S_C+S_A$; $c^2 = S_A+S_B$
$S_A+S_B+S_C = (a^2+b^2+c^2)/2 = S_\omega$ *(ω est l'angle de Brocard)*
$S_{BC} + S_{CA} + S_{AB} = S^2$
$S_{ABC} = S^2.S_\omega - a^2b^2c^2$

Distance :

Le carré de la distance entre deux points de coordonnées barycentriques absolues $P=(x:y:z)$ et $Q=(u:v:w)$ est donné par

$$d(P,Q)^2 = S_A(x-u)^2+S_B(y-v)^2+S_C(z-w)^2$$

Systèmes de coordonnées

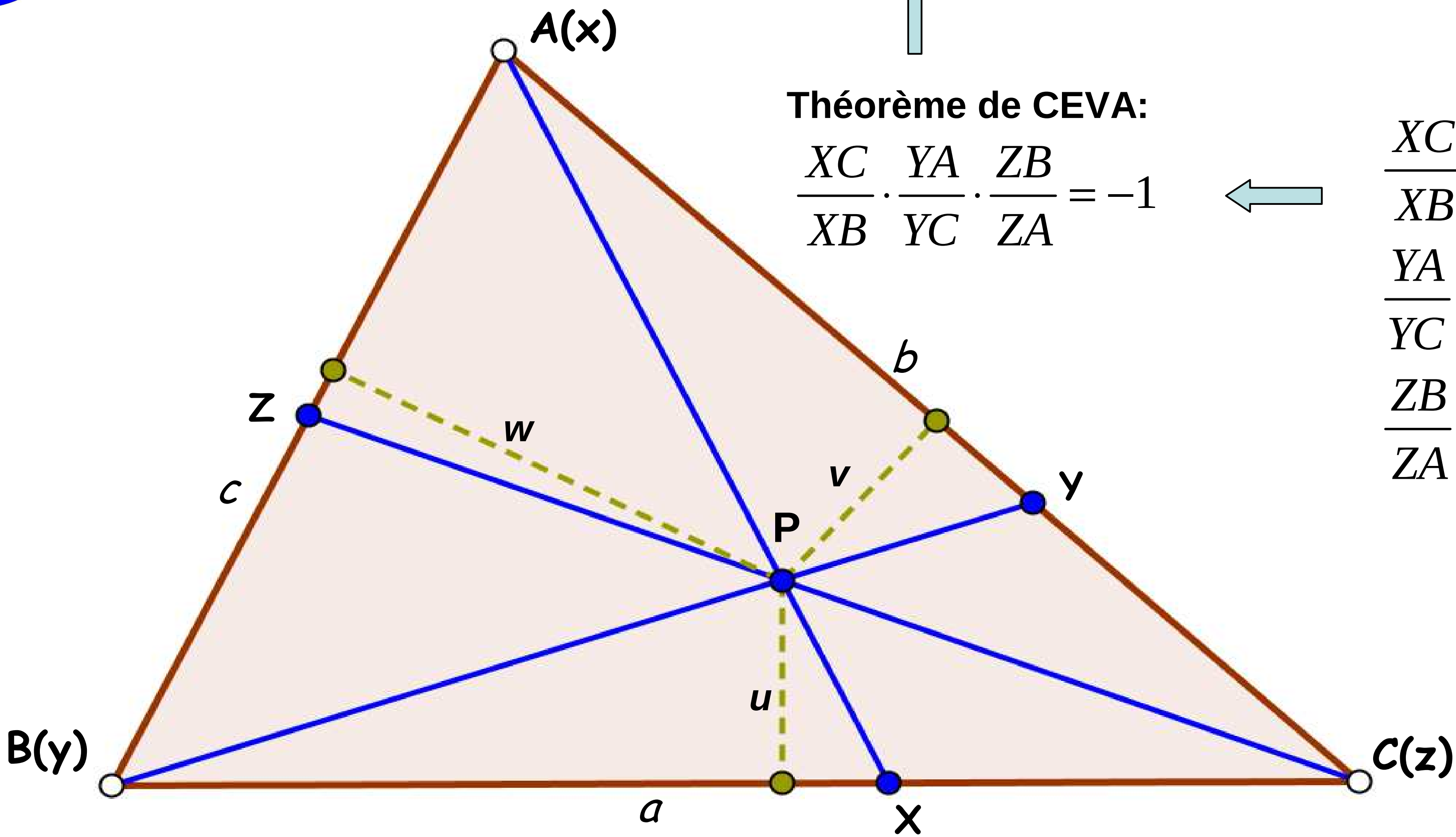
Coordonnées trilinéaires: $P(u,v,w)$ *avec* $au+bv+cw=S$

Coordonnées barycentriques: $P(x:y:z)$ $\Rightarrow$ $X(0:y:z)$, $Y(x:0:z)$, $Z(x:y:0)$

Théorème de CEVA:

$$\frac{XC}{XB}\cdot\frac{YA}{YC}\cdot\frac{ZB}{ZA}=-1$$

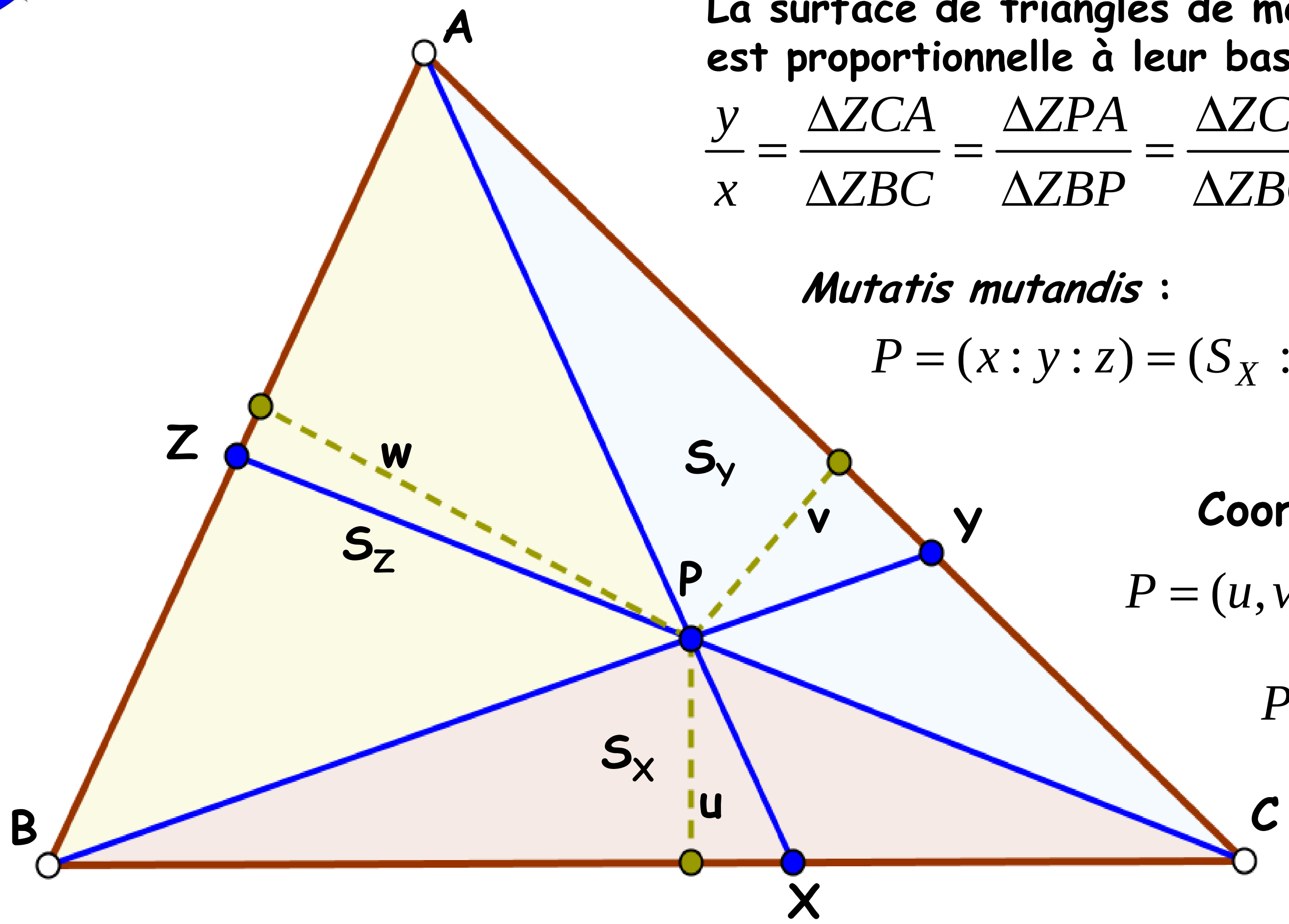
$$\frac{XC}{XB}=-\frac{y}{z}\qquad \frac{YA}{YC}=-\frac{z}{x}\qquad \frac{ZB}{ZA}=-\frac{x}{y}$$



Systèmes de coordonnées

<u>Coordonnées barycentriques</u> S=2ΔABC S_X=ΔPBC S_Y=ΔPCA S_Z=ΔPAB

Coordonnées homogènes: $P=(x:y:z)=(\lambda x:\lambda y:\lambda z)$



La surface de triangles de même hauteur est proportionnelle à leur base:

$$\frac{y}{x}=\frac{\Delta ZCA}{\Delta ZBC}=\frac{\Delta ZPA}{\Delta ZBP}=\frac{\Delta ZCA-\Delta ZPA}{\Delta ZBC-\Delta ZBP}=\frac{S_Y}{S_X}$$

Mutatis mutandis **:**

$$P=(x:y:z)=(S_X:S_Y:S_Z)=(au:bv:cw)$$

$$\Updownarrow$$

Coordonnées trilinéaires:

$$P=(u,v,w)\ \textit{avec}\ \ au+bv+cw=S$$

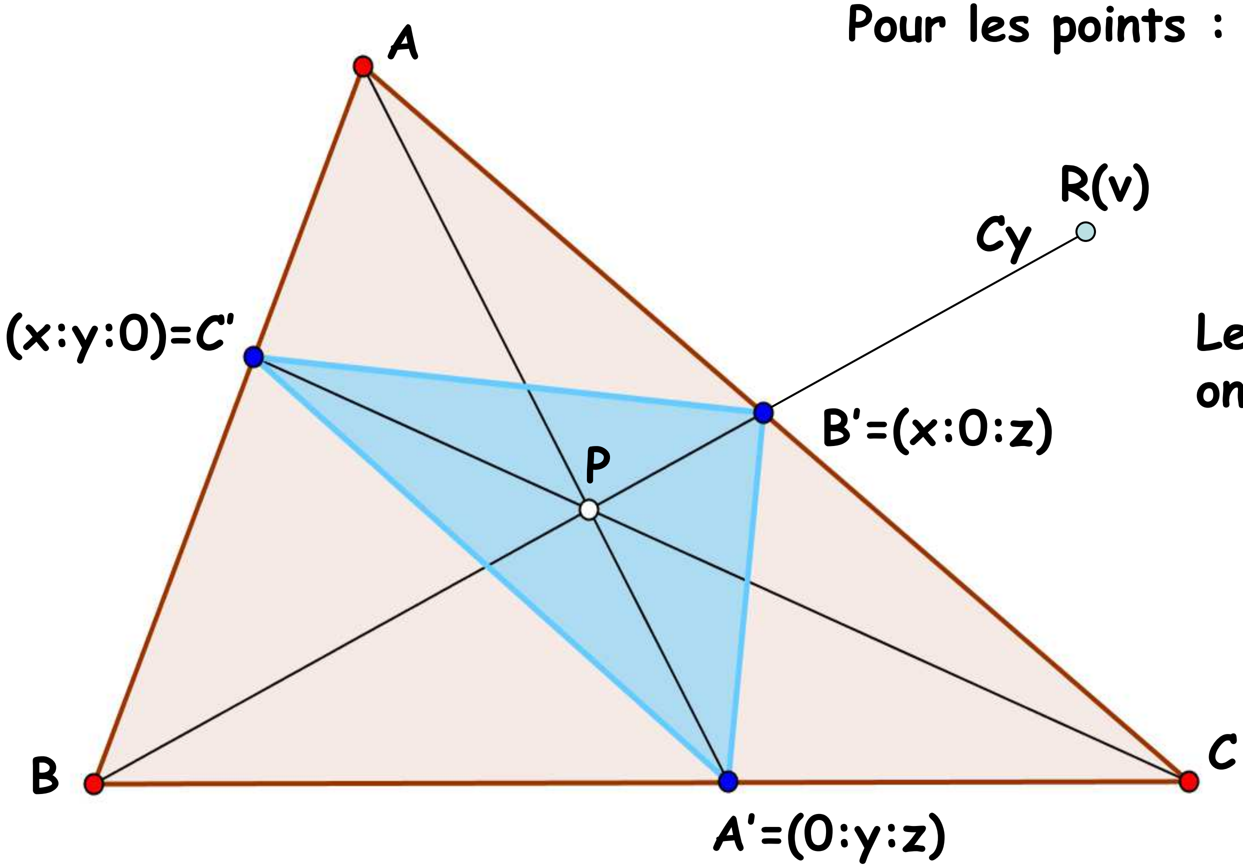
$$P=(u,v,w)=S\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{c}\right)$$

si $x+y+z=1$

Triangle pédal (*Cevian triangle*)

Le triangle A'B'C' est le triangle cévien du triangle ABC.
Le triangle ABC est le triangle anticévien du triangle A'B'C'.

La cévienne Cy est l'ensemble des points : R(u) = (x:u:z).



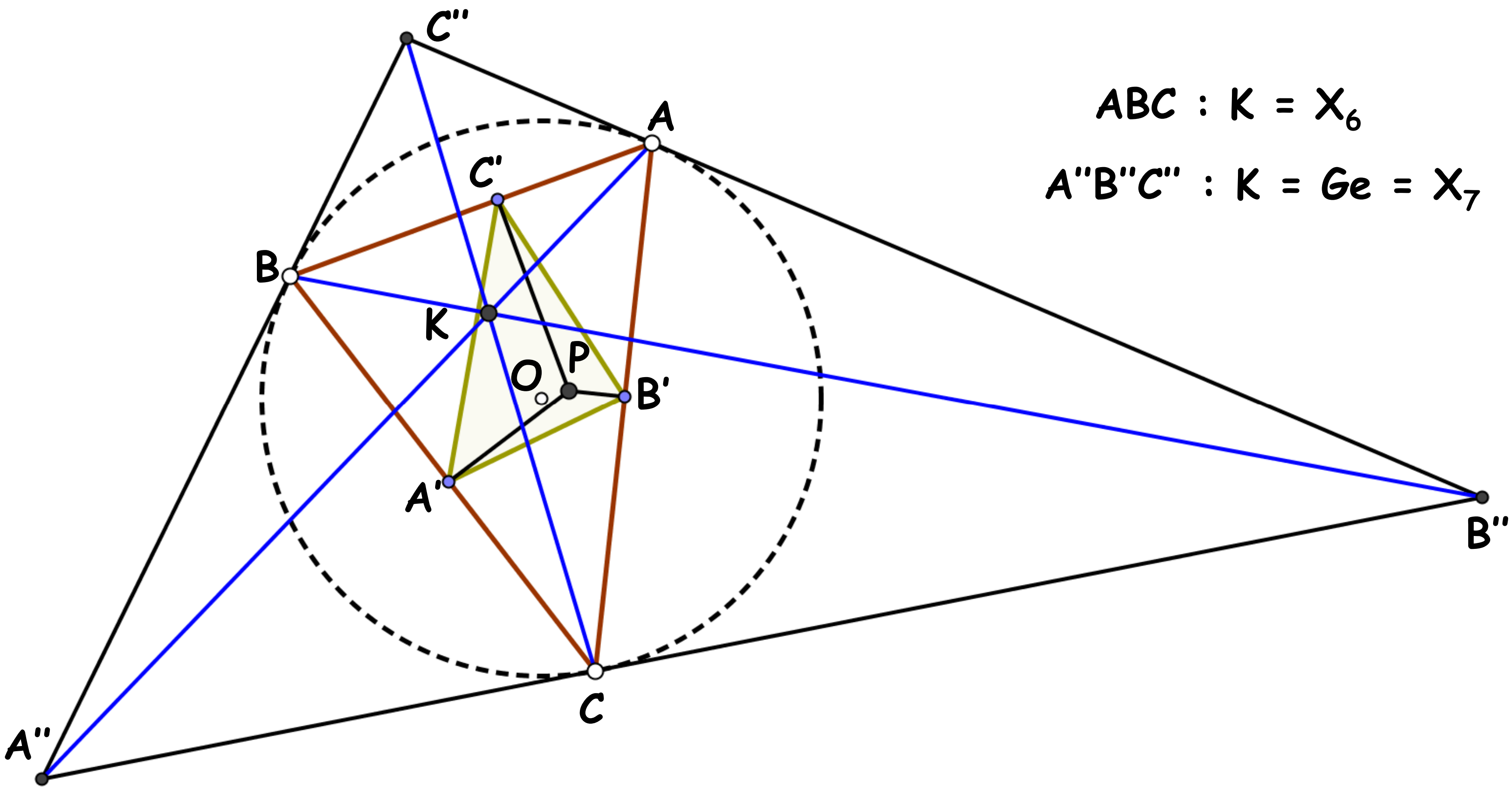
Pour les points :
Q(u) = (u : y : z)
R(v) = (x : v : z)
S(w) = (x : y : w)

Les céviennes AQ, BR, CS ont pour point commun :

P = (x : y : z)

Triangle podaire (*Pedal triangle*)

Le triangle A'B'C' est le triangle podaire du triangle ABC / P
Le triangle A''B''C'' est le triangle antipodaire du triangle ABC / O
Le triangle A''B''C'' est le triangle anticévien du triangle ABC / K



ABC : K = X_6

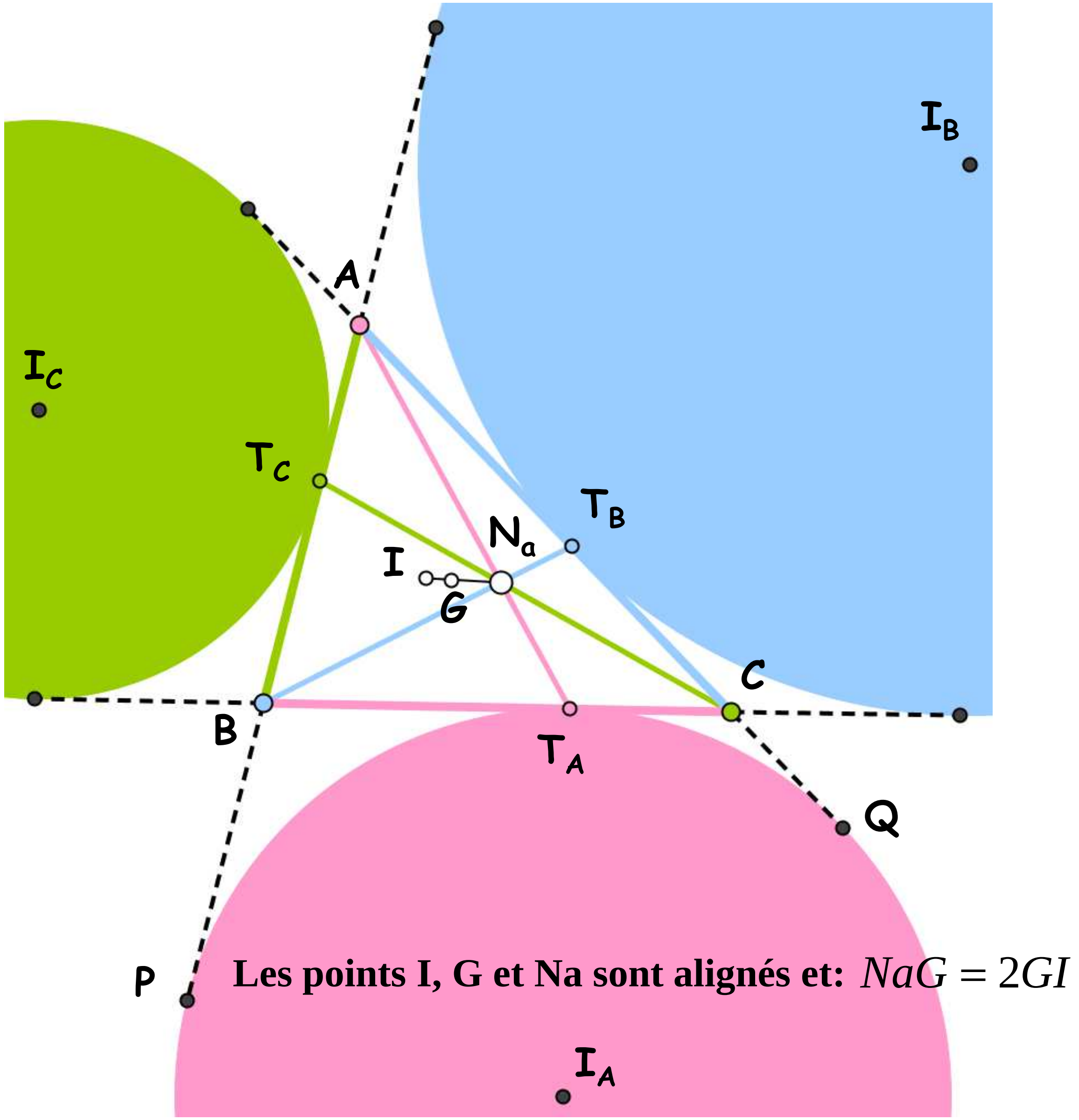
A''B''C'' : K = Ge = X_7

Calcul barycentrique

Point de Nagel

$$AP = AQ$$
$$\Downarrow$$
$$AB + BT_A = AC + CT_A = s$$
$$\Downarrow$$
$$BT_A = s - c$$
$$CT_A = s - b$$

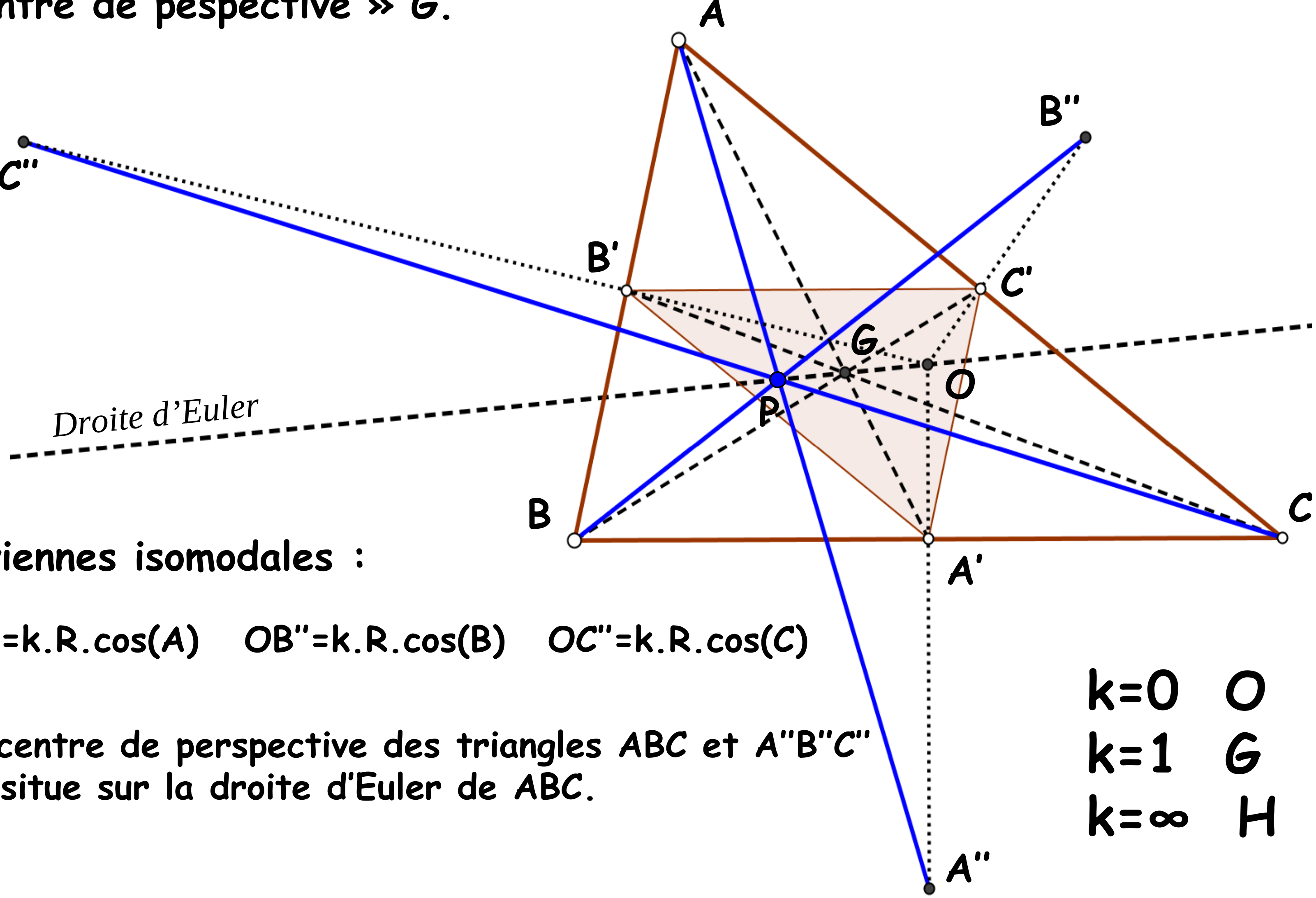
$$T_A = (\ 0 : s-b : s-c)$$
$$T_B = (s-a : 0 : s-c)$$
$$T_C = (s-a : s-b : 0\ )$$
$$\Downarrow$$
$$Na = (s-a : s-b : s-c)$$
$$\Updownarrow$$
$$sNa = (s-a)A + (s-b)B + (s-c)C$$
$$sNa = s(A+B+C) - (aA+bB+cC)$$
$$sNa = 3sG - 2sI$$
$$\boxed{Na = 3G - 2I}$$



Les points I, G et Na sont alignés et: $NaG = 2GI$

Triangle en perspective

Triangle ABC en « perspective » avec le triangle médian A'B'C' via le « centre de pespective » G.



Céviennes isomodales :

OA''=k.R.cos(A)   OB''=k.R.cos(B)   OC''=k.R.cos(C)

Le centre de perspective des triangles ABC et A''B''C''
Se situe sur la droite d'Euler de ABC.

k=0   O
k=1   G
k=∞   H

Centres du triangles

Point du triangle dont la position relative par rapport aux sommets est invariante par similitude (rotation, symétrie, homothétie).

Remarque: *les points de Brocard ne sont pas répertoriés parmi les « Triangle Center ».*

<u>Fonction centrale</u>: fonction *f(a,b,c)* homogène et bisymétrique (/(b,c)).

$$f(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda^n f(a,b,c) \qquad f(a,b,c) = f(a,c,b)$$

<u>Centre de triangle</u>: P = (*f(a,b,c)*:*f(b,c,a)*:*f(c,a,b)*) = [*f(a,b,c)*]

X_1	Centre du cercle inscrit	I	$a : b : c$
Centres des cercles exinscrits		I_A	$-a : b : c$
		I_B	$a : -b : c$
		I_C	$a : b : -c$
X_2	Centre de gravité	G	$1 : 1 : 1$
X_3	Centre du cercle circonscrit	O	$\left[a^2(b^2+c^2-a^2)\right]$
X_4	Orthocentre	H	$\left[(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)\right]$
X_5	Centre du cercle d'Euler	E	$a\cos(B-C) : b\cos(C-A) : c\cos(A-B)$

X_6	Point de Lemoine	K	$a^2 : b^2 : c^2$
Points symmédians (Lemoine) extérieurs		K_A	$a^2 : b^2 : c^2$
		K_B	$a^2 : b^2 : c^2$
		K_C	$a^2 : b^2 : c^2$
X_7	Point de Gegonne	Ge	$(s-b)(s-c) : (s-a)(s-c) : (s-a)(s-b)$
X_8	Point de Nagel	Na	$s-a : s-b : s-c$
X_9	MittenPunkt	M	$a(b+c-a) : b(c+a-b) : c(a+b-c)$
X_{10}	Centre de Spieker	Sp	$b+c : c+a : a+b$

Multiplication de points du triangle

$X_1 = (0 : y_1 : z_1)$ $X_2 = (0 : y_2 : z_2)$

$X_1H // AB$ et $X_2K // AC$:

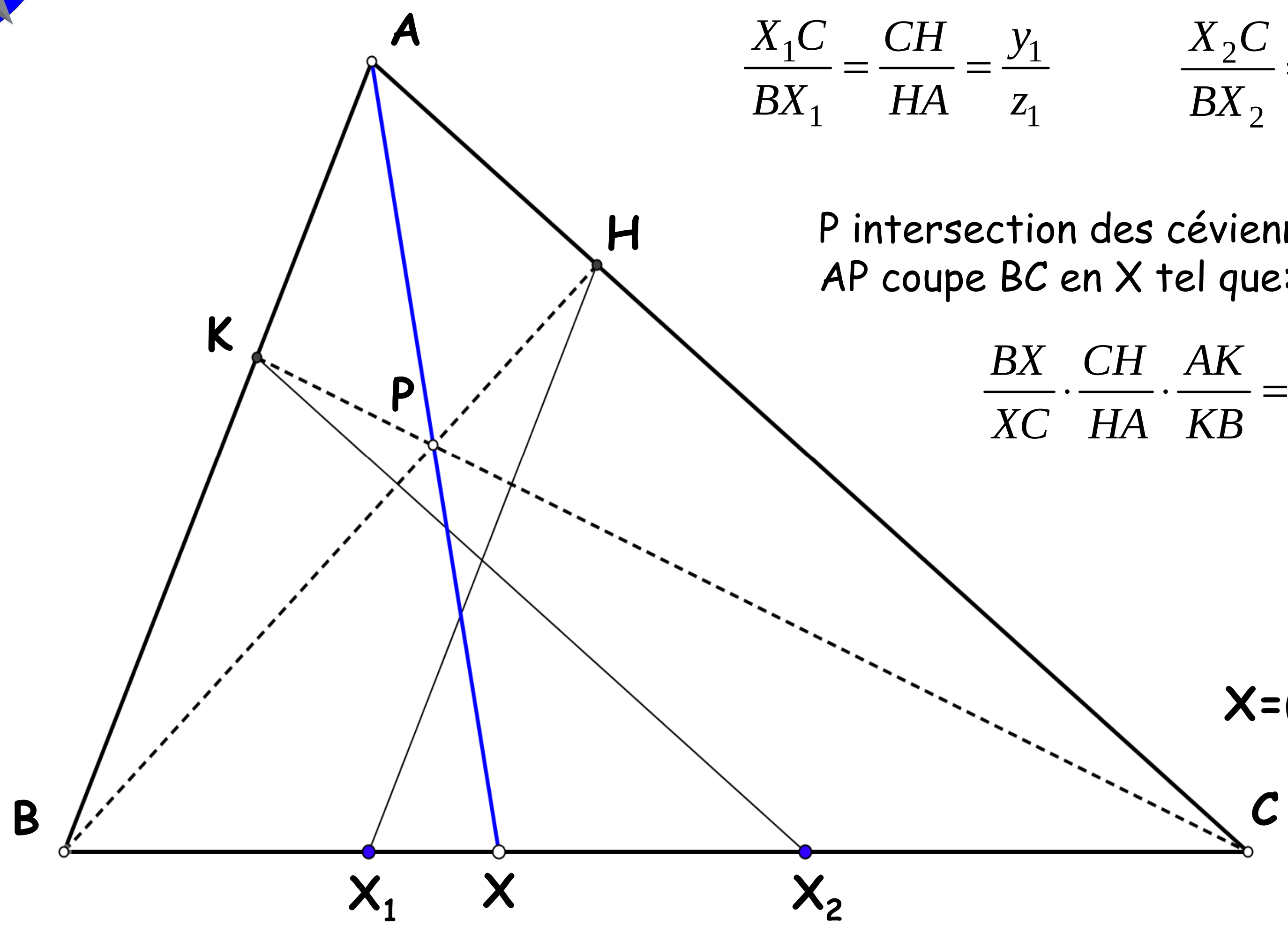
$$\frac{X_1C}{BX_1} = \frac{CH}{HA} = \frac{y_1}{z_1} \qquad \frac{X_2C}{BX_2} = \frac{AK}{KB} = \frac{y_2}{z_2}$$

P intersection des céviennes BH et CK.
AP coupe BC en X tel que:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CH}{HA} \cdot \frac{AK}{KB} = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{y_1}{z_1} \cdot \frac{y_2}{z_2} = 1$$

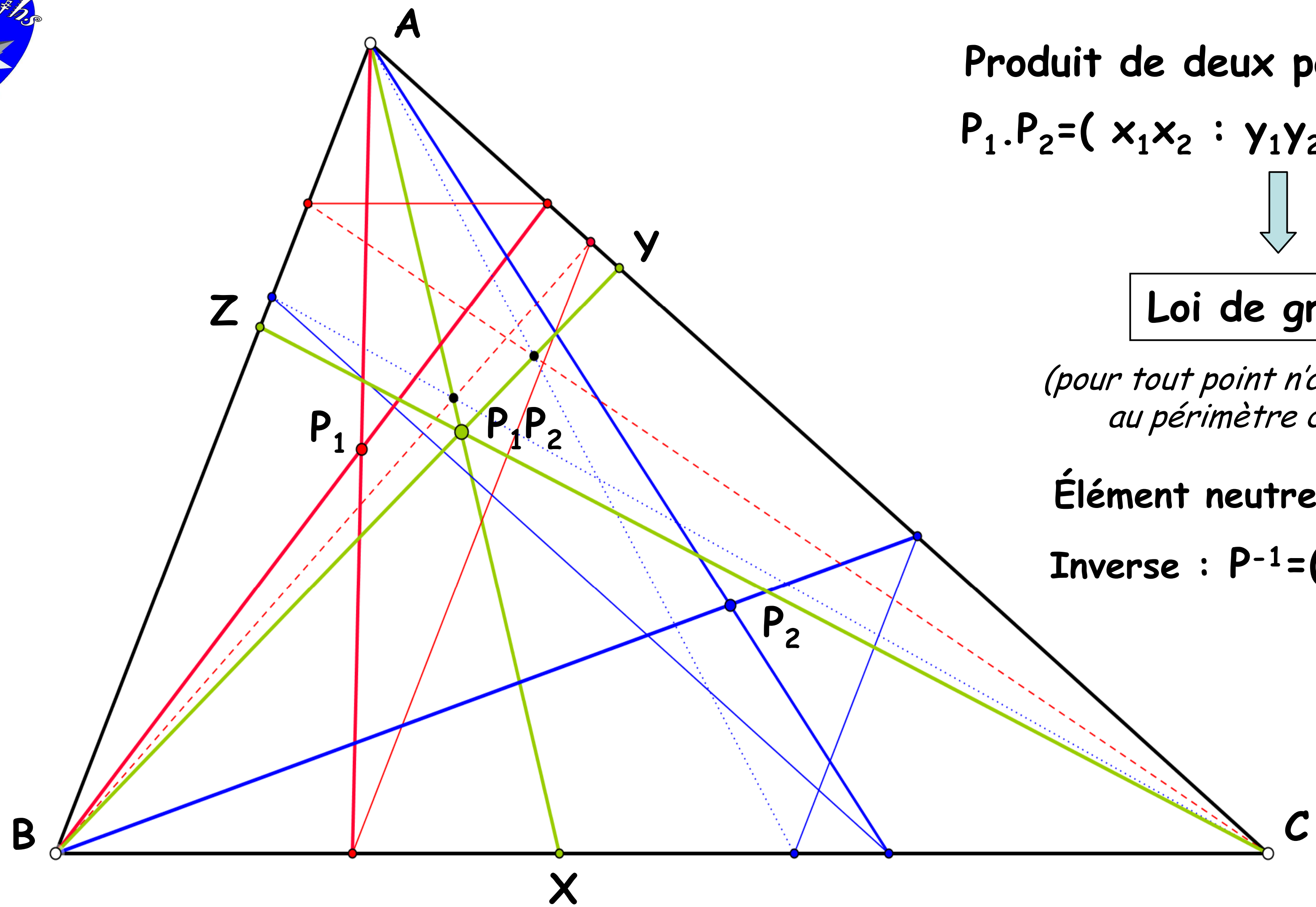
$$\frac{BX}{XC} = \frac{z_1 z_2}{y_1 y_2}$$

$X = (0 : y_1 y_2 : z_1 z_2)$



Multiplication de points du triangle

$X=(0 : y_1y_2 : z_1z_2)$ $Y=(x_1x_2 : 0 : z_1z_2)$ $Z=(x_1x_2 : y_1y_2 : 0)$



Produit de deux points:

$P_1.P_2=(x_1x_2 : y_1y_2 : z_1z_2)$

Loi de groupe

(pour tout point n'appartenant pas au périmètre du triangle)

Élément neutre : $G=(1:1:1)$

Inverse : $P^{-1}=(1/x:1/y:1/z)$

Multiplication de points du triangle

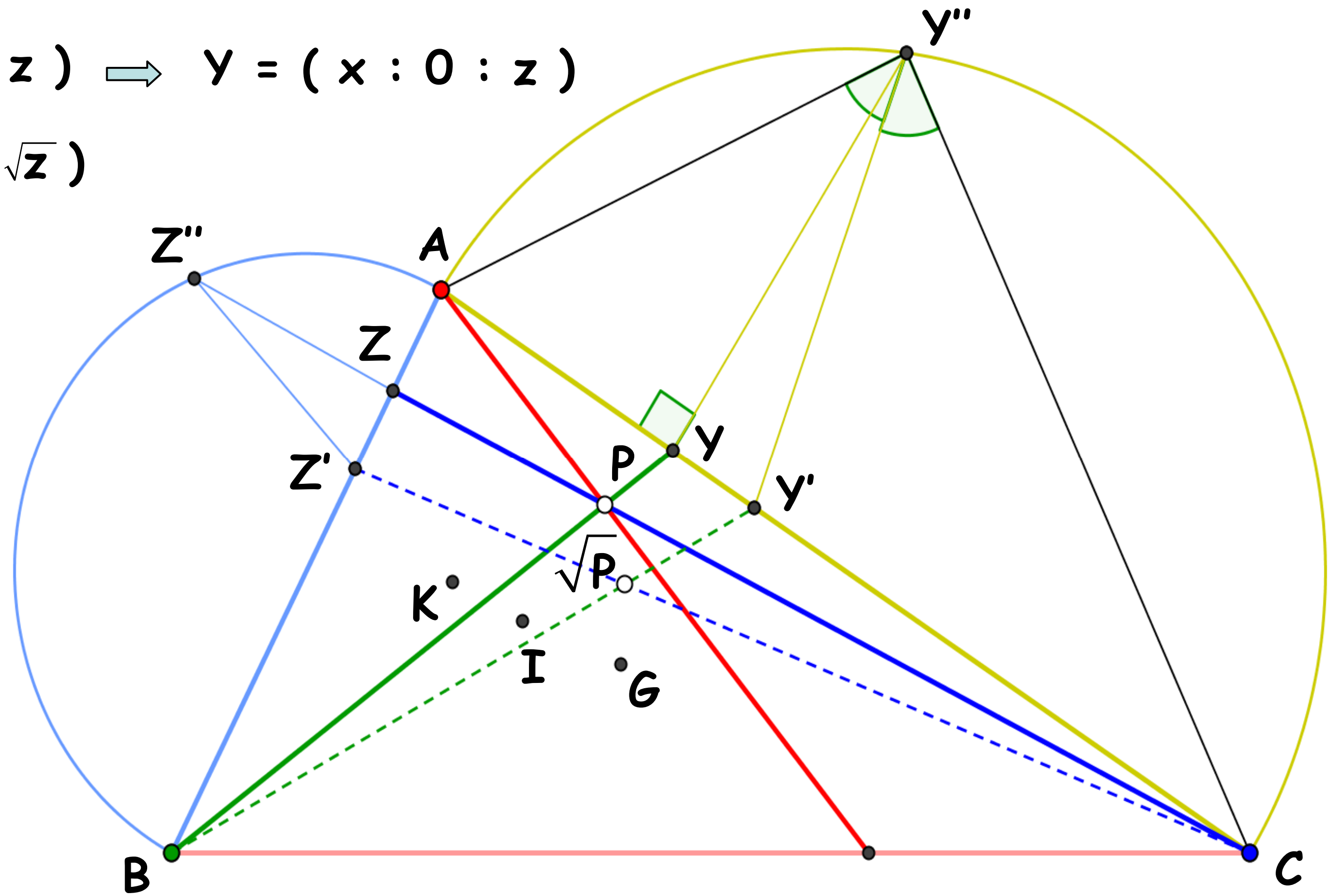
Racine Q d'un point P : Q.Q = P

Triangle rectangle ACY'': $(YY'')^2 = AY.YC \Longrightarrow (AY/YY'')^2 = AY/YC$

Bissectrice Y'Y'' : $AY'/Y'C = AY''/Y''C = AY/YY'' = \sqrt{AY/YC}$

$P = (x : y : z) \Longrightarrow Y = (x : 0 : z)$

$Y' = (\sqrt{x} : 0 : \sqrt{z})$



$G=(1:1:1)$

$I=(a:b:c)$

$K=(a^2:b^2:c^2)$

$\sqrt{G} = G$

$\sqrt{K} = I$

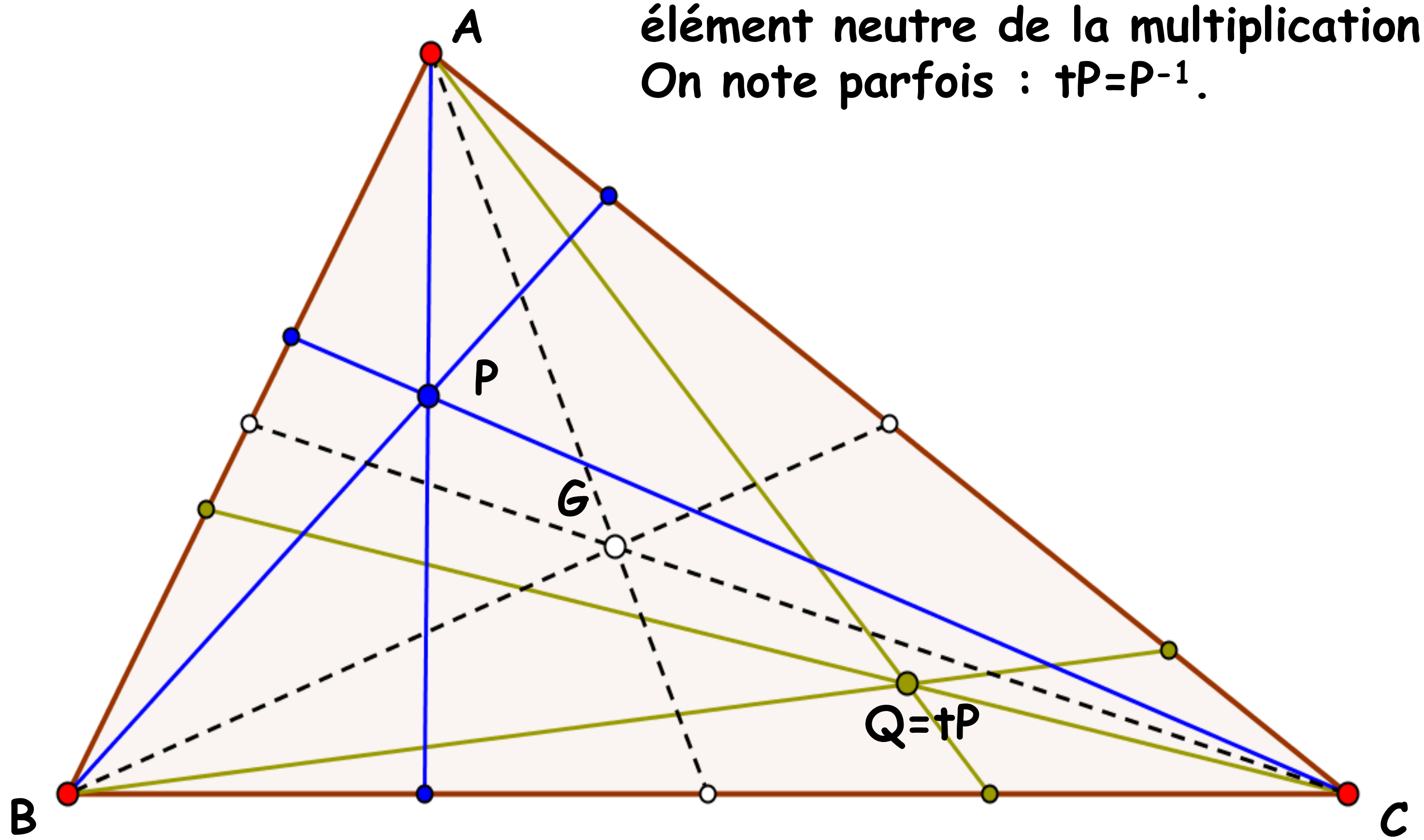
Conjugaison isotomique

Transformation involutive *(hors périmètre)* :

$P = (x : y : z) \rightarrow tP = (1/x : 1/y : 1/z)$

Point invariant : $G=(1:1:1)$

Quel que soit P, P.tP=G,
élément neutre de la multiplication.
On note parfois : $tP=P^{-1}$.

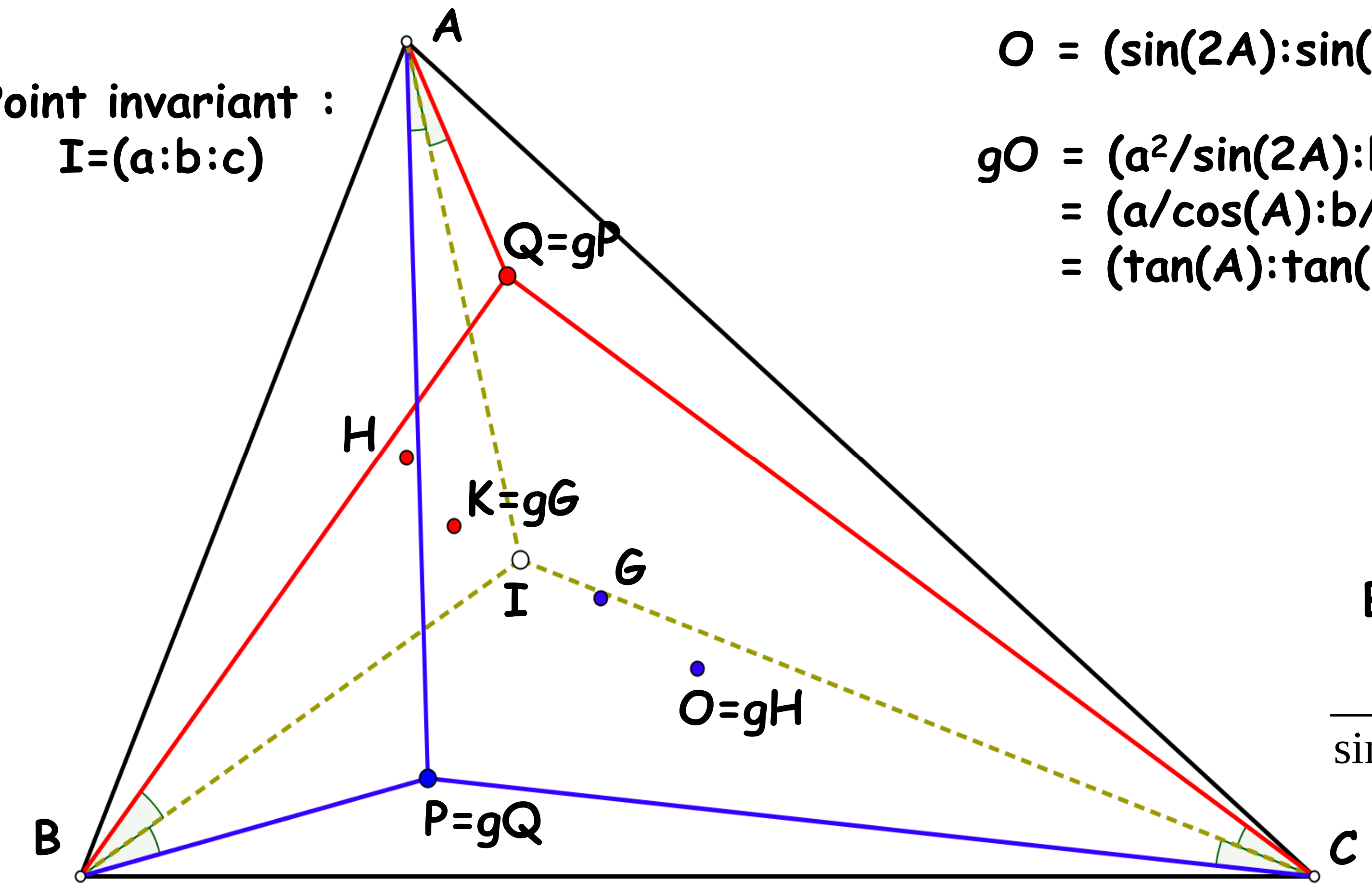


Conjugaison isogonale

Transformation involutive *(hors périmètre)* :

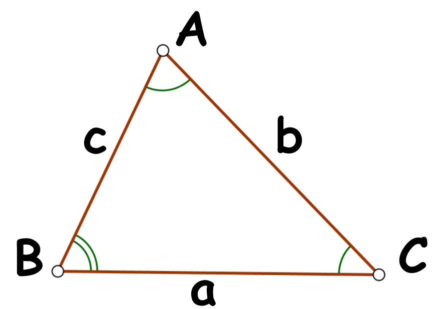
$$P = (x : y : z) \rightarrow gP = (a^2/x : b^2/y : c^2/z) \Longrightarrow P.gP=K=I^2$$

Point invariant :
I=(a:b:c)



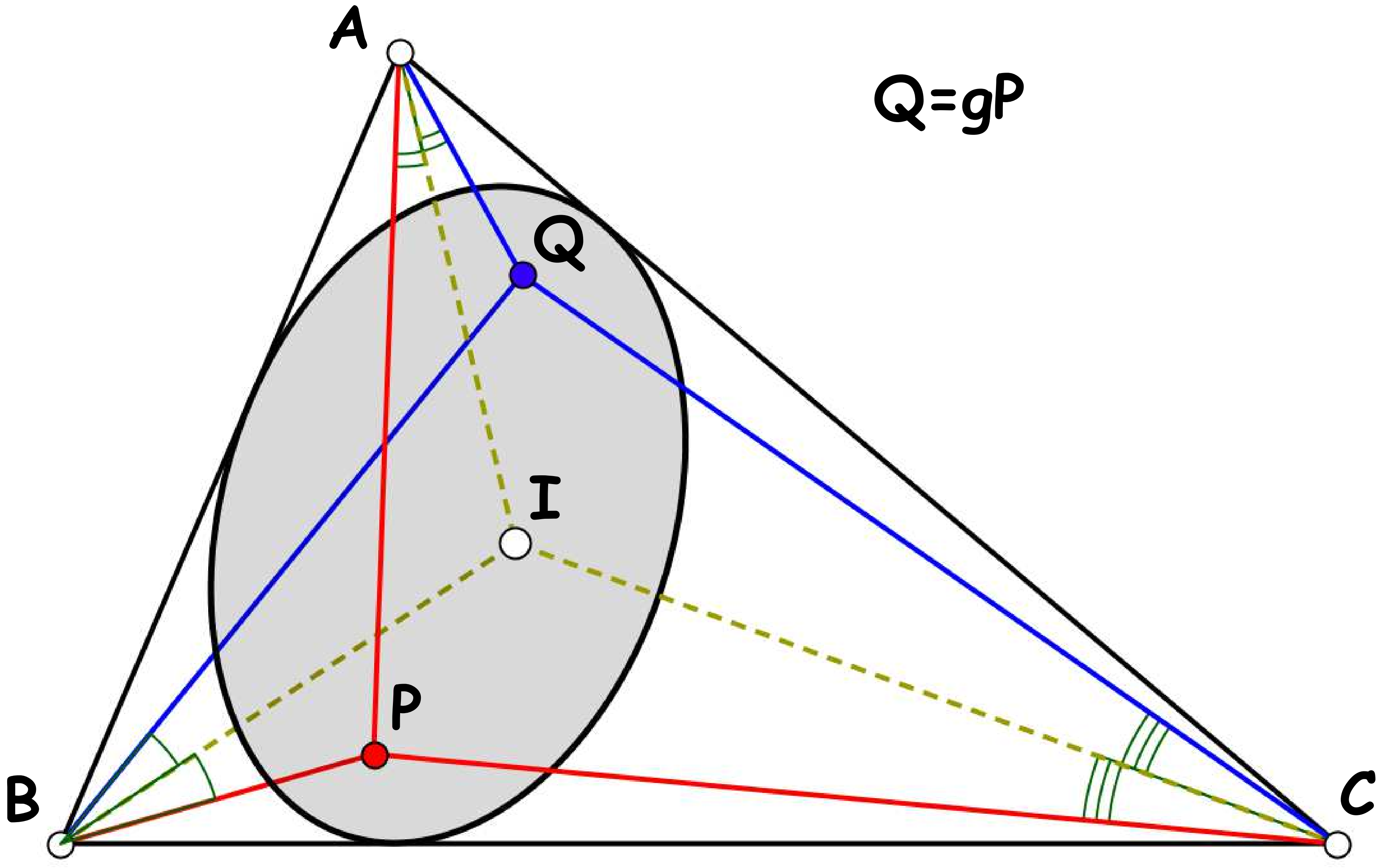
$$O = (\sin(2A):\sin(2B):\sin(2C))$$

$$\begin{aligned} gO &= (a^2/\sin(2A):b^2/\sin(2B):c^2/\sin(2C)) \\ &= (a/\cos(A):b/\cos(B):c/\cos(C)) \\ &= (\tan(A):\tan(B):\tan(C)) = H \end{aligned}$$



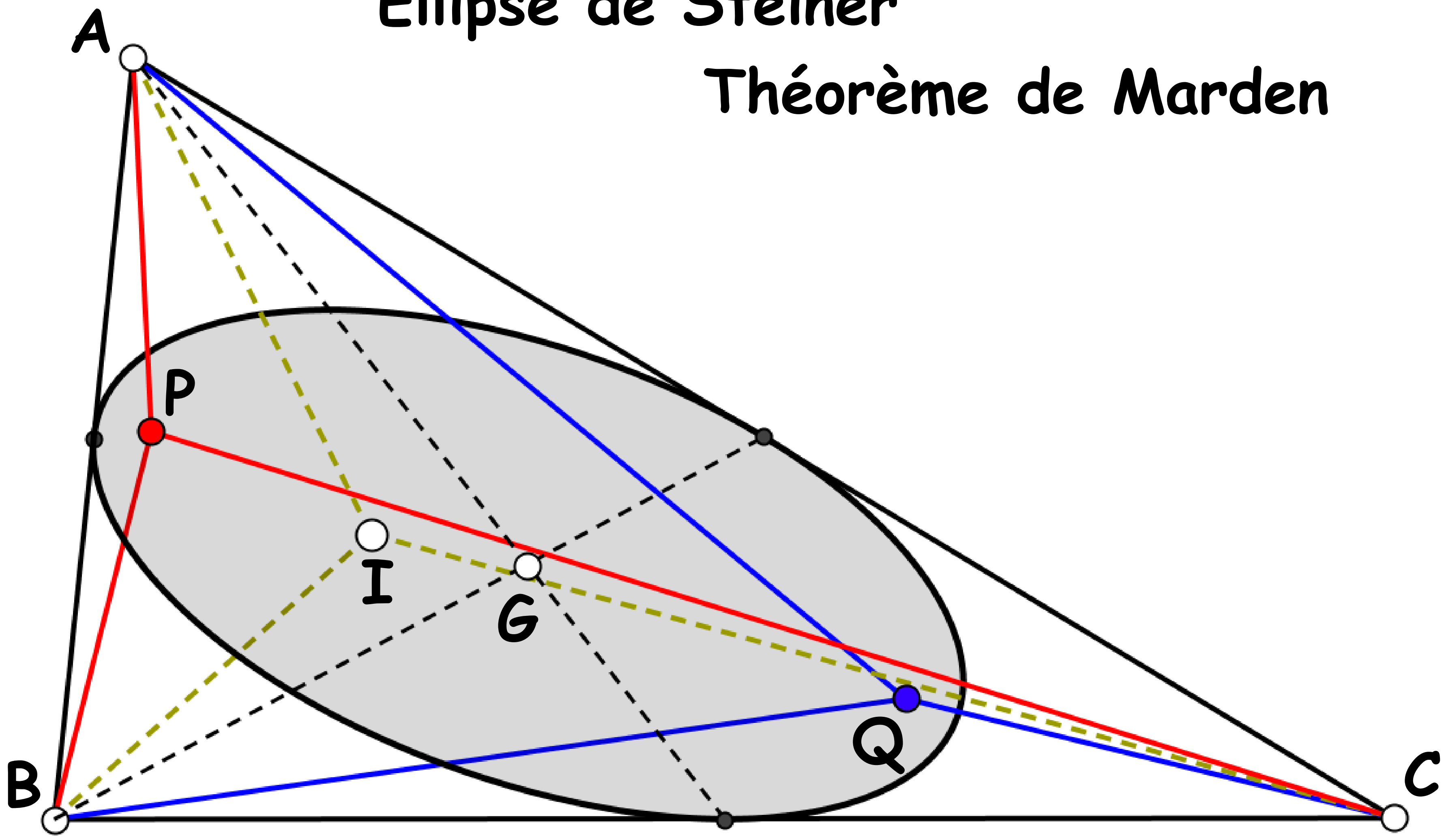
$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Conjugaison isogonale



Ellipse de Steiner

Théorème de Marden

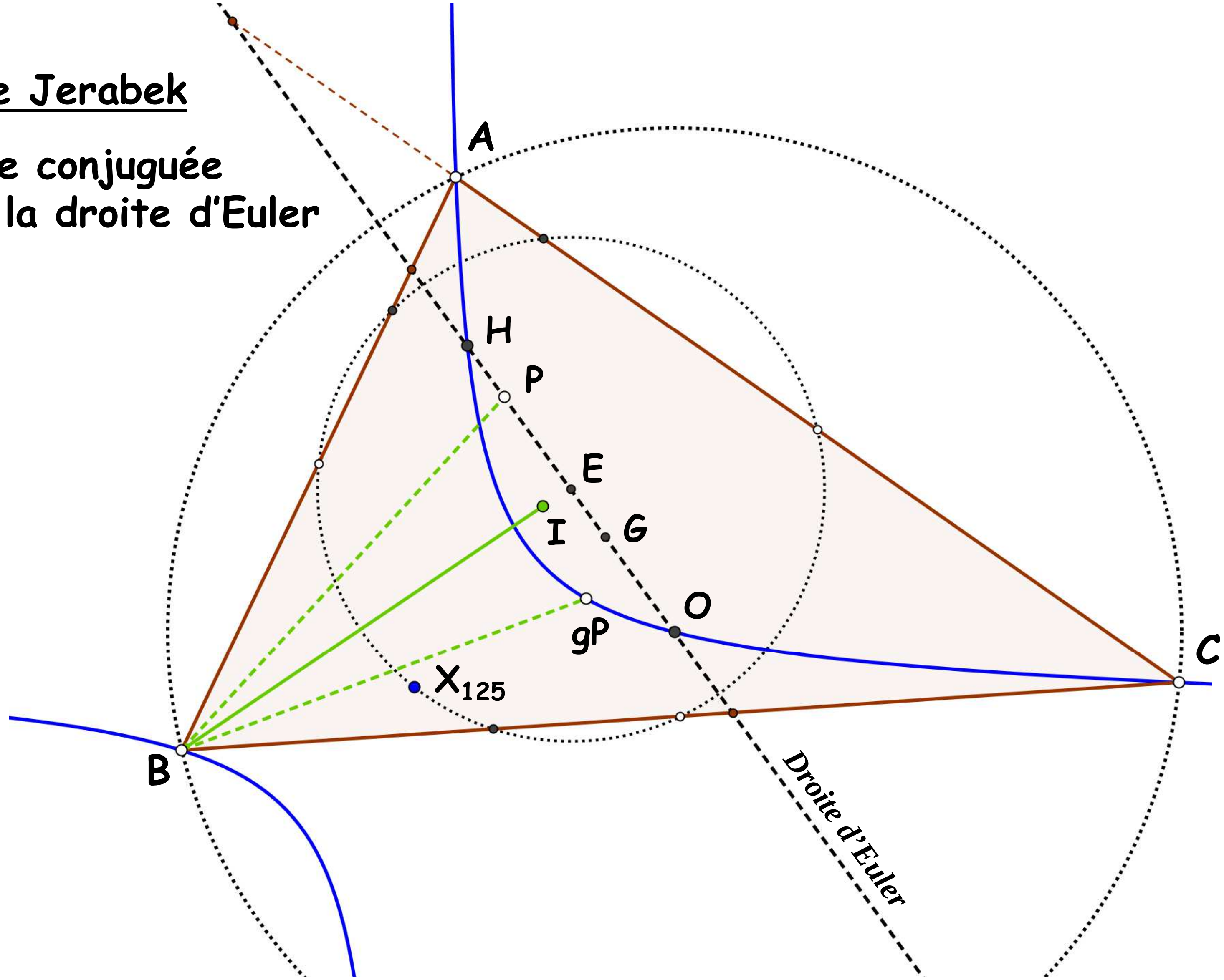


Conjugaison isogonale de la droite d'Euler

Hyperbole de Jerabek

<u>Hyperbole de Jerabek</u>

Circumconique conjuguée isogonale de la droite d'Euler



Exemples d'applications

Problème :

Pour un triangle donné, construire le point Q dont les distances aux côtés sont proportionnelles à la racine carrée de la longueur de ces côtés.

Coordonnées trilinéaires : $Q = (\sqrt{a} : \sqrt{b} : \sqrt{c})$

Coordonnées barycentriques : $Q = (a^{3/2} : b^{3/2} : c^{3/2}) = \sqrt{I.K}$

Problème :

Construire $Q = (\sin(A/2):\sin(B/2):\sin(C/2))$

$$\mathrm{Sin}^2(A/2)=(1+\cos(A))/2=(s-b)(s-c)/(bc)=[(s-a)(s-b)(s-c)/(abc)].[a/(s-a)]$$

$\Longrightarrow$ $Q^2 = (a/(s-a):b/(s-b):c/(s-c)) = I.Ge$

avec $Ge = (1/(s-a):1/(s-b):1/(s-c)) = tNa$

Exemples d'applications

Problème :

Construire un point P d'où les parallèles menées aux côtés les coupent en des segments égaux.

Soit $P = (x:y:z)$, c'est-à-dire $P = xA+yB+zC$ avec $x+y+z=1$.

La parallèle à BC détermine un segment de longueur $(1-x)a$ (Thalès).

Si les trois segments sont égaux, nous avons :

$(1-x:1-y:1-z)=(1/a:1/b:1/c)=tI=I^{-1}$

Par suite, $I^{-1} = [(1-x)A+(1-y)B+(1-z)C]/2 = (3G-P)/2$

D'où : $P = 3G-2I^{-1}$

Exemples d'applications

Centre de gravité P du périmètre d'un triangle

Le centre de gravité de chaque côté se situe en son milieu avec pour poids sa longueur.

A un facteur de normalisation près :

$P=a(B+C)+b(C+A)+c(B+A)=(b+c)A+(a+c)B+(a+b)C \Longleftrightarrow P = (b+c : c+a : a+b)$

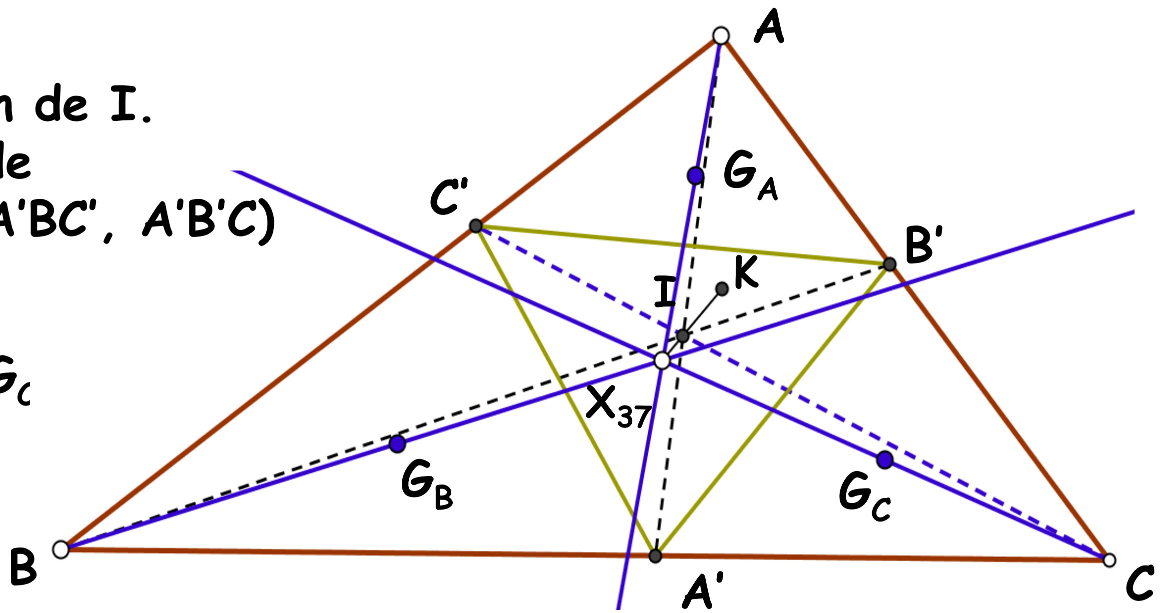
$P=(a+b+c)(A+B+C)-(aA+bB+cC)=6s.G-2s.I$ Avec normalisation : $\boxed{P = (3G-I)/2}$

Le point X_{37} a pour coordonnées trilinéaires (b+c : c+a : a+b).

$\Rightarrow \boxed{X_{37}=I.P=(3I-K)/2}$

A'B'C' est le triangle cévien de I.
G_A (G_B, G_C) est le centre de gravité du triangle AB'C' (A'BC', A'B'C)

X_{37} est le « perspecteur » des triangles ABC et $G_AG_BG_C$



Exemples d'applications

Isoconjugués des points de Nagel et Gergonne

Na = (s-a : s-b : s-c) et *Ge* = tNa

Nous avons vu que : $[\sin^2(A/2)] = [a/(s-a)]$

⇒ $gNa = [a.\sin^2(A/2)] = [a(1-\cos(A))]$

Au facteur de normalisation près :

$gNa = a(1-\cos(A))A+b(1-\cos(B))B+c(1-\cos(C))C$
$gNa = aA+bB+cC-(a.\cos(A)A+b.\cos(B)+c.\cos(C)C)$
$gNa = 2s.I-(2rs/R).O$

⇒ $gNa = (R.I-r.O)/(R-r)$

Le même type de calcul donne : $gGe = (R.I+r.O)/(R+r)$

Les conjugués isogonaux des points de Nagel et Gergonne divisent harmoniquement le segment OI dans le rapport des rayons des cercles inscrit et exinscrit du triangle.

Exemples d'applications

Mittenpunkt X_9 $X_9 = [a(s-a)] = I.Na$

Centre de perspective des triangles $A'B'C'$ et $I_AI_BI_C$.

$a(s-a)A+b(s-b)B+c(s-c)C$
$= s(aA+bB+cC)-(a^2A+b^2B+c^2C)$

➔ **(X_9, I, K) alignés**

$a = (s-b)+(s-c)$

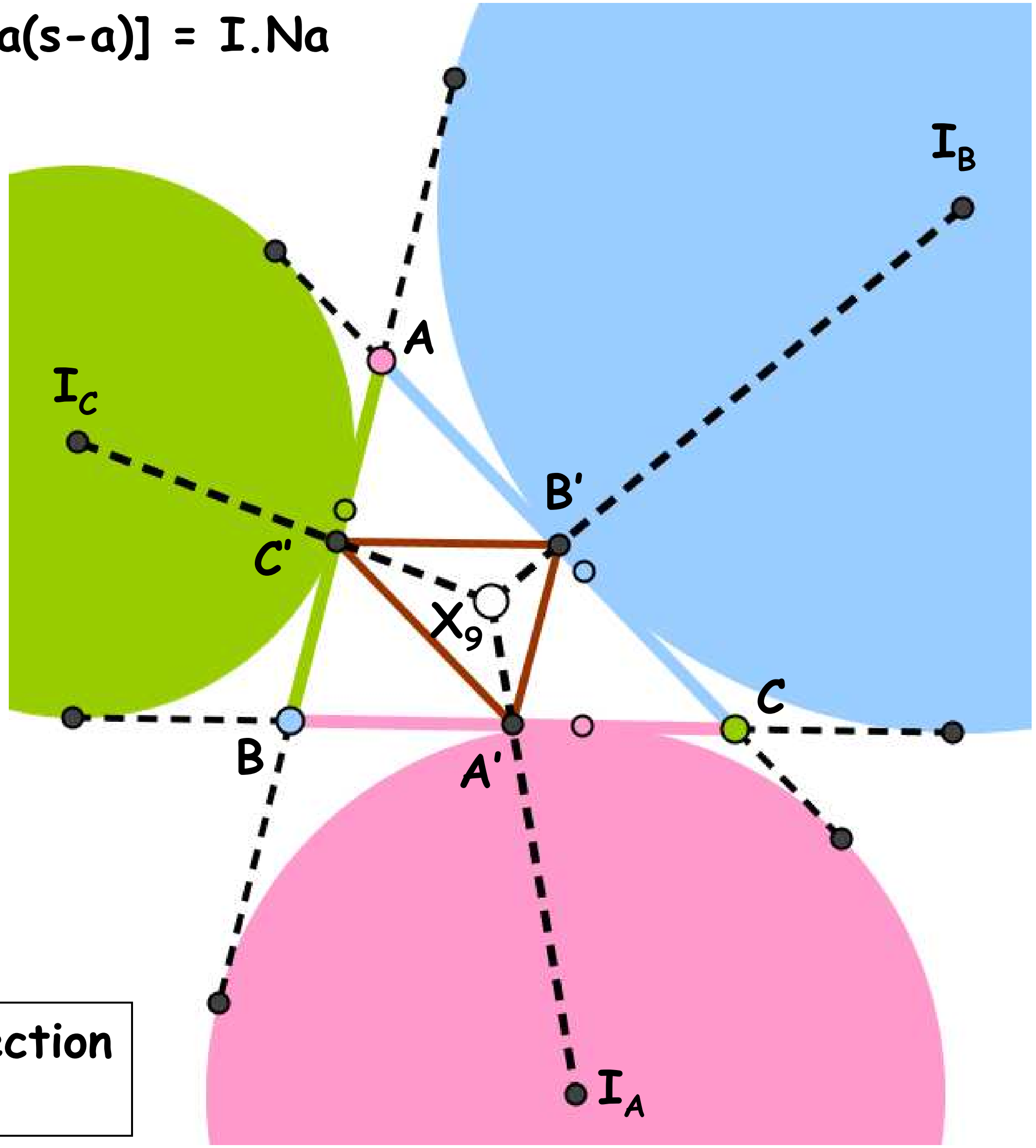
Symétrisation :

$a(s-a) + (s-b)(s-c)$
$= (s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)$

Puisque $[(s-b)(s-c)] = Ge = X_7$

➔ **(X_9, G, Ge) alignés**

Le Mittenpunkt est à l'intersection des droites GGe et IK.



Structures de groupes sur les cubiques

K cubique non singulière *(sans nœud, sans point de rebroussement).*

A chaque point O de K correspond une structure de groupe.

Opération P.Q : commutative, non associative

(P.Q).P=Q
P.Q=R.Q ⇔ P=R
P.Q=R ⇔ P=R.Q

<u>**Loi de groupe:**</u> **P+Q=(P.Q).O**

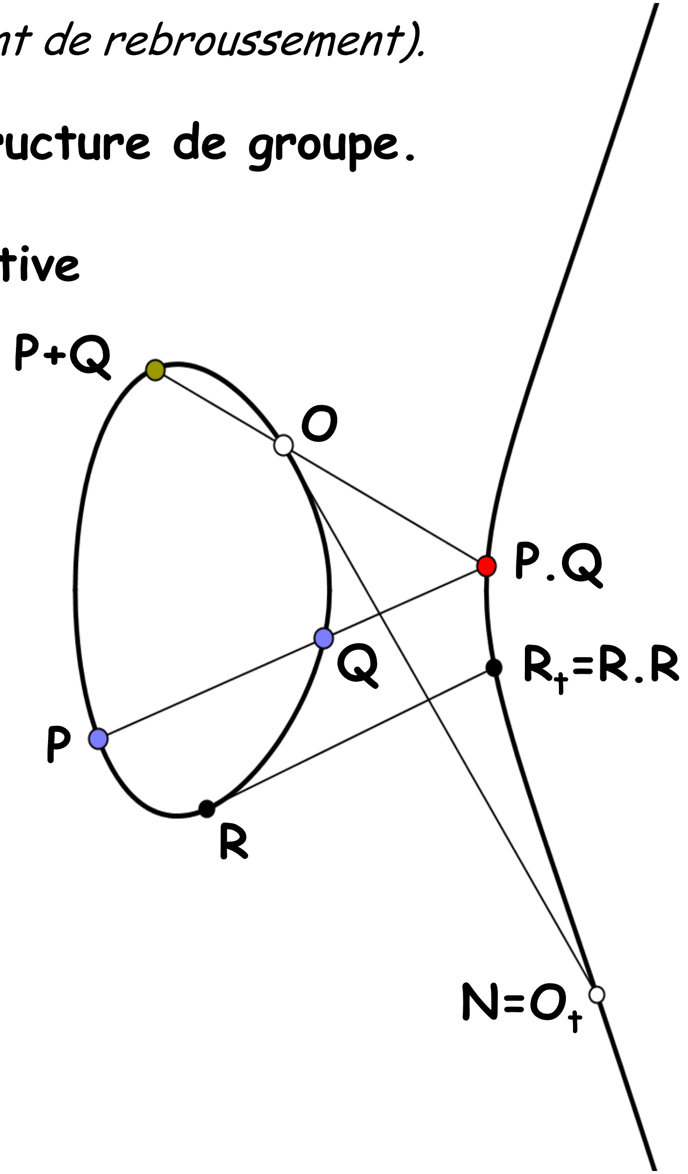
(commutative)

Élément neutre : O

Inverse : -P = P.N

Q=P.N ⟹ **P+Q=(P.(P.N)).O=N.O=O**

En particulier, -N = N_t.

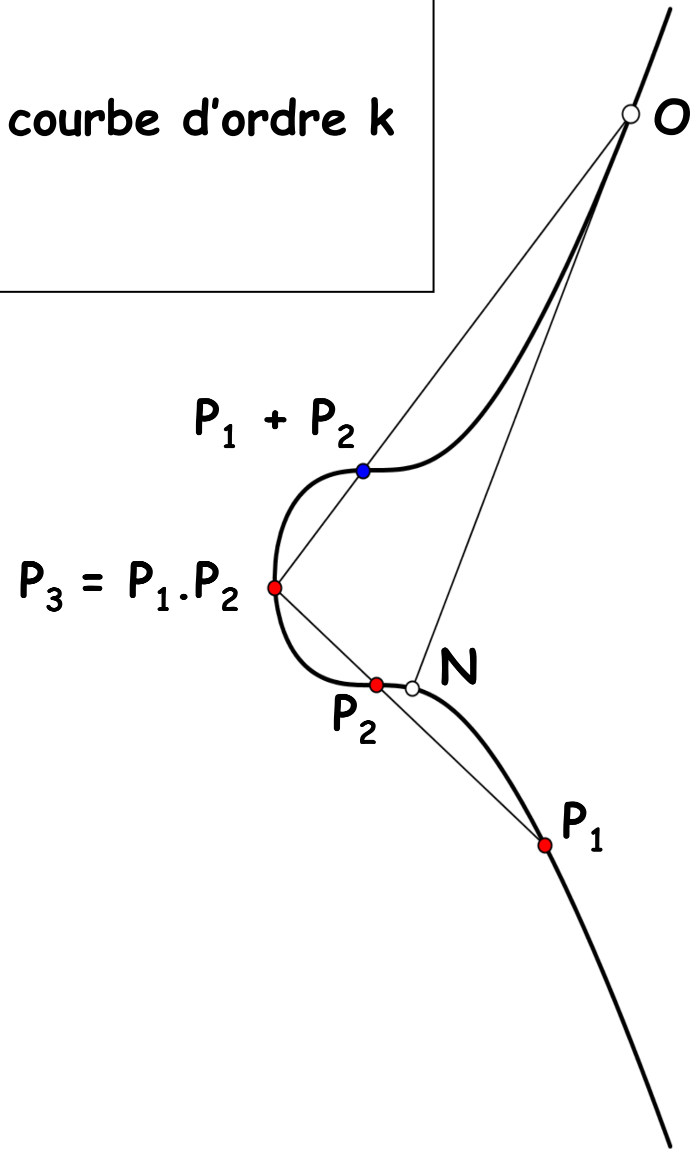


Structures de groupes sur les cubiques

Théorème:

3k points P_i d'une cubique K sont sur une courbe d'ordre k

si et seulement si $\sum_{i=1}^{3k} P_i = kN$



<u>k=1</u> Trois points P_i d'une cubique sont alignés ssi P1+P2+P3 = N.

<u>k=2</u>

Géométrie *(Hexagramme de Pascal)*
Six points P,Q,R,S,T,U d'une cubique K.
X=P.Q, Y=R.S, Z=T.U
Alors, P,Q,R,S,T,U sont sur une conique ssi X,Y,Z sont alignés.

Théorie des groupes
Six points P,Q,R,S,T,U d'une cubique K.
P+Q+X = N ; R+S+Y = N ; T+U+Z = N
Alors, P+Q+R+S+T+U = 2N ssi X+Y+Z = N.

Théorèmes sur une cubique K

Version géométrique	Version Théorie des groupes
Soient P1, P2, P3, P4 de K. Si une conique variable coupe K en P1, … , P6, alors la ligne P5P6 passe par un point fixe Q de K.	$P1+P2+P3+P4+P5+P6=2N$ et $P5+P6+Q=N$ $\Rightarrow Q=-N+P1+P2+P3+P4$
Si une conique intercepte K en P1, … , P6, alors les points tangentiels Q1, … , Q6 sont sur une autre conique.	$P1+P2+P3+P4+P5+P6 = 2N$ $2Pi+Qi = N \quad i=1,\dots,6$ $\Rightarrow Q1+Q2+Q3+Q4+Q5+Q6=2N$
Une conique est tritangente à K en P, Q, R ssi les tangentiels P', Q', R' sont alignés.	$2P+P'=N,\ 2Q+Q'=N,\ 2R+R'=N$ $2P+2Q+2R=2N \Leftrightarrow P'+Q'+R'=N$
Soient C1 une conique tritangente à K en P, Q, R et C2 une autre conique qui intercepte K en P, Q, R, P', Q', R'.	$2P+2Q+2R = 2N$ $P+Q+R+P'+Q'+R' = 2N$ $\Rightarrow 2P'+2Q'+2R' = 2N$

Isocubiques à pivot pK(Ω,P)

Les isocubiques sont des courbes anallagmatiques
(invariantes par transformation de pôle Ω).

Si elle admet un pivot P, un point Q de pK(Ω,P) est aligné avec le pivot P et son Ω-conjugué.

Pour P= (u:v:w) et Ω = (p:q:r), son équation barycentrique est :

$$\boxed{ux(ry^2-qz^2)+vy(pz^2-rx^2)+wz(qx^2-py^2) = 0}$$

La cubique passe par les sommets du triangle.
Ses tangentes en A, B, C et P concourent au conjugué de P :

$$P^*=(p/u:q/v:r/w)$$

<u>Etude de deux cubiques particulières:</u>

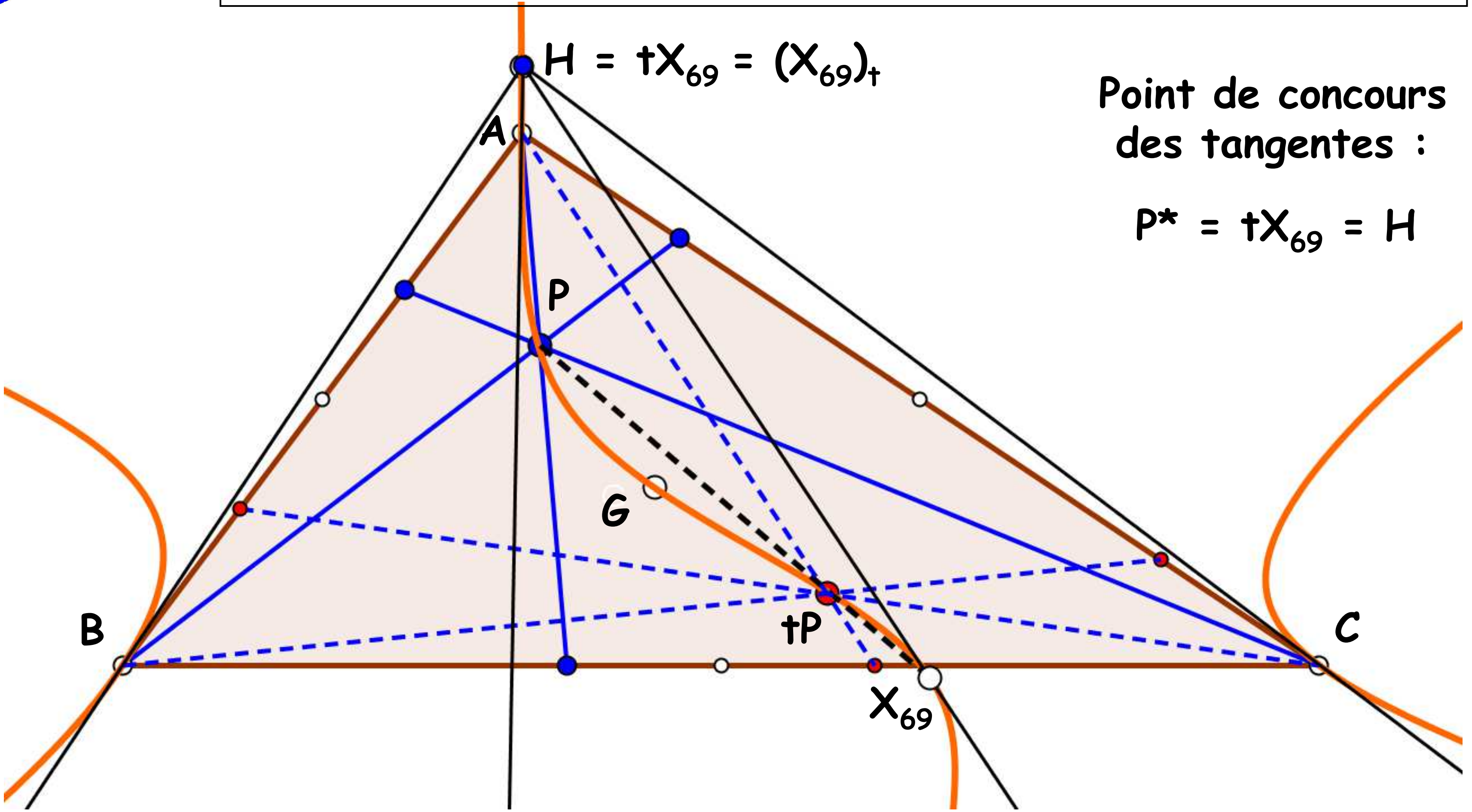
K004 = pK(X6,X20) = Cubique de Darboux
K007 = pK(X2,X69) = Cubique de Lucas

Cubique de Lucas

Cubique isotomique K007 = $pK(X_2, X_{69})$

Pôle $X_2 = G = (1:1:1)$ Pivot $X_{69} = tH = [b^2+c^2-a^2]$

$$(b^2+c^2-a^2)x(y^2-z^2)+(c^2+a^2-b^2)y(z^2-x^2)+(a^2+b^2-c^2)z(x^2-y^2) = 0$$



Point de concours des tangentes :

$P^* = tX_{69} = H$

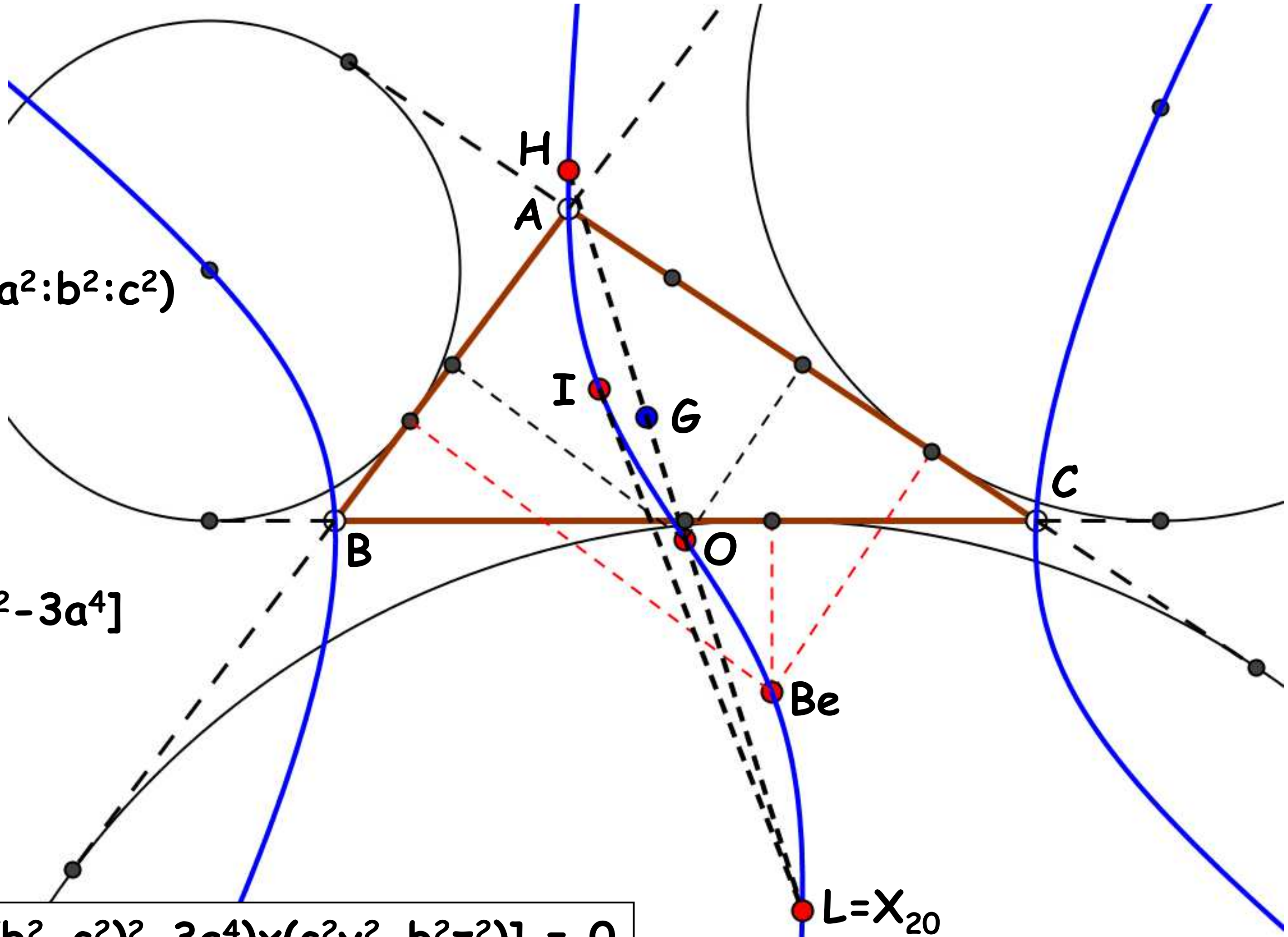
Cubique de Darboux

Cubique isogonale K004 = $pK(X_6, X_{20})$

Pôle $X_6 = K = gG = (a^2:b^2:c^2)$

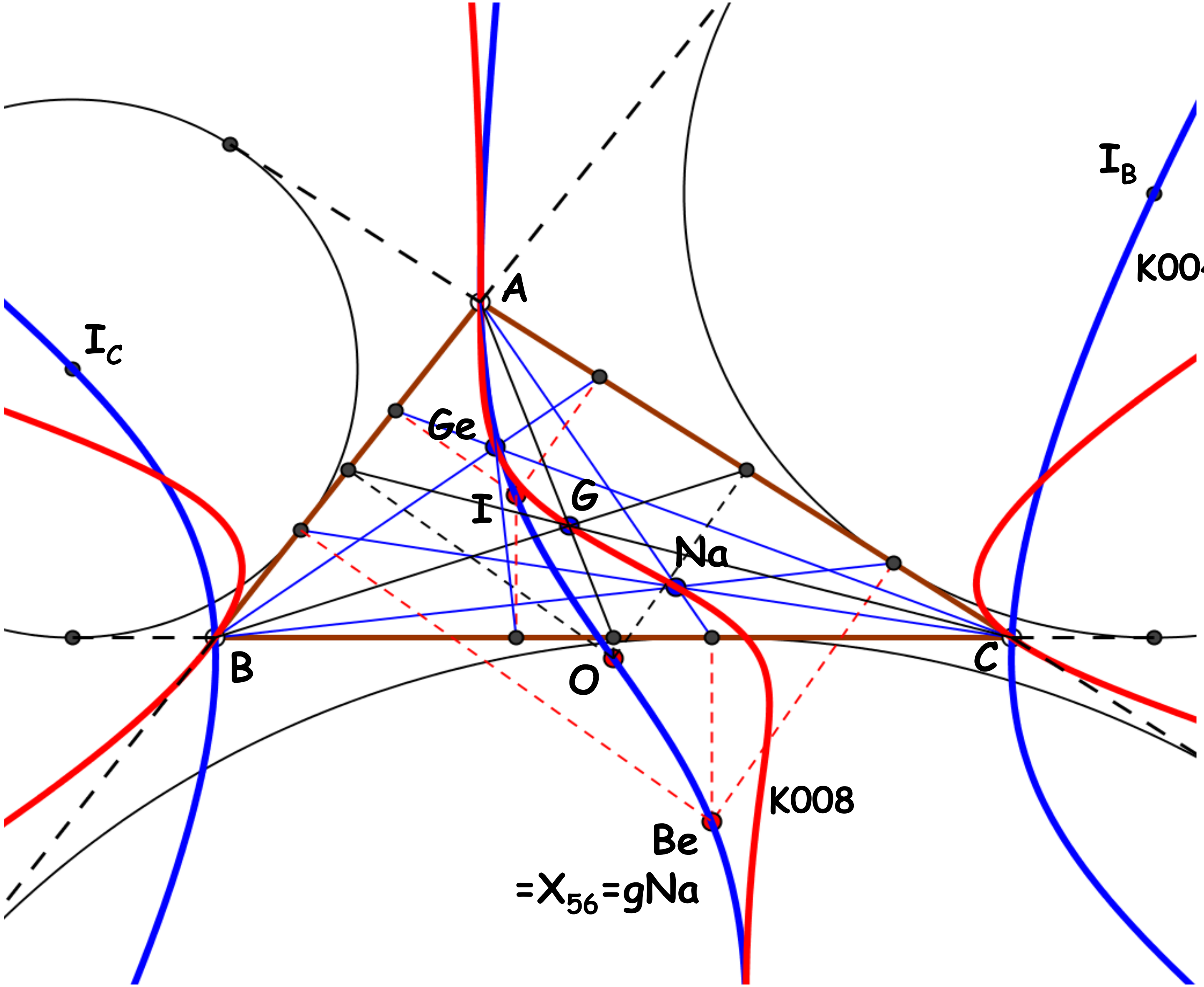
Pivot $X_{20} = L$

$[2a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2-3a^4]$

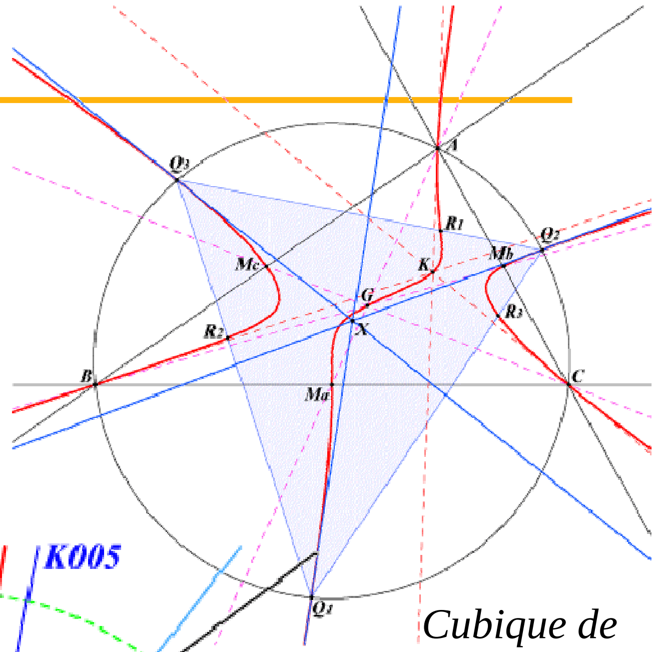


$[(2a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2-3a^4)x(c^2y^2-b^2z^2)] = 0$

Relation Darboux Lucas



Géométrie du triangle



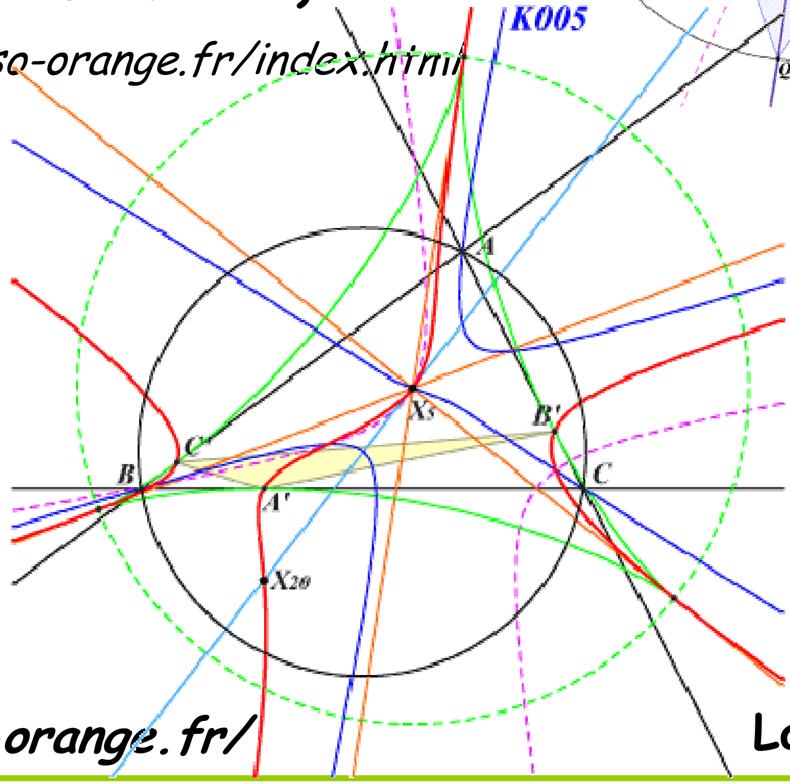
Cubique de Thomson

Références :

Points du triangle: 5561 (3597 en 2010!)
ETC - Encyclopedia of Triangles Centers
Clark Kimberling

Cubiques du triangle: 654 (586 en 2010)

http://bernard.gibert.pagesperso-orange.fr/index.html



Cubique de Napoléon-Steiner

La n°652

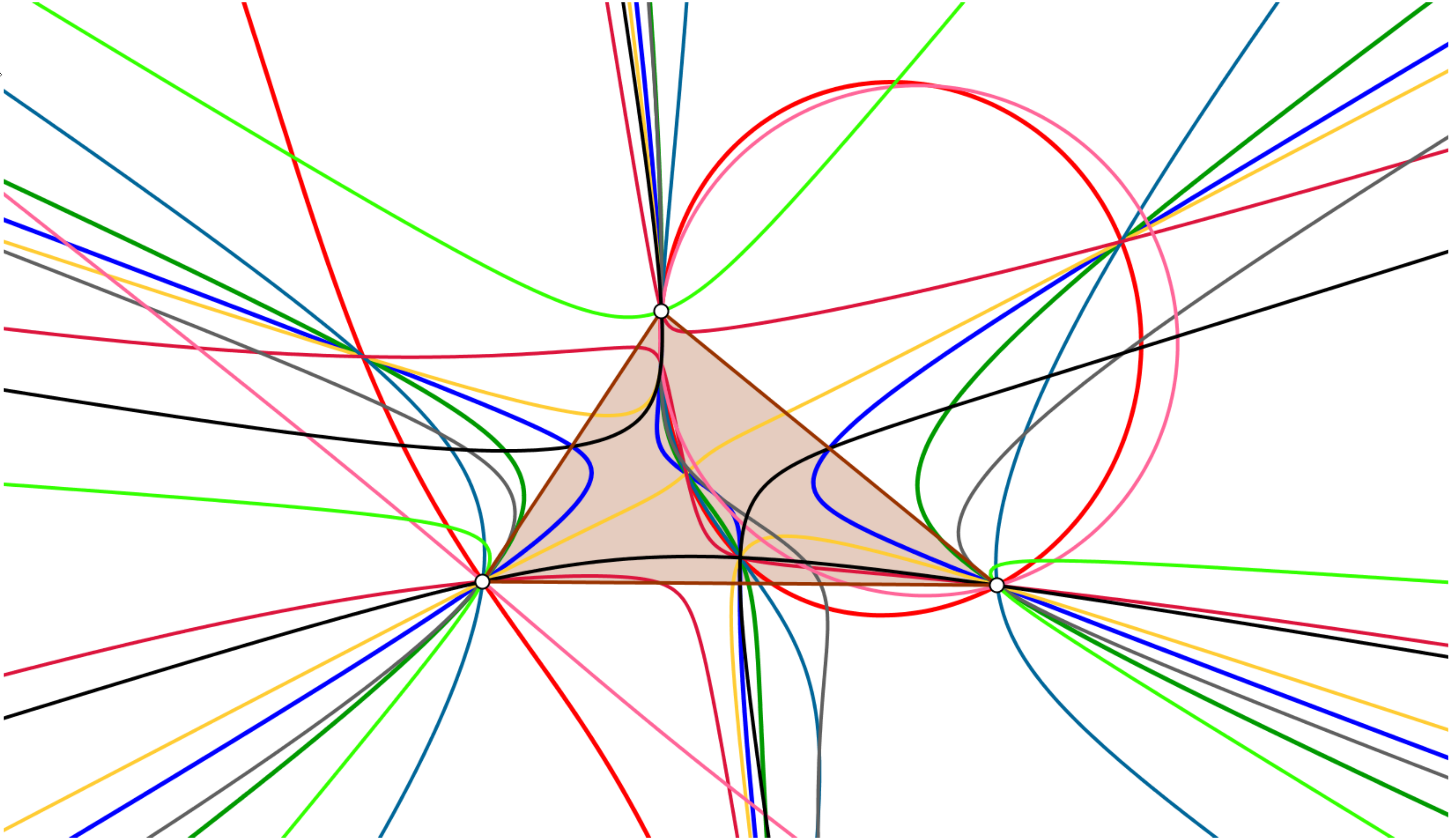
Dictionnaire Penguin
des curiosités géométriques
David Wells

La géométrie du triangle
Y. & R. Sortais

Articles :

Forum geometricorum
http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

Cubiques du Triangle : K001 à K010



Cubiques du Triangle : K100 à K110