Les flexaèdres ne fument pas

Jean Pierre BOURGUIGNON

(CNRS-Institut des Hautes Études Scientifiques)

Paris, 10 janvier 2013

Résumé

Présenter l'histoire d'un problème concret de géométrie classique :

- sa formulation
- sa solution en 1977
- le rôle joué par l'IHÉS dans cette histoire
- des raffinements de la solution
- la solution récente d'une conjecture le concernant

Résumé

Présenter l'histoire d'un problème concret de géométrie classique :

- sa formulation
- sa solution en 1977
- le rôle joué par l'IHÉS dans cette histoire
- des raffinements de la solution
- la solution récente d'une conjecture le concernant

Résumé

Présenter l'histoire d'un problème concret de géométrie classique :

- sa formulation
- sa solution en 1977
- le rôle joué par l'IHÉS dans cette histoire
- des raffinements de la solution
- la solution récente d'une conjecture le concernant

Résumé

Présenter l'histoire d'un problème concret de géométrie classique :

- sa formulation
- sa solution en 1977
- le rôle joué par l'IHÉS dans cette histoire
- des raffinements de la solution
- la solution récente d'une conjecture le concernant

Résumé

Présenter l'histoire d'un problème concret de géométrie classique :

- sa formulation
- sa solution en 1977
- le rôle joué par l'IHÉS dans cette histoire
- des raffinements de la solution
- la solution récente d'une conjecture le concernant

Résumé

Présenter l'histoire d'un problème concret de géométrie classique :

- sa formulation
- sa solution en 1977
- le rôle joué par l'IHÉS dans cette histoire
- des raffinements de la solution
- la solution récente d'une conjecture le concernant

1. Formulation du problème

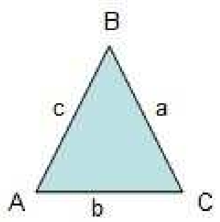
Dans le plan

La figure la plus simple : le *triangle*.

Dans le plan

La figure la plus simple : le *triangle*.

- Un triangle est déterminé par la longueur de ses côtés.



Dans le plan

La figure la plus simple : le *triangle*.

- Un triangle est déterminé par la longueur de ses côtés.
- Un triangle est donc rigide.
- Un triangle est convexe.
- Sa surface peut être calculée à partir des longueurs des côtés par une formule due à Héron d'Alexandrie

$$\mathrm{Surface}(ABC) = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$$

Dans le plan

La figure la plus simple : le *triangle*.

- Un triangle est déterminé par la longueur de ses côtés.
- Un triangle est donc rigide.
- Un triangle est convexe.
- Sa surface peut être calculée à partir des longueurs des côtés par une formule due à Héron d'Alexandrie

$$\mathrm{Surface}(ABC) = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$$

Dans le plan

La figure la plus simple : le *triangle*.

- Un triangle est déterminé par la longueur de ses côtés.
- Un triangle est donc rigide.
- Un triangle est convexe.
- Sa surface peut être calculée à partir des longueurs des côtés par une formule due à Héron d'Alexandrie

$$\mathrm{Surface}(ABC) = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$$

Dans le plan

La figure la plus simple : le *triangle*.

- Un triangle est déterminé par la longueur de ses côtés.
- Un triangle est donc rigide.
- Un triangle est convexe.
- Sa surface peut être calculée à partir des longueurs des côtés par une formule due à Héron d'Alexandrie

$$\mathrm{Surface}(ABC) = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$$

Dans le plan

La figure la plus simple : le *triangle*.

- Un triangle est déterminé par la longueur de ses côtés.
- Un triangle est donc rigide.
- Un triangle est convexe.
- Sa surface peut être calculée à partir des longueurs des côtés par une formule due à Héron d'Alexandrie

$$\mathrm{Surface}(ABC) = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$$

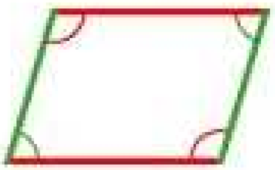
Dans le plan (suite)

Les figures planes plus compliquées : quadrilatères, polygones.

- Les quadrilatères se déforment même s'ils sont convexes.
- Leur surface se modifie dans la déformation.

Dans le plan (suite)

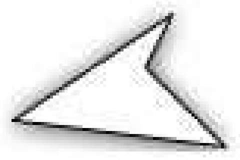
Les figures planes plus compliquées : quadrilatères, polygones.



- Les quadrilatères se déforment même s'ils sont convexes.
- Leur surface se modifie dans la déformation.

Dans le plan (suite)

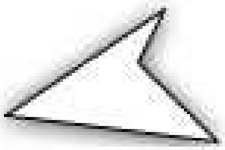
Les figures planes plus compliquées : quadrilatères, polygones.



- Les quadrilatères se déforment même s'ils sont convexes.
- Leur surface se modifie dans la déformation.

Dans le plan (suite)

Les figures planes plus compliquées : quadrilatères, polygones.



- Les quadrilatères se déforment même s'ils sont convexes.
- Leur surface se modifie dans la déformation.

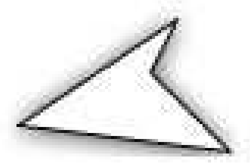
Dans le plan (suite)

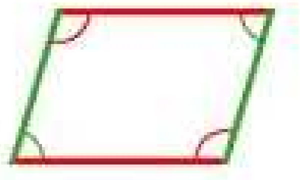
Les figures planes plus compliquées : quadrilatères, polygones.

- Les quadrilatères se déforment même s'ils sont convexes.
- Leur surface se modifie dans la déformation.

Dans le plan (suite)

Les figures planes plus compliquées : quadrilatères, polygones.

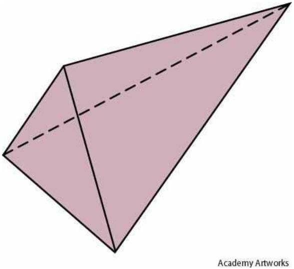




- Les quadrilatères se déforment même s'ils sont convexes.
- Leur surface se modifie dans la déformation.

A trois dimensions

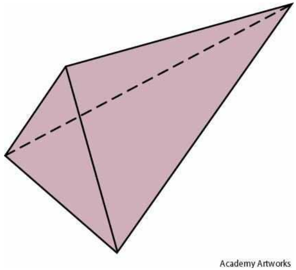
La figure la plus simple : le tétraèdre.



- Il a 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces.
- C'est un polyèdre convexe.
- Il est rigide.

A trois dimensions

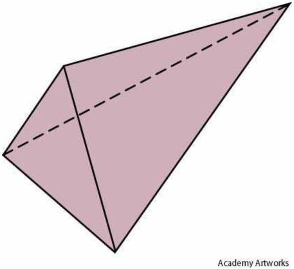
La figure la plus simple : le tétraèdre.



- Il a 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces.
- C'est un polyèdre convexe.
- Il est rigide.

A trois dimensions

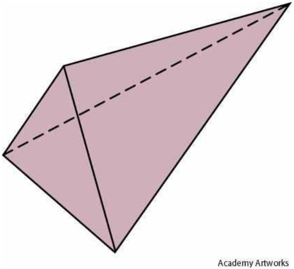
La figure la plus simple : le tétraèdre.



- Il a 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces.
- C'est un polyèdre convexe.
- Il est rigide.

A trois dimensions

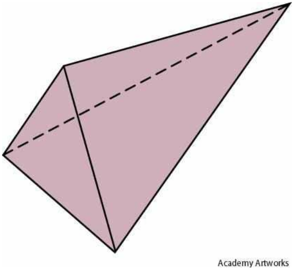
La figure la plus simple : le tétraèdre.



- Il a 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces.
- C'est un polyèdre convexe.
- Il est rigide.

A trois dimensions

La figure la plus simple : le tétraèdre.



- Il a 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces.
- C'est un polyèdre convexe.
- Il est rigide.

Un résultat important

Un résultat important

Théorème (Louis-Augustin CAUCHY), 1813

Un polyèdre convexe ne peut être déformé en gardant chacune de ses faces rigides.

- La preuve s'appuie sur une analyse des angles dièdres.
- Se nourrit d'idées introduites par Adrien-Marie LEGENDRE.

Question

Existe-t-il des polyèdres flexibles ?

Un résultat important

Théorème (Louis-Augustin CAUCHY), 1813

Un polyèdre convexe ne peut être déformé en gardant chacune de ses faces rigides.

- La preuve s'appuie sur une analyse des angles dièdres.
- Se nourrit d'idées introduites par Adrien-Marie LEGENDRE.

Question

Existe-t-il des polyèdres flexibles ?

Un résultat important

Théorème (Louis-Augustin CAUCHY), 1813

Un polyèdre convexe ne peut être déformé en gardant chacune de ses faces rigides.

- La preuve s'appuie sur une analyse des angles dièdres.
- Se nourrit d'idées introduites par Adrien-Marie LEGENDRE.

Question

Existe-t-il des polyèdres flexibles ?

Un résultat important

Théorème (Louis-Augustin CAUCHY), 1813

Un polyèdre convexe ne peut être déformé en gardant chacune de ses faces rigides.

- La preuve s'appuie sur une analyse des angles dièdres.
- Se nourrit d'idées introduites par Adrien-Marie LEGENDRE.

Question

Existe-t-il des polyèdres flexibles ?

Un résultat important

Théorème (Louis-Augustin CAUCHY), 1813

Un polyèdre convexe ne peut être déformé en gardant chacune de ses faces rigides.

- La preuve s'appuie sur une analyse des angles dièdres.
- Se nourrit d'idées introduites par Adrien-Marie LEGENDRE.

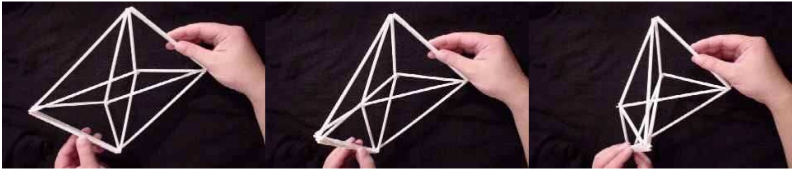
Question

Existe-t-il des polyèdres flexibles ?

2. La solution du problème

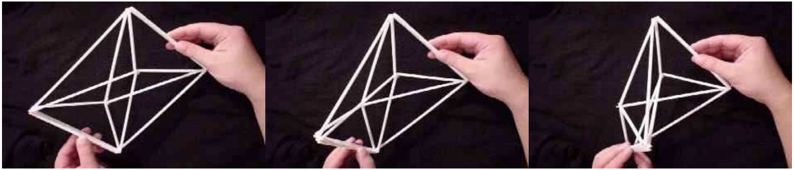
La découverte des premiers flexaèdres

- Raoul BRICARD étudie en détail les octaèdres, et en 1897 en fabrique un qui est flexible mais dont les faces se recoupent.



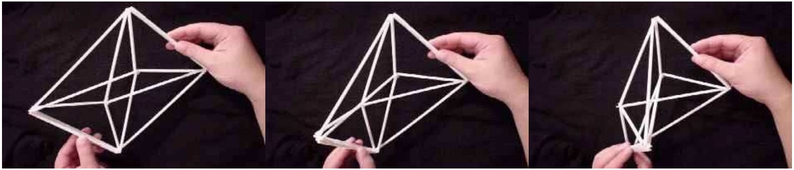
La découverte des premiers flexaèdres

- Raoul BRICARD étudie en détail les octaèdres, et en 1897 en fabrique un qui est flexible mais dont les faces se recoupent.



La découverte des premiers flexaèdres

- Raoul BRICARD étudie en détail les octaèdres, et en 1897 en fabrique un qui est flexible mais dont les faces se recoupent.



La découverte des premiers flexaèdres (suite)

Théorème (Robert CONNELLY), 1977

Il existe un flexaèdre à 18 sommets.

- CONNELLY utilise des octaèdres de BRICART qu'il positionne pour que les plans qui les portent puissent s'éviter.

La découverte des premiers flexaèdres (suite)

Théorème (Robert CONNELLY), 1977

Il existe un flexaèdre à 18 sommets.

- CONNELLY utilise des octaèdres de BRICART qu'il positionne pour que les plans qui les portent puissent s'éviter.

La découverte des premiers flexaèdres (suite)

Théorème (Robert CONNELLY), 1977

Il existe un flexaèdre à 18 sommets.

- CONNELLY utilise des octaèdres de BRICART qu'il positionne pour que les plans qui les portent puissent s'éviter.

La découverte des premiers flexaèdres (suite)

Théorème (Robert CONNELLY), 1977

Il existe un flexaèdre à 18 sommets.

- CONNELLY utilise des octaèdres de BRICART qu'il positionne pour que les plans qui les portent puissent s'éviter.

3. Liens avec l'IHÉS

L'IHÉS comme creuset

CONNELLY est invité à l'IHÉS par Dennis SULLIVAN pour l'année académique 1975-1976.

- Beaucoup de travail mais pas encore de solution.
- En juin 1977, CONNELLY trouve son contre-exemple.
- Nicolas KUIPER, alors directeur de l'IHÉS, le fait publier aux Publications Mathématiques de l'IHÉS.

L'IHÉS comme creuset

CONNELLY est invité à l'IHÉS par Dennis SULLIVAN pour l'année académique 1975-1976.

- Beaucoup de travail mais pas encore de solution.
- En juin 1977, CONNELLY trouve son contre-exemple.
- Nicolas KUIPER, alors directeur de l'IHÉS, le fait publier aux Publications Mathématiques de l'IHÉS.

L'IHÉS comme creuset

CONNELLY est invité à l'IHÉS par Dennis SULLIVAN pour l'année académique 1975-1976.

- Beaucoup de travail mais pas encore de solution.
- En juin 1977, CONNELLY trouve son contre-exemple.
- Nicolas KUIPER, alors directeur de l'IHÉS, le fait publier aux Publications Mathématiques de l'IHÉS.

L'IHÉS comme creuset

CONNELLY est invité à l'IHÉS par Dennis SULLIVAN pour l'année académique 1975-1976.

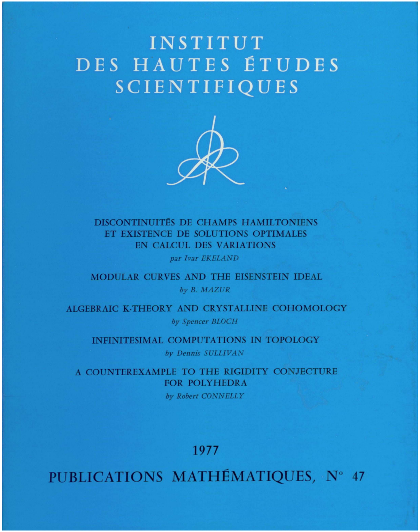
- Beaucoup de travail mais pas encore de solution.
- En juin 1977, CONNELLY trouve son contre-exemple.
- Nicolas KUIPER, alors directeur de l'IHÉS, le fait publier aux Publications Mathématiques de l'IHÉS.

L'IHÉS comme creuset

CONNELLY est invité à l'IHÉS par Dennis SULLIVAN pour l'année académique 1975-1976.

- Beaucoup de travail mais pas encore de solution.
- En juin 1977, CONNELLY trouve son contre-exemple.
- Nicolas KUIPER, alors directeur de l'IHÉS, le fait publier aux Publications Mathématiques de l'IHÉS.

L'article de CONNELLY



INSTITUT
DES HAUTES ÉTUDES
SCIENTIFIQUES

DISCONTINUITÉS DE CHAMPS HAMILTONIENS
ET EXISTENCE DE SOLUTIONS OPTIMALES
EN CALCUL DES VARIATIONS
par Ivar EKELAND

MODULAR CURVES AND THE EISENSTEIN IDEAL
by B. MAZUR

ALGEBRAIC K-THEORY AND CRYSTALLINE COHOMOLOGY
by Spencer BLOCH

INFINITESIMAL COMPUTATIONS IN TOPOLOGY
by Dennis SULLIVAN

A COUNTEREXAMPLE TO THE RIGIDITY CONJECTURE
FOR POLYHEDRA
by Robert CONNELLY

1977

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES, N° 47

L'article de CONNELLY (suite)

A COUNTEREXAMPLE TO THE RIGIDITY CONJECTURE FOR POLYHEDRA

by Robert Connelly (¹)

1. Introduction.

Are closed surfaces rigid? The conjecture that in fact they all are rigid—at least for polyhedra—has been with us a long time. We propose here to give a counter-example. This is a closed polyhedral surface (topologically a sphere), embedded in three-space, which flexes. (See Gluck [5] for definitions and some references for the history of the problem.)

Certain ambiguities arising from definition 10 of the eleventh book of Euclid's Elements have led many to conjecture the rigidity of closed surfaces. In 1813 Cauchy [2] proved that strictly convex surfaces were rigid, and this result is the basic tool for many other rigidity theorems. Recently Gluck [5] has shown that almost all simply connected closed surfaces are rigid. On the other hand we have shown [3] that there are immersed surfaces which flex. The ideas in [3] are part of the motivation behind the example described here.

The first step is to find an example of an immersed flexible sphere that is not only immersed but has just two singular points in its image. Locally the singular points look like two dihedral surfaces that intersect at just one point in their edges. The next step is to alter the polyhedron only in the neighborhood of these singular points in such a way that the dihedral surfaces flex as before, but one dihedral surface is " crinkled " such that near the intersection point it is pushed in. When this is done the resulting polyhedron still flexes, but the singular points have been erased; no new ones have been created, so it is embedded.

2. A flexible octahedron.

The construction of flexible immersed spheres and the crinkle depend on the flexible octahedra described by Bricard [1] in 1897.

We first describe a flexible octahedron $\mathcal{O}_1$ that lies in a plane π. As $\mathcal{O}_1$ flexes it moves out of π, but we are interested at the instant it is in π. Of course $\mathcal{O}_1$ in this description will be highly singular and will not even be immersed.

(¹) Supported by an NSF Grant.

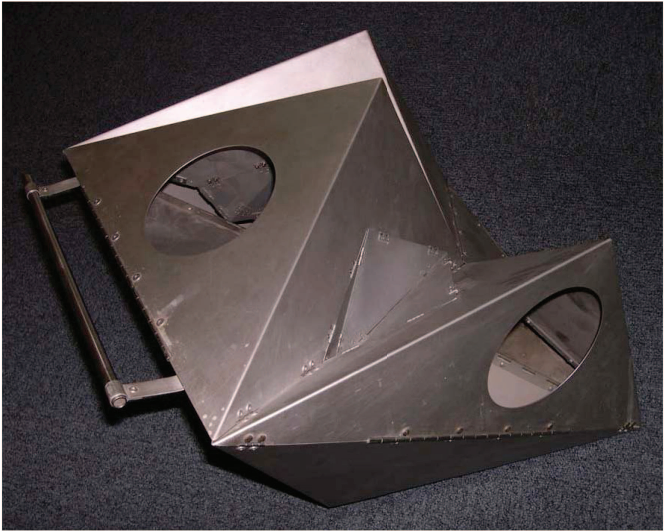
L'article de CONNELLY (suite)

The author thanks the Institute des Hautes Études Scientifiques and Dennis Sullivan very much for their steadfast support and encouragement while he was working on this and related problems. It is greatly appreciated.

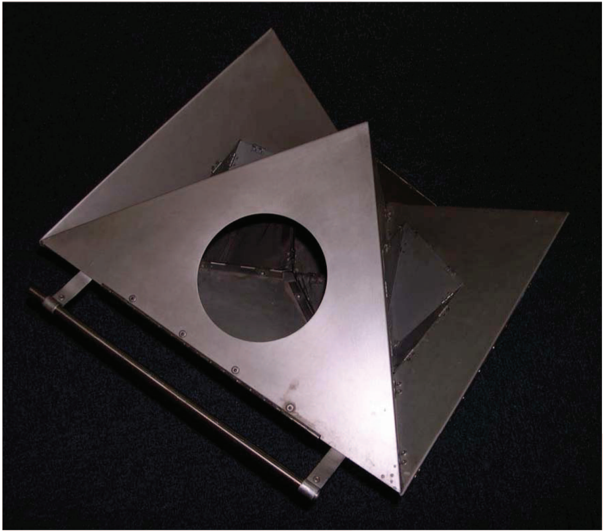
RÉFÉRENCES

[1] R. Bricard, Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé, *J. Math. Pures Appl.* (5), **3** (1897), 113-148.
[2] A. L. Cauchy, Sur les polygones et polyèdres, Second Mémoire, *J. École Polytechnique*, **19** (1813), 87-98.
[3] R. Connelly, An immersed polyhedral surface which flexes, *Indiana University Math. J.*, **25** (1976), 965-972.
[4] R. Connelly, The rigidity of suspensions, to appear in the *Journal of Differential Topology*.
[5] H. Gluck, Almost all simply connected closed surfaces are rigid, *Lecture Notes in Math.* 438, *Geometric Topology*, Springer-Verlag (1975), 225-239.
[6] N. H. Kuiper, On C^1-isometric imbeddings, *Indag. Math.* XVII (1954), 545-556 and 683-689.

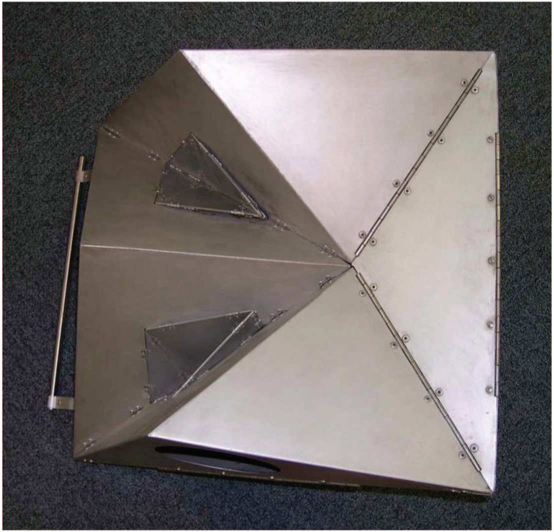
Contruire un flexaèdre



Contruire un flexaèdre (suite)



Contruire un flexaèdre (suite)



Des raffinements du résultat

- KUIPER et Pierre DELIGNE construisent un flexaèdre à 11 sommets.
- Klaus STEFFEN construit le flexaèdre qui, à ce jour, a le moins de sommets, soit 9.

Des raffinements du résultat

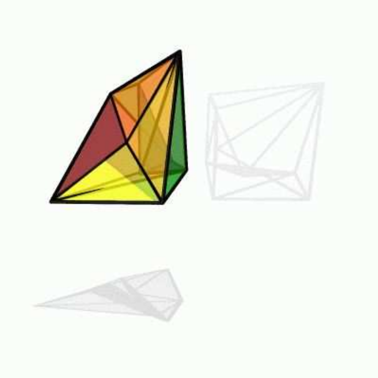
- KUIPER et Pierre DELIGNE construisent un flexaèdre à 11 sommets.
- Klaus STEFFEN construit le flexaèdre qui, à ce jour, a le moins de sommets, soit 9.

Des raffinements du résultat

- KUIPER et Pierre DELIGNE construisent un flexaèdre à 11 sommets.
- Klaus STEFFEN construit le flexaèdre qui, à ce jour, a le moins de sommets, soit 9.

Des raffinements du résultat

- KUIPER et Pierre DELIGNE construisent un flexaèdre à 11 sommets.
- Klaus STEFFEN construit le flexaèdre qui, à ce jour, a le moins de sommets, soit 9.



La note de STEFFEN

<u>A symmetric flexible Connelly sphere with only nine vertices</u>

by Klaus Steffen (I.H.E.S.)

1.) Make 14 rigid triangles and attach them to each other in a flexible fashion as indicated in fig. 1,2 (two copies!); a good choice of parameters is e.g. $a := 6$, $b := 5$, $c := 2.5$, $d := 5.5$, $e := 8.5$.

2.) Connect (in a flexible way!) the two edges marked ① in fig. 1 by rotating the corresponding triangles upward and the two edges marked ② by rotating the corresponding triangles downward (in either copy!).

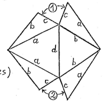
3.) Attach the two aggregates of 6 triangles to each other as indicated by ③, ④ in fig. 3.

4.) Connect the two remaining single triangles (fig. 2) along edge e thereby making a "roof" which is attached to the configuration of 12 triangles from step 3.) as indicated by ⑤, ⑥, ⑦, ⑧ in fig. 3.

5.) If you did not mess up everything the resulting sphere looks like fig. 4 and flexes by about 30° as indicated by the arrows.

(It is a good idea to cut a "window" in the "roof" to make the inside visible.)

fig. 1



(2 copies)

$a = u$
$b = v$
$c = \cancel{2.5}\, w$
$d = \cancel{8}\, x$
$e = y$

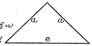


fig. 2 (2 copies)

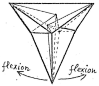


fig. 4

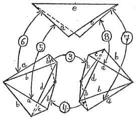


fig. 3

Les flexaèdres fument-ils ?

- La légende veut que SULLIVAN ait un jour soufflé la fumée de sa pipe dans le flexaèdre.
- Il aurait constaté qu'en déformant le flexaèdre, la fumée ne sortait pas.
- CONNELLY a pu montrer que ce flexaèdre-là ne "fumait" pas.
- La conjecture du "soufflet" était née.

Conjecture du soufflet

Dans leur déformation les flexaèdres ne changent pas de volume, donc ne "fument" pas.

Les flexaèdres fument-ils ?

- La légende veut que SULLIVAN ait un jour soufflé la fumée de sa pipe dans le flexaèdre.
- Il aurait constaté qu'en déformant le flexaèdre, la fumée ne sortait pas.
- CONNELLY a pu montrer que ce flexaèdre-là ne "fumait" pas.
- La conjecture du "soufflet" était née.

Conjecture du soufflet

Dans leur déformation les flexaèdres ne changent pas de volume, donc ne "fument" pas.

Les flexaèdres fument-ils ?

- La légende veut que SULLIVAN ait un jour soufflé la fumée de sa pipe dans le flexaèdre.
- Il aurait constaté qu'en déformant le flexaèdre, la fumée ne sortait pas.
- CONNELLY a pu montrer que ce flexaèdre-là ne “fumait” pas.
- La conjecture du “soufflet” était née.

Conjecture du soufflet

Dans leur déformation les flexaèdres ne changent pas de volume, donc ne “fument” pas.

Les flexaèdres fument-ils ?

- La légende veut que SULLIVAN ait un jour soufflé la fumée de sa pipe dans le flexaèdre.
- Il aurait constaté qu'en déformant le flexaèdre, la fumée ne sortait pas.
- CONNELLY a pu montrer que ce flexaèdre-là ne "fumait" pas.
- La conjecture du "soufflet" était née.

Conjecture du soufflet

Dans leur déformation les flexaèdres ne changent pas de volume, donc ne "fument" pas.

Les flexaèdres fument-ils ?

- La légende veut que SULLIVAN ait un jour soufflé la fumée de sa pipe dans le flexaèdre.
- Il aurait constaté qu'en déformant le flexaèdre, la fumée ne sortait pas.
- CONNELLY a pu montrer que ce flexaèdre-là ne "fumait" pas.
- La conjecture du "soufflet" était née.

Conjecture du soufflet

Dans leur déformation les flexaèdres ne changent pas de volume, donc ne "fument" pas.

Les flexaèdres fument-ils ?

- La légende veut que SULLIVAN ait un jour soufflé la fumée de sa pipe dans le flexaèdre.
- Il aurait constaté qu'en déformant le flexaèdre, la fumée ne sortait pas.
- CONNELLY a pu montrer que ce flexaèdre-là ne "fumait" pas.
- La conjecture du "soufflet" était née.

Conjecture du soufflet

Dans leur déformation les flexaèdres ne changent pas de volume, donc ne "fument" pas.

Le contexte de la conjecture

- Dans certains exemples de polyèdres généralisés, comme celui des "kaléidocycles", la conservation du volume est une évidence.

Le contexte de la conjecture

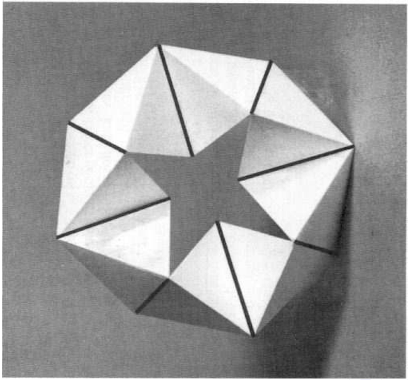
- Dans certains exemples de polyèdres généralisés, comme celui des “kaléidocycles”, la conservation du volume est une évidence.

Le contexte de la conjecture

- Dans certains exemples de polyèdres généralisés, comme celui des "kaléidocycles", la conservation du volume est une évidence.

Le contexte de la conjecture

- Dans certains exemples de polyèdres généralisés, comme celui des “kaléidocycles”, la conservation du volume est une évidence.



4. Le théorème du soufflet

Le calcul du volume des polyèdres

- Une formule donnant le volume d'un tétraèdre $ABCD$ semble avoir été connue de Niccolo Fontana TARTAGLIA au début du XVI$^{\text{ème}}$ siècle (et redécouverte par Leonhard EULER) "

$$\mathrm{Volume}(ABCD)^2 = \frac{1}{288}\det\begin{bmatrix} 0 & AB^2 & AC^2 & AD^2 & 1 \\ AB^2 & 0 & BC^2 & BD^2 & 1 \\ AC^2 & BC^2 & 0 & CD^2 & 1 \\ AD^2 & BD^2 & CD^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Comment cela se généralise-t-il aux autres polyèdres?

Le calcul du volume des polyèdres

- Une formule donnant le volume d'un tétraèdre $ABCD$ semble avoir été connue de Niccolo Fontana TARTAGLIA au début du XVI$^{\text{ème}}$ siècle (et redécouverte par Leonhard EULER) "

$$\mathrm{Volume}(ABCD)^2 = \frac{1}{288}\det \begin{bmatrix} 0 & AB^2 & AC^2 & AD^2 & 1 \\ AB^2 & 0 & BC^2 & BD^2 & 1 \\ AC^2 & BC^2 & 0 & CD^2 & 1 \\ AD^2 & BD^2 & CD^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Comment cela se généralise-t-il aux autres polyèdres?

Le calcul du volume des polyèdres

- Une formule donnant le volume d'un tétraèdre $ABCD$ semble avoir été connue de Niccolo Fontana TARTAGLIA au début du XVI$^{\text{ème}}$ siècle (et redécouverte par Leonhard EULER) "

$$\mathrm{Volume}(ABCD)^2 = \frac{1}{288}\det\begin{bmatrix} 0 & AB^2 & AC^2 & AD^2 & 1 \\ AB^2 & 0 & BC^2 & BD^2 & 1 \\ AC^2 & BC^2 & 0 & CD^2 & 1 \\ AD^2 & BD^2 & CD^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Comment cela se généralise-t-il aux autres polyèdres?

Le calcul du volume des polyèdres

- Une formule donnant le volume d'un tétraèdre $ABCD$ semble avoir été connue de Niccolo Fontana TARTAGLIA au début du XVI$^{\text{ème}}$ siècle (et redécouverte par Leonhard EULER) "

$$\mathrm{Volume}(ABCD)^2 = \frac{1}{288}\det\begin{bmatrix} 0 & AB^2 & AC^2 & AD^2 & 1 \\ AB^2 & 0 & BC^2 & BD^2 & 1 \\ AC^2 & BC^2 & 0 & CD^2 & 1 \\ AD^2 & BD^2 & CD^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Comment cela se généralise-t-il aux autres polyèdres?

Le calcul du volume des polyèdres

- Une formule donnant le volume d'un tétraèdre $ABCD$ semble avoir été connue de Niccolo Fontana TARTAGLIA au début du XVI$^{\text{ème}}$ siècle (et redécouverte par Leonhard EULER) "

$$\mathrm{Volume}(ABCD)^2 = \frac{1}{288}\det\begin{bmatrix} 0 & AB^2 & AC^2 & AD^2 & 1 \\ AB^2 & 0 & BC^2 & BD^2 & 1 \\ AC^2 & BC^2 & 0 & CD^2 & 1 \\ AD^2 & BD^2 & CD^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Comment cela se généralise-t-il aux autres polyèdres?

Le calcul du volume des polyèdres

- Le cas d'un polyèdre général peut être traité par découpage en tétraèdres.
- Ceci est possible à cause d'un théorème de Idzhad SABITOV obtenu en 1996, simplifié par CONNELLY, SABITOV et Anke WALZ en 1997.

Calcul du volume d'un polyèdre

Le carré du volume d'un polyèdre est racine d'une équation polynomiale dont les coefficients s'expriment à partir des carrés des longueurs des arêtes de toute triangulation du polyèdre.

- C'est une généralisation de la formule de Héron pour la surface des triangles et de la formule de Tartaglia pour le volume des tétraèdres.

Le calcul du volume des polyèdres

- Le cas d'un polyèdre général peut être traité par découpage en tétraèdres.
- Ceci est possible à cause d'un théorème de Idzhad SABITOV obtenu en 1996, simplifié par CONNELLY, SABITOV et Anke WALZ en 1997.

Calcul du volume d'un polyèdre

Le carré du volume d'un polyèdre est racine d'une équation polynomiale dont les coefficients s'expriment à partir des carrés des longueurs des arêtes de toute triangulation du polyèdre.

- C'est une généralisation de la formule de Héron pour la surface des triangles et de la formule de Tartaglia pour le volume des tétraèdres.

Le calcul du volume des polyèdres

- Le cas d'un polyèdre général peut être traité par découpage en tétraèdres.
- Ceci est possible à cause d'un théorème de Idzhad SABITOV obtenu en 1996, simplifié par CONNELLY, SABITOV et Anke WALZ en 1997.

Calcul du volume d'un polyèdre

Le carré du volume d'un polyèdre est racine d'une équation polynomiale dont les coefficients s'expriment à partir des carrés des longueurs des arêtes de toute triangulation du polyèdre.

- C'est une généralisation de la formule de Héron pour la surface des triangles et de la formule de Tartaglia pour le volume des tétraèdres.

Le calcul du volume des polyèdres

- Le cas d'un polyèdre général peut être traité par découpage en tétraèdres.
- Ceci est possible à cause d'un théorème de Idzhad SABITOV obtenu en 1996, simplifié par CONNELLY, SABITOV et Anke WALZ en 1997.

Calcul du volume d'un polyèdre

Le carré du volume d'un polyèdre est racine d'une équation polynomiale dont les coefficients s'expriment à partir des carrés des longueurs des arêtes de toute triangulation du polyèdre.

- C'est une généralisation de la formule de Héron pour la surface des triangles et de la formule de Tartaglia pour le volume des tétraèdres.

Le calcul du volume des polyèdres

- Le cas d'un polyèdre général peut être traité par découpage en tétraèdres.
- Ceci est possible à cause d'un théorème de Idzhad SABITOV obtenu en 1996, simplifié par CONNELLY, SABITOV et Anke WALZ en 1997.

Calcul du volume d'un polyèdre

Le carré du volume d'un polyèdre est racine d'une équation polynomiale dont les coefficients s'expriment à partir des carrés des longueurs des arêtes de toute triangulation du polyèdre.

- C'est une généralisation de la formule de Héron pour la surface des triangles et de la formule de Tartaglia pour le volume des tétraèdres.

Le calcul du volume des polyèdres

- Le cas d'un polyèdre général peut être traité par découpage en tétraèdres.
- Ceci est possible à cause d'un théorème de Idzhad SABITOV obtenu en 1996, simplifié par CONNELLY, SABITOV et Anke WALZ en 1997.

Calcul du volume d'un polyèdre

Le carré du volume d'un polyèdre est racine d'une équation polynomiale dont les coefficients s'expriment à partir des carrés des longueurs des arêtes de toute triangulation du polyèdre.

- C'est une généralisation de la formule de Héron pour la surface des triangles et de la formule de Tartaglia pour le volume des tétraèdres.

Le calcul du volume des polyèdres

- Le cas d'un polyèdre général peut être traité par découpage en tétraèdres.
- Ceci est possible à cause d'un théorème de Idzhad SABITOV obtenu en 1996, simplifié par CONNELLY, SABITOV et Anke WALZ en 1997.

Calcul du volume d'un polyèdre

Le carré du volume d'un polyèdre est racine d'une équation polynomiale dont les coefficients s'expriment à partir des carrés des longueurs des arêtes de toute triangulation du polyèdre.

- C'est une généralisation de la formule de Héron pour la surface des triangles et de la formule de Tartaglia pour le volume des tétraèdres.

Le théorème du soufflet

- En déformant un polyèdre continûment sans changer la longueur de ses arêtes, son volume ne peut sauter d'une racine du polynôme donné par le thèorème précédent à une autre.
- D'où

Théorème du soufflet

Le volume d'un flexaèdre ne change pas dans sa déformation, et donc "les flexaèdres ne fument pas".

- La méthode de preuve utilise une construction d'algèbre pure *a priori* étrangère à la question géométrique considérée.
- Il s'agit de montrer qu'à partir de la formule de Tartaglia on obtient le volume par "extension successive" du polyèdre en suivant son patron grâce à la théorie algébrique des *valuations* et une récurrence sur la complexité du polyèdre.

Le théorème du soufflet

- En déformant un polyèdre continûment sans changer la longueur de ses arêtes, son volume ne peut sauter d'une racine du polynôme donné par le thèorème précédent à une autre.
- D'où

Théorème du soufflet

Le volume d'un flexaèdre ne change pas dans sa déformation, et donc "les flexaèdres ne fument pas".

- La méthode de preuve utilise une construction d'algèbre pure *a priori* étrangère à la question géométrique considérée.
- Il s'agit de montrer qu'à partir de la formule de Tartaglia on obtient le volume par "extension successive" du polyèdre en suivant son patron grâce à la théorie algébrique des *valuations* et une récurrence sur la complexité du polyèdre.

Le théorème du soufflet

- En déformant un polyèdre continûment sans changer la longueur de ses arêtes, son volume ne peut sauter d'une racine du polynôme donné par le thèorème précédent à une autre.
- D'où

Théorème du soufflet

Le volume d'un flexaèdre ne change pas dans sa déformation, et donc "les flexaèdres ne fument pas".

- La méthode de preuve utilise une construction d'algèbre pure *a priori* étrangère à la question géométrique considérée.
- Il s'agit de montrer qu'à partir de la formule de Tartaglia on obtient le volume par "extension successive" du polyèdre en suivant son patron grâce à la théorie algébrique des *valuations* et une récurrence sur la complexité du polyèdre.

Le théorème du soufflet

- En déformant un polyèdre continûment sans changer la longueur de ses arêtes, son volume ne peut sauter d'une racine du polynôme donné par le thèorème précédent à une autre.
- D'où

Théorème du soufflet

Le volume d'un flexaèdre ne change pas dans sa déformation, et donc "les flexaèdres ne fument pas".

- La méthode de preuve utilise une construction d'algèbre pure *a priori* étrangère à la question géométrique considérée.
- Il s'agit de montrer qu'à partir de la formule de Tartaglia on obtient le volume par "extension successive" du polyèdre en suivant son patron grâce à la théorie algébrique des *valuations* et une récurrence sur la complexité du polyèdre.

Le théorème du soufflet

- En déformant un polyèdre continûment sans changer la longueur de ses arêtes, son volume ne peut sauter d'une racine du polynôme donné par le thèorème précédent à une autre.
- D'où

Théorème du soufflet

Le volume d'un flexaèdre ne change pas dans sa déformation, et donc "les flexaèdres ne fument pas".

- La méthode de preuve utilise une construction d'algèbre pure *a priori* étrangère à la question géométrique considérée.
- Il s'agit de montrer qu'à partir de la formule de Tartaglia on obtient le volume par "extension successive" du polyèdre en suivant son patron grâce à la théorie algébrique des *valuations* et une récurrence sur la complexité du polyèdre.

Le théorème du soufflet

- En déformant un polyèdre continûment sans changer la longueur de ses arêtes, son volume ne peut sauter d'une racine du polynôme donné par le thèorème précédent à une autre.
- D'où

Théorème du soufflet

Le volume d'un flexaèdre ne change pas dans sa déformation, et donc "les flexaèdres ne fument pas".

- La méthode de preuve utilise une construction d'algèbre pure *a priori* étrangère à la question géométrique considérée.
- Il s'agit de montrer qu'à partir de la formule de Tartaglia on obtient le volume par "extension successive" du polyèdre en suivant son patron grâce à la théorie algébrique des *valuations* et une récurrence sur la complexité du polyèdre.

Le théorème du soufflet

- En déformant un polyèdre continûment sans changer la longueur de ses arêtes, son volume ne peut sauter d'une racine du polynôme donné par le thèorème précédent à une autre.
- D'où

Théorème du soufflet

Le volume d'un flexaèdre ne change pas dans sa déformation, et donc "les flexaèdres ne fument pas".

- La méthode de preuve utilise une construction d'algèbre pure *a priori* étrangère à la question géométrique considérée.
- Il s'agit de montrer qu'à partir de la formule de Tartaglia on obtient le volume par "extension successive" du polyèdre en suivant son patron grâce à la théorie algébrique des *valuations* et une récurrence sur la complexité du polyèdre.

Merci pour votre attention.

Jean Pierre BOURGUIGNON
Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
(France)
jpb@ihes.fr