POLYEDRES

Des PLIAGES
à la relation d'EULER

Kafemath, 20 septembre 2012

Polyèdres

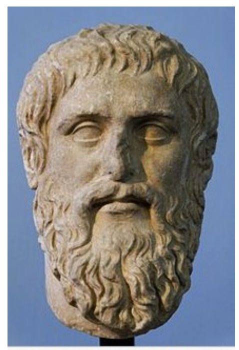
du grec Πολυεδρον, beaucoup de faces

- définition sommaire : Un polyèdre (ou solide) est un « objet » dans l'espace à 3 dimensions, qui comporte
  - des Sommets (au nombre de S)
  - des Arêtes (segments reliant 2 sommets)
  - des Faces planes (polygones bordés par des arêtes)

- une définition sommaire qui laisse perplexe

Fascination pour les polyèdres REGULIERS ou non

- Platon



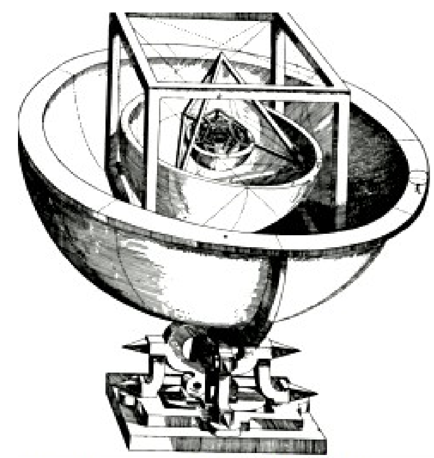
Platon, copie du portrait exécuté par Silanion pour l'Académie vers 370 av. J.-C.,

Euclide a donné une description mathématique complète des solides de Platon dans les *Eléments* (env. 300 av. J.-C.). Dans le Livre XIII, il décrit la construction du tétraèdre, de l'octaèdre, du cube, de l'icosaèdre et du dodécaèdre. Il calcule le rapport entre le diamètre de la sphère circonscrite et la longueur des arêtes

- Qu'est ce qu'un polyèdre régulier ?

  Pour Platon, il a toutes ses faces identiques, et tous ses sommets identiques.

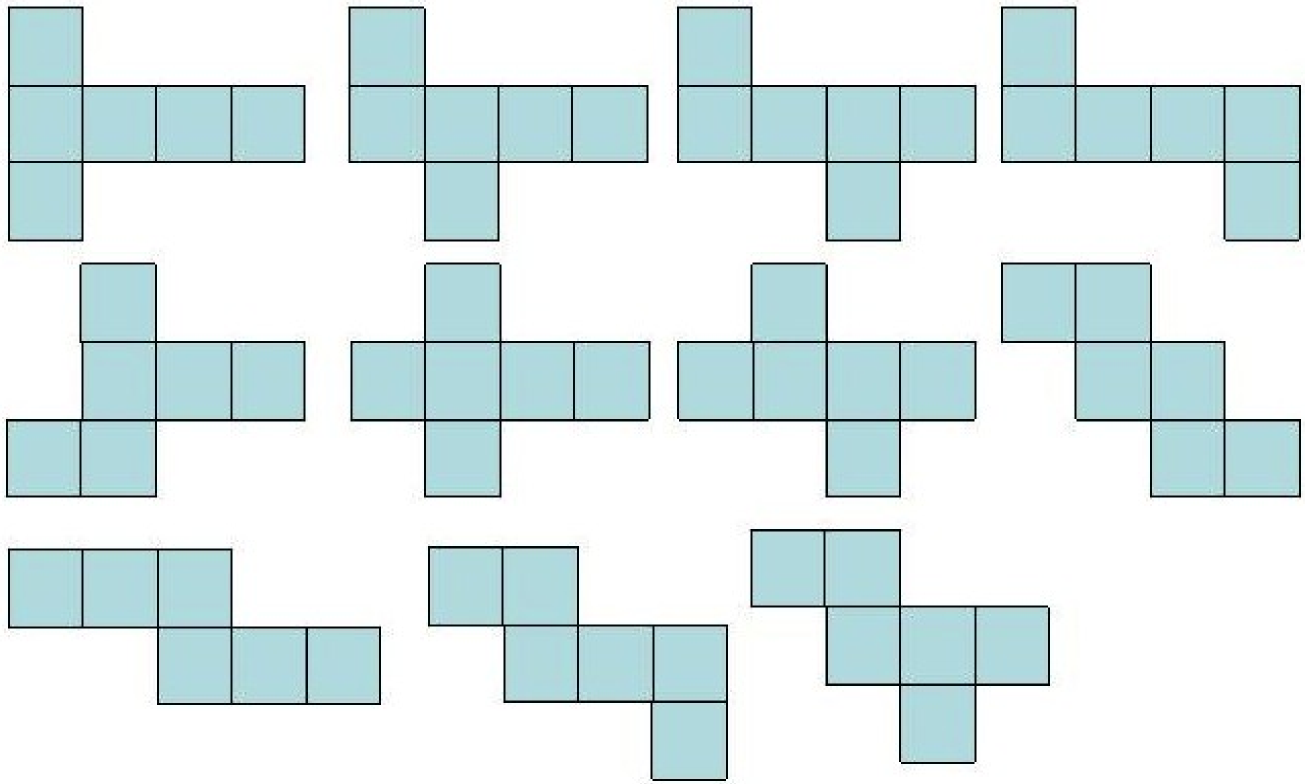
- Kepler
-



Modèle du système solaire par des modèles de solides de Platon de Kepler issu du *Mysterium Cosmographicum* (en) (1596)

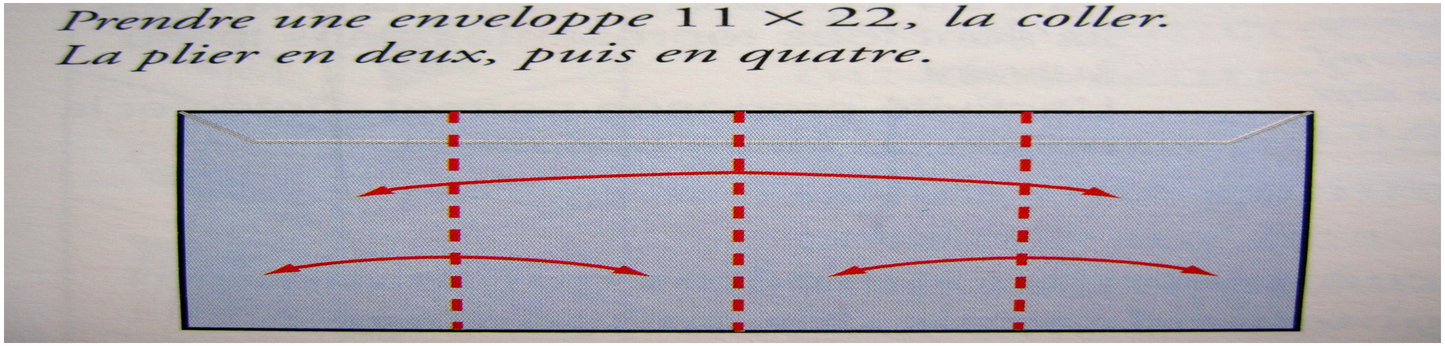
Patron d'un cube : LE ou LES ?

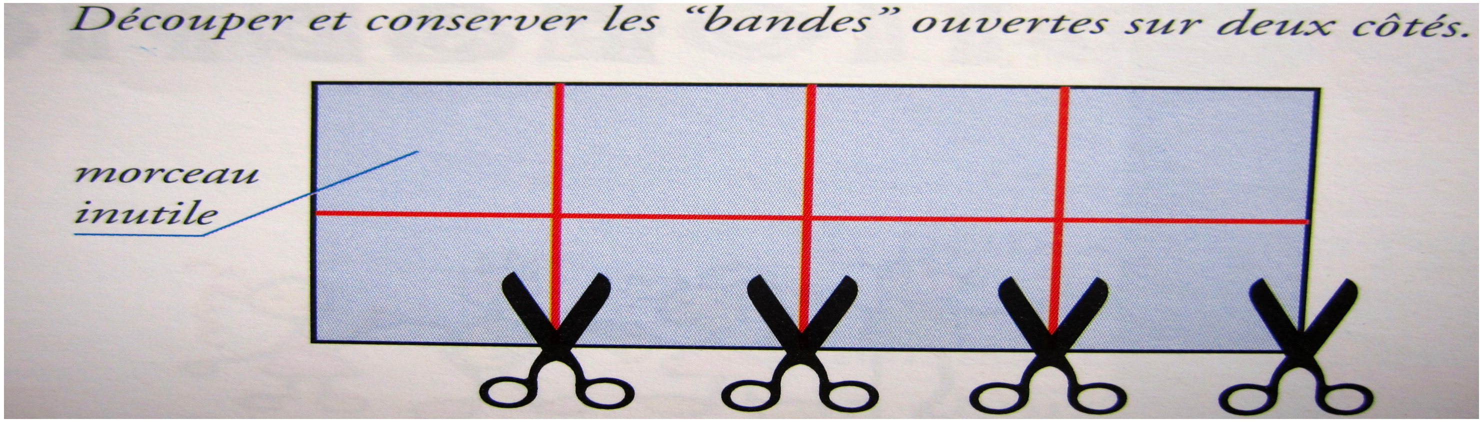
Lequel est celui de l'école ?

- 

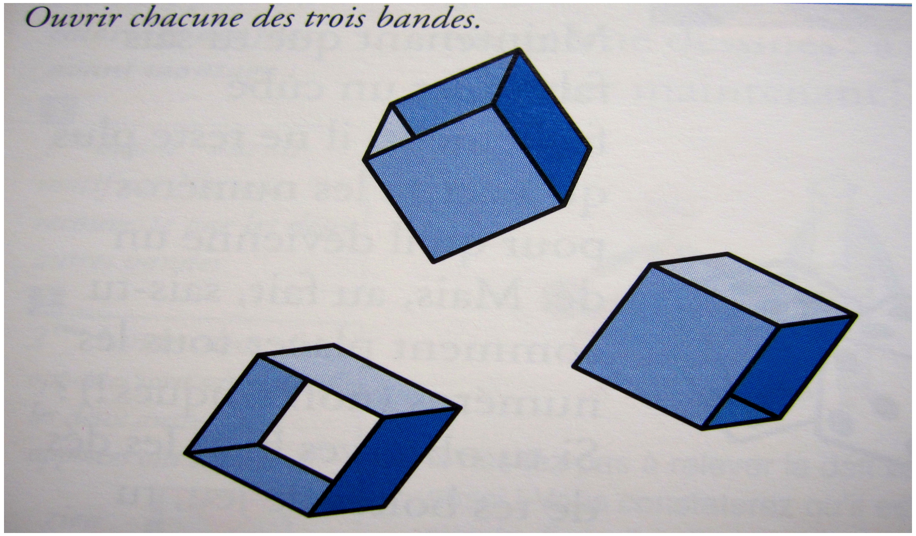
Un CUBE sans colle *(Boursin Larose Ed Kangourou)*

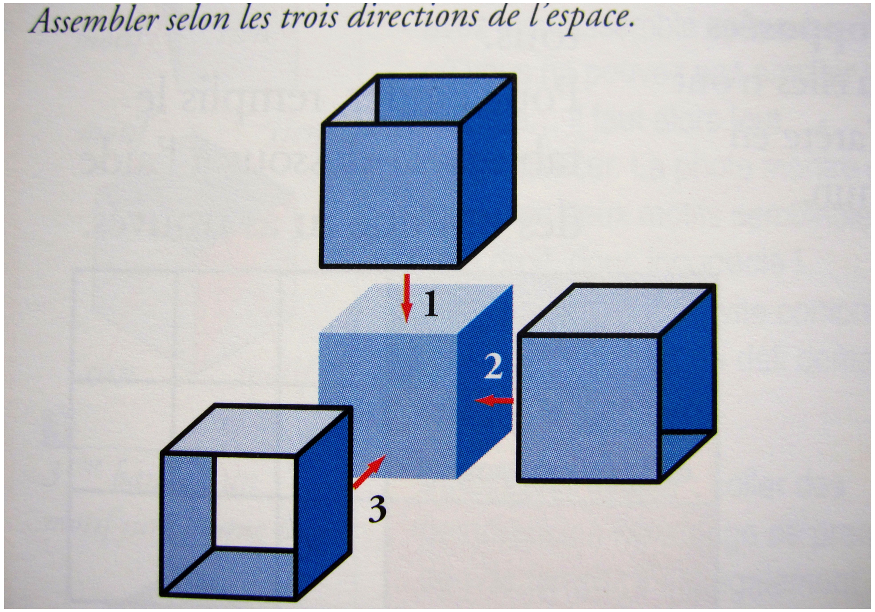
- Avec une enveloppe format 11 x 22





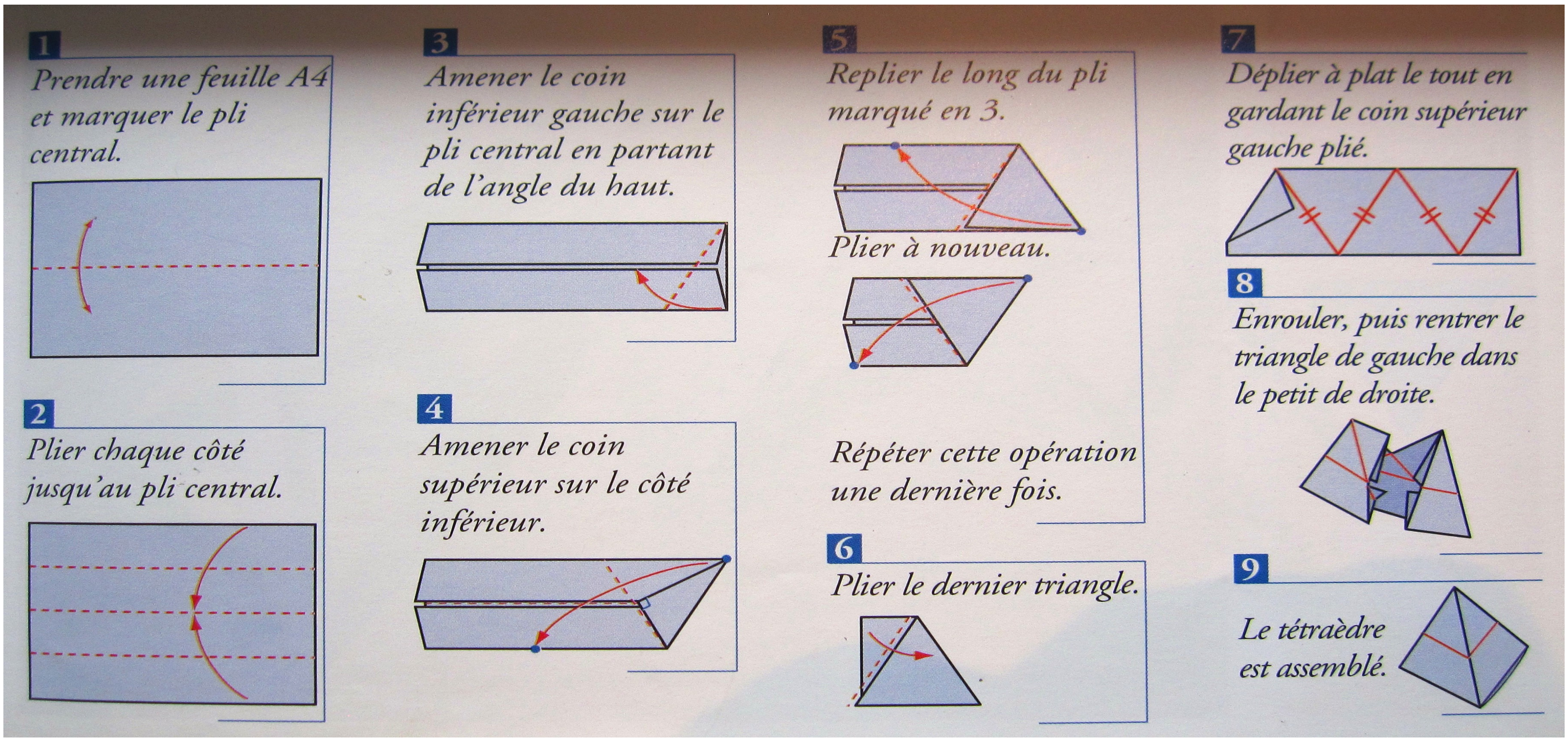
Un CUBE sans colle *(Boursin Larose Ed Kangourou)*



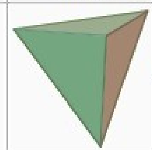
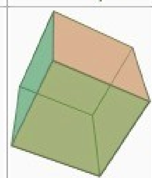
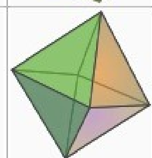
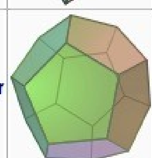
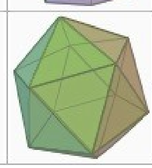


Un tétraèdre *(Boursin Larose Ed Kangourou)*

Avec une feuille A4 sans colle



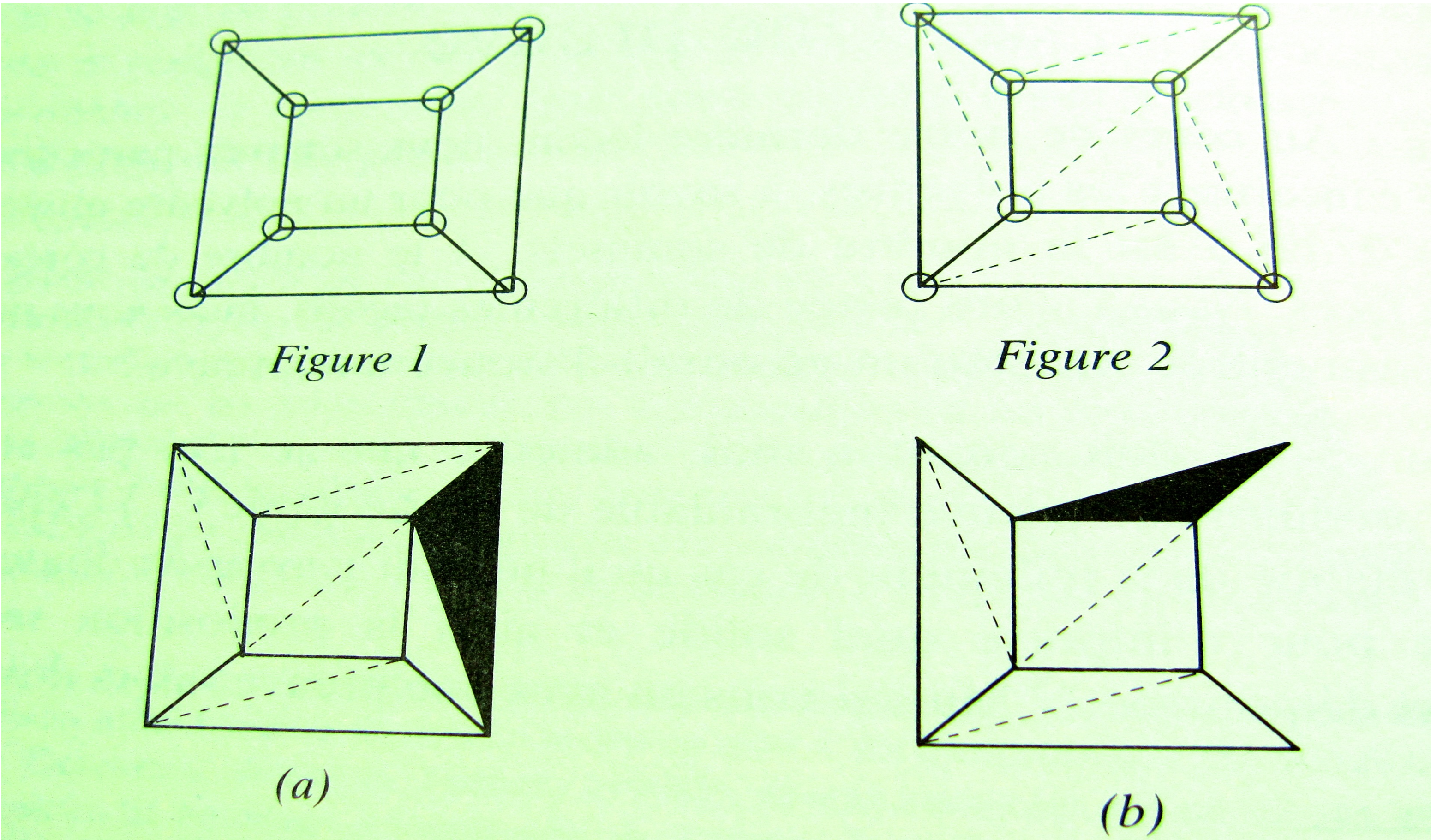
La Conjecture d'EULER

Nom	Image	*S* (sommets)	*A* (arêtes)	*F* (faces)	Caractéristique d'Euler : *S* – *A* + *F*
Tétraèdre		4	6	4	2
Hexaèdre ou cube		8	12	6	2
Octaèdre		6	12	8	2
Dodécaèdre régulier		20	30	12	2
Icosaèdre		12	30	20	2

- Pour tout polyèdre, S – A + F = 2

La « démonstration d'EULER »(avec un cube)

- On supprime une face, on « écrase » le solide. Il reste S sommets, A arêtes, F-1 faces.
- On triangule chaque face : S-A+F ne varie pas



Combien de solides réguliers ?

- Un solide est régulier si
  - de chaque sommet partent autant d'arêtes p
  - chaque face est bordée d'autant d'arêtes q
- **Comptons les arêtes de 2 façons différentes**

1) Il y a S sommets d'où partent p arêtes. Donc en tout

A = p S. Mais chaque arête a été comptée 2 fois

D'où **p S = 2 A**

2) Il a F faces, bordées par q arêtes. Donc en tout

A = F q. Chaque arête a été comptée 2 fois

D'où **F q = 2 A**

Résumons : on a pS= 2A , et qF =2A et F – A + S + 2. D'où

- on a

De la relation d'Euler-Poincaré $\boxed{F+S=A+2}$, on déduit:

$\frac{2A}{q}+\frac{2A}{p}=A+2$ On divise tout par 2A

$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}+\frac{1}{A}$. A est positif donc $\frac{1}{2}+\frac{1}{A}>\frac{1}{2}$

d'où $\boxed{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}>\frac{1}{2}}$ Or p et q valent au moins 3.

* Si $q=3$: $\frac{1}{p}>\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ d'où $\frac{1}{p}>\frac{1}{6}$ donc $\boxed{p<6.}$
* Si $p=3$: id. $q<6$
* Si p et q >4: on a: $\frac{1}{p}<\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{q}<\frac{1}{4}$ donc: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\frac{1}{2}$

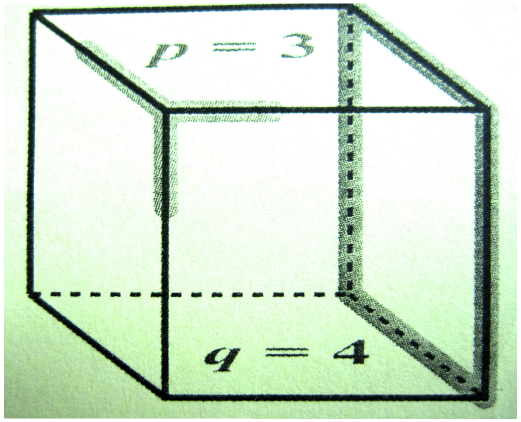
Impossible

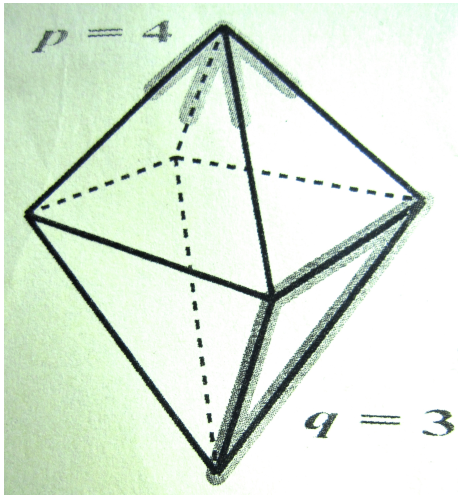
Les seules valeurs possibles de p et q:

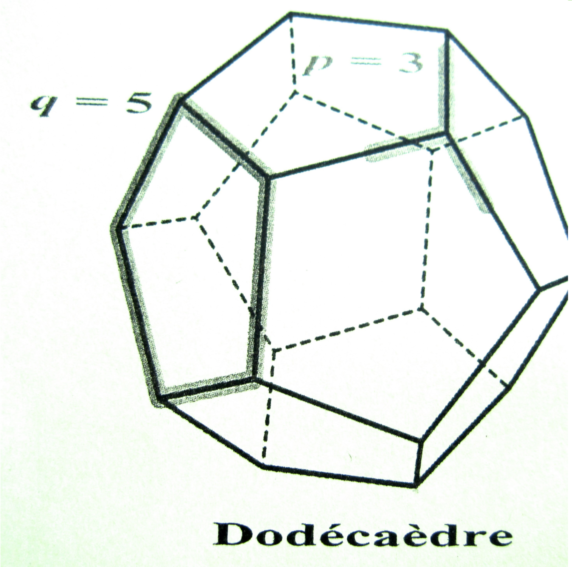
$\{3;3\}$ = tétraédre ; $\{3;4\}$ = cube ; $\{4;3\}$ = octaédre

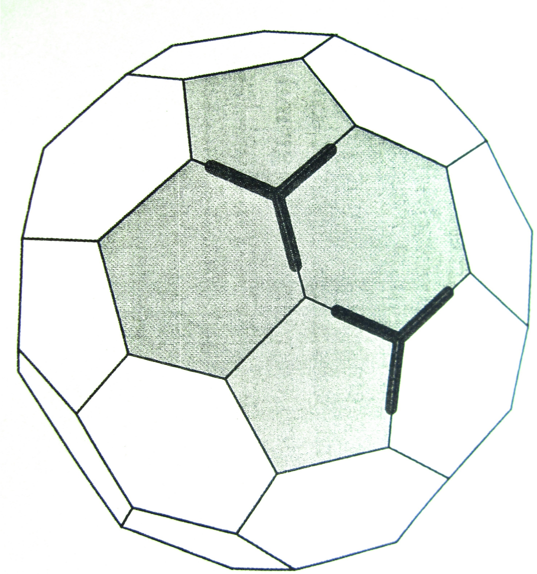
$\{3;5\}$ = dodécaédre ; $\{5;3\}$ = icosaédre

Trois solides réguliers de Platon et un intrus





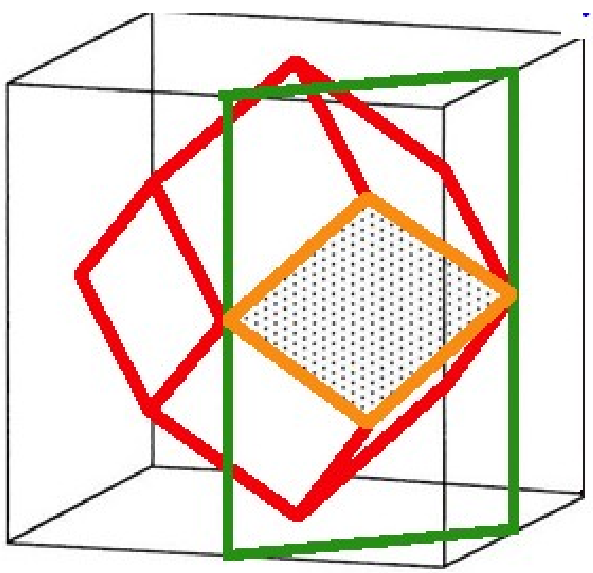




Polyèdres réguliers et Faces identiques

Le rhombododécaédre a 12 faces en losange, toutes identiques.
Mais pour certains sommets, le nombre d'arêtes p est égal à 3,
et pour d'autres 4 !

- Le rhombododécaèdre



Les cristaux rhombododécaédriques de la galène

Les polyèdres étoilés

- Mosaïque

Un petit dodécaèdre étoilé apparaît dans une mosaïque de la Place St Marc à Venise (XV ° siècle ?, Paolo Uccetto?)

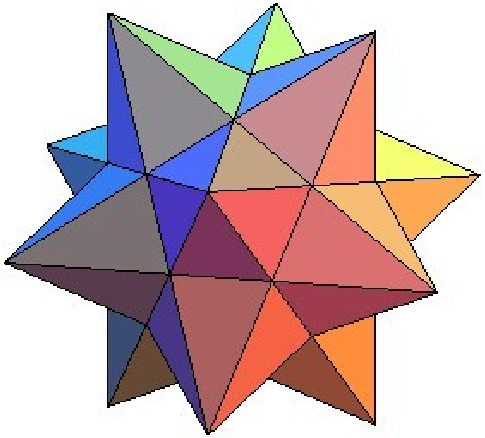
- 1 Polyèdre de Kepler Poinsot (1619)

  ou petit dodécaèdre étoilé

  - 12 faces (pentagones croisés)
  - 12 sommets de degré 5
  - 30 arêtes

    (Rem : 4 polyèdres réguliers non convexes *(A uniformes....)*

- Mathcure.cc



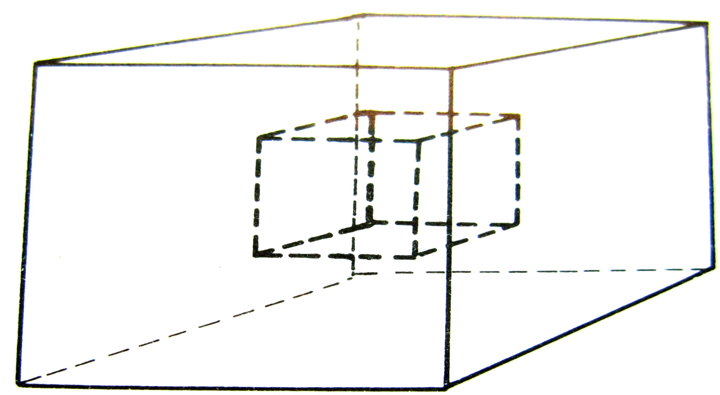
CRITIQUE de la PREUVE

- Un **contre exemple**

  (imaginé par Lhuilier en 1812, grâce à une collection minéralogique : cube de galène inclus dans un cristal translucide de fluorine)

-

- Un cube creux



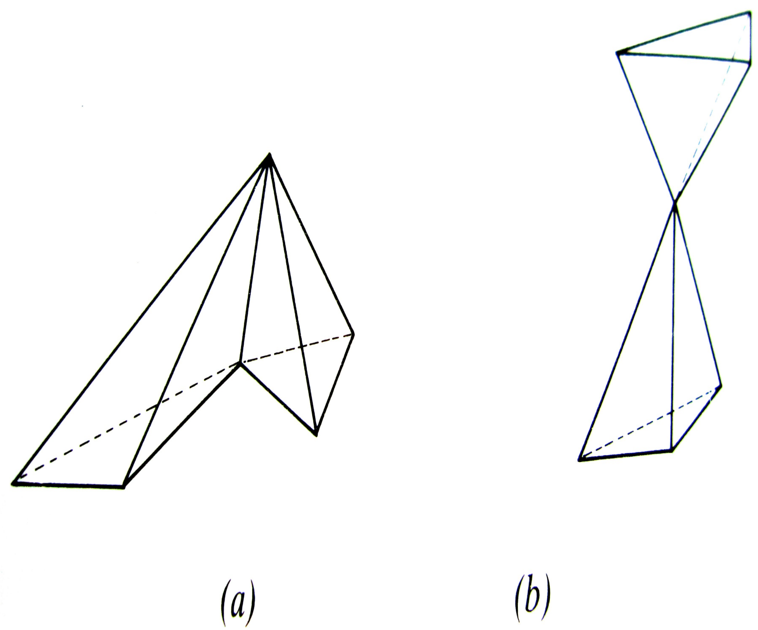
  Si on enlève une face, on ne peut pas le mettre à plat !

- Et pour chaque cube, S-A+F =2,
- Donc pour le cube creux,

  S-A+F = 4 !

D'autres « monstres »

- Les tétraèdres siamois (Hessel 1832)
-



- Pour (a) (siamois par une arête), on a

  S-A+F = 3

- Id pour (b) siamois par un sommet
  - S-A+F = 2 + 2 – 1 = 3

La conjecture attaquée

- Pour le petit dodécaèdre étoilé, la conjecture de Descartes Euler est fausse, S-A+F = – 6
- Delta : « *mais ne voyez vous pas la futilité de ces prétendues Réfutations ? Jusqu'ici, quand on inventait un nouveau polyèdre, c'était en vue de quelque but pratique. Maintenant, on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères ! Notre sujet d'étude est devenu un musée tératologique où polyèdres décents et ordinaires pourront être heureux de se réserver un petit coin !* »

(Paraphrase de Poincaré, à propos des fonctions non continues, non dérivables en 1908, Lakatos « *Preuves et Réfutations* »)

La convexité ?

- Une nouvelle définition apparaît pour les polyèdres : la convexité

Un polyèdre est dit CONVEXE si tout point de tout segment joignant deux points quelconques

du polyèdre appartient au polyèdre. Autrement dit, un polyèdre est convexe si toutes ses diagonales sont entièrement contenues dans son « intérieur ».

DEF BARYCENTRIQUE d'un polyèdre CONVEXE : Soit M1, M2, ... Mi points non coplanaires

le polyèdre convexe est l'ensemble des points M barycentres de M1, M2, Mi, affectés de coefficients tous positifs.

« Tous les polyèdres convexes sont eulériens »

- (Legendre, en 1809)

La convexité ?

- Une nouvelle définition apparaît pour les polyèdres : la convexité (Legendre, en 1809)

  « *Tous les polyèdres convexes sont eulériens* »

  Apparaît alors un « contre-exemple » à méditer: le cylindre. Un cylindre est d'intérieur convexe. Il a deux arêtes courbes, deux faces planes et une face courbe... Il a donc O sommet, 2 arêtes et 3 faces.

- *On peut calculer : S-A+F = 0-2+3=1, qui contredit en apparence le fait que sa caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 2.*

- *Où est l'erreur ?*

La caractéristique d'EULER Poincaré

- $\chi = S - A + F$
- Pour tout polyèdre convexe, $\chi = 2$

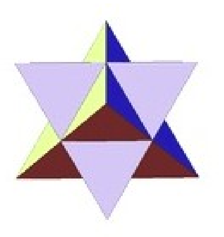
Pour un polyèdre plein :
$\chi = S - A + F - V$

- à poursuivre à l'infini

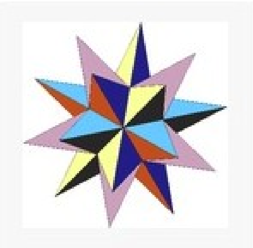
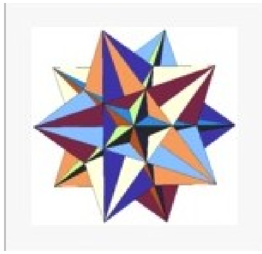
Des polyèdres étoilés

- A vous de calculer la caractéristique d'Euler Poincaré....

- Pour ceux ci



- ou ceux là


- et celui-ci !!

Polyèdres et vocabulaire

Cube adouci

Diamant triangulaire, pentagonal, Diamant carré gyroallongé

Prisme triangulaire triaugmenté

Grand icosaèdre

Gyrobicoupole octogonale allongée ・

Disphénoïde adouci (solide de Johnson

Triacontaèdre rhombique (solide Catalan)

Johnson publie en 1966 une liste de 92 polyèdres convexes, non uniformes, ayant des faces régulières. *(complète, Victor Zalgallen 1969)*

Les SIMPLEXES

Les critiques

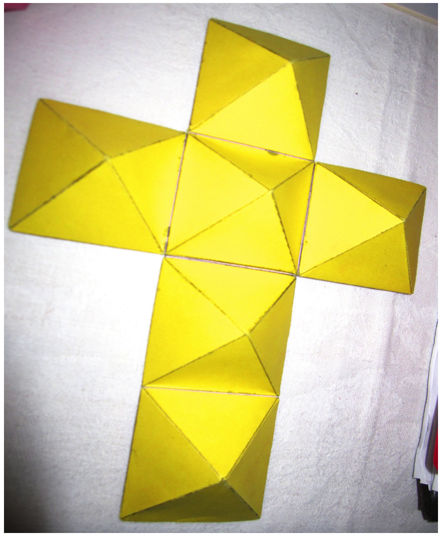
- Polyèdres ou Solides : « enveloppe » ou « intérieur » ?
- Pb de dimensions : S correspond à un point (dim 0)
  - A, aux segments (dim 1)
  - F, aux faces (dim 2)
- S-A+F pourrait se calculer pour d'autres objets : la sphère, un segment, un polygone, l'anneau de Möbius......

  d'où la généralisation de la notion de polyédres : les simplexes

Polyèdres sans colle

- Salon

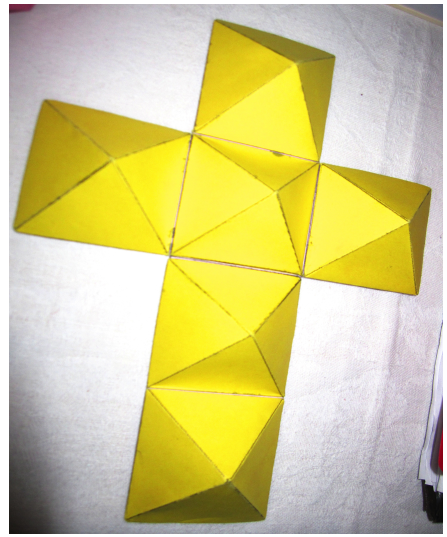
  des Jeux mathèmatiques
- Univ Jussieu
- Juin 2012

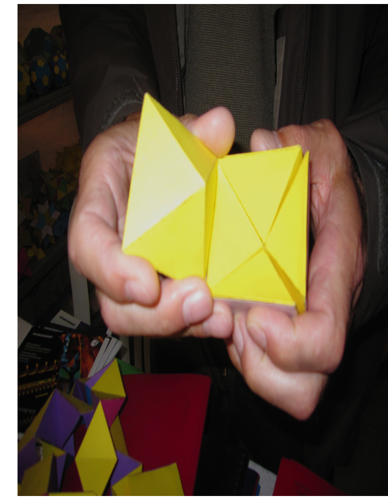


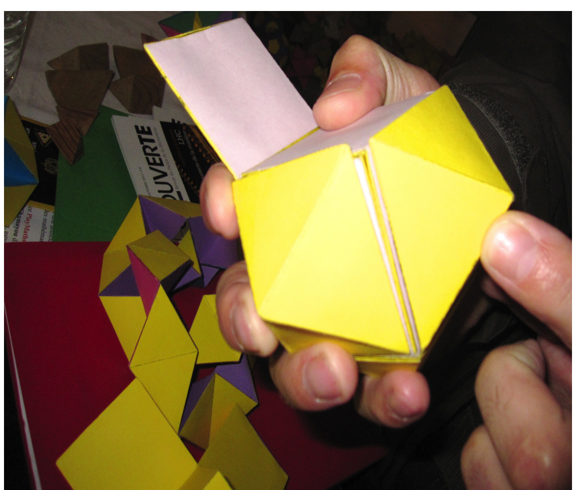
Polyèdres sans colle

- Salon

  des Jeux mathèmatiques
- Univ Jussieu
- Juin 2012







Polyèdres sans colle

- Salon

  des Jeux mathèmatiques
- Univ Jussieu
- Juin 2012