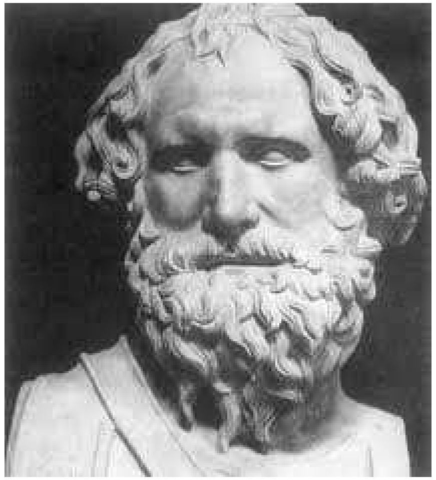
Αρχιμηδης **ARCHIMEDE**

Le génie de Syracuse

(- 287 ; - 212)



François Lavallou - Association PlayMaths

Quelques repères historiques

Guerres puniques:

-264, -241 : déclin naval de Carthage (*corbeau*)

-218, -201 : Campagne d'Italie d'Hannibal

-149, -146 : *Carthago delenda est*

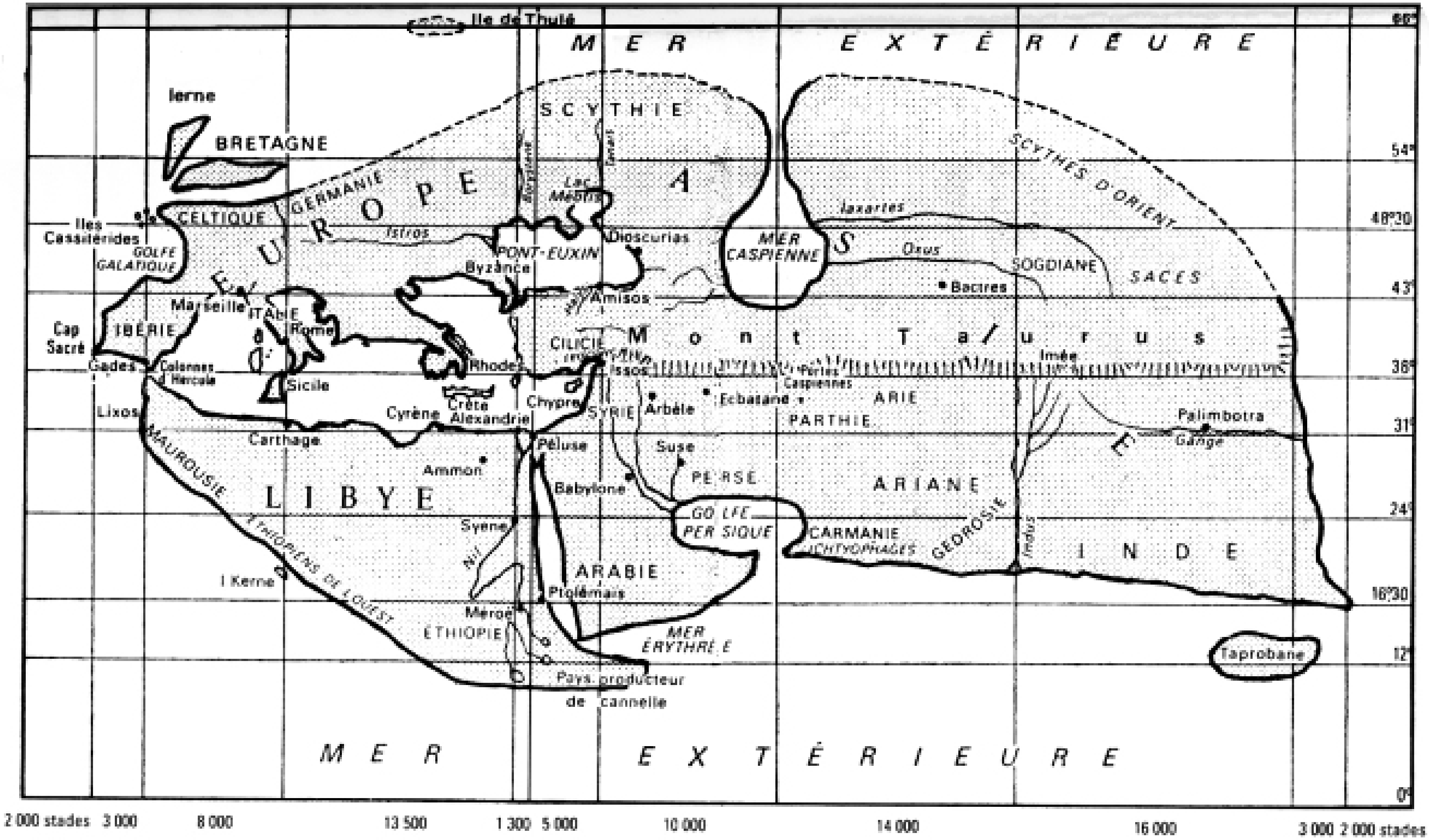
Platon (-427, -346)

Eudoxe de Cnide (-395,-342)

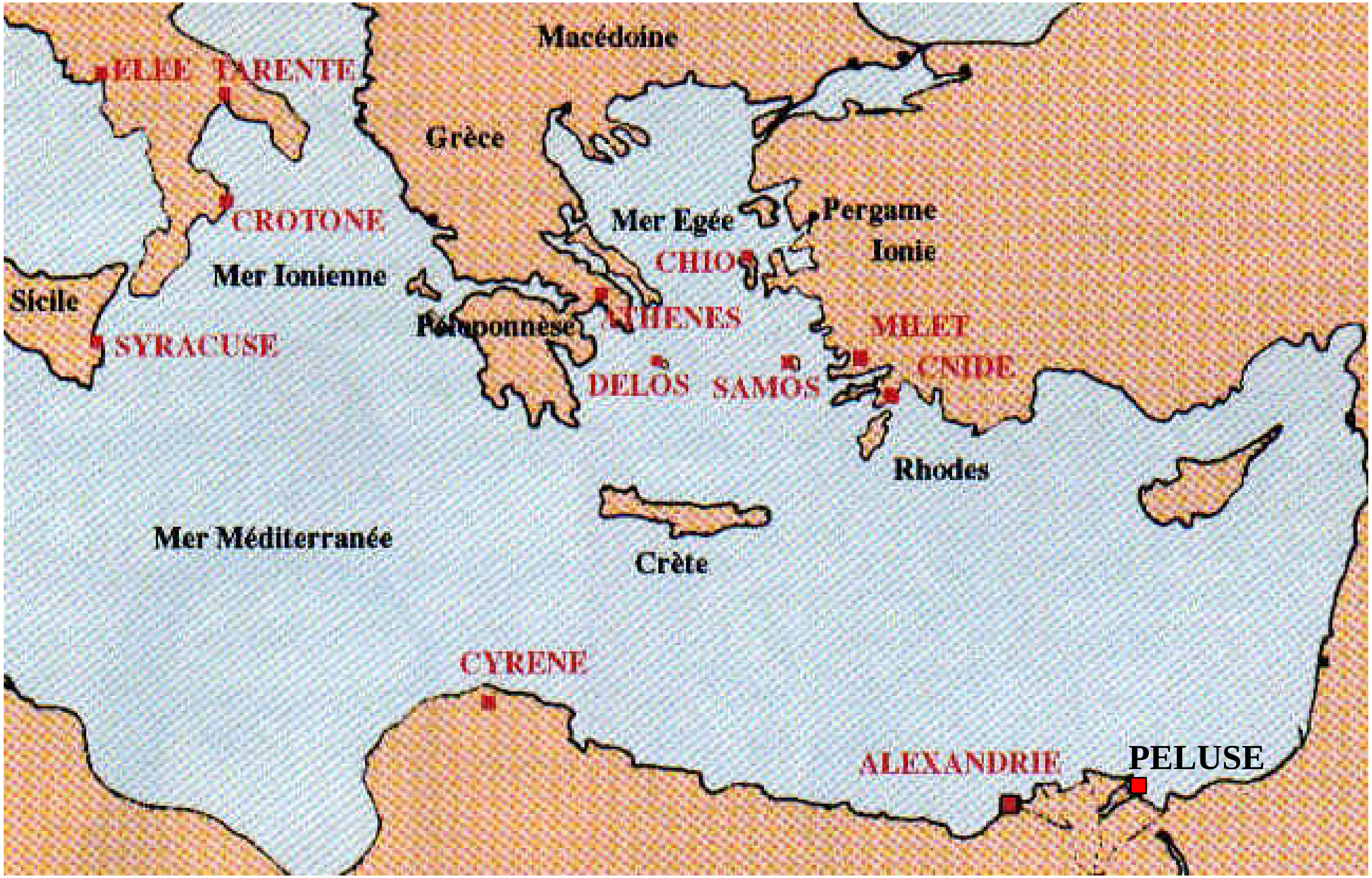
Aristote (-384, -322)

Euclide (-325, -265)

Eratosthène (-276, -194)



La carte d'Ératosthène.


Macédoine
ELEE
TARENTE
Grèce
CROTONE
Mer Egée
Pergame
Ionie
CHIO
Mer Ionienne
Sicile
Péloponnèse
ATHENES
MILET
SYRACUSE
DELOS
SAMOS
CNIDE
Rhodes
Mer Méditerranée
Crète
CYRENE
ALEXANDRIE
PELUSE

BIOGRAPHIE d’ARCHIMEDE (-287, -212)

Petit-fils d’Acupatre : Arénaire

Fils de PHIDIAS, astronome (*diamètre soleil/lune*)

Proche de **Hiéron II** (*tyran de Syracuse entre -270 et -215*)

Voyage en Egypte

Correspondances suivies avec:

Eratosthène (-276, -194)

Conon de Samos (-280, -220)

Dosithée (?)

Peu d’infos hors de ses œuvres

ARCHIMEDE l'INGENIEUR

Contraint par Hiéron à produire

Domaines multiples :

Statique

Hydrostatique

Mécanique

Hydraulique

Balistique

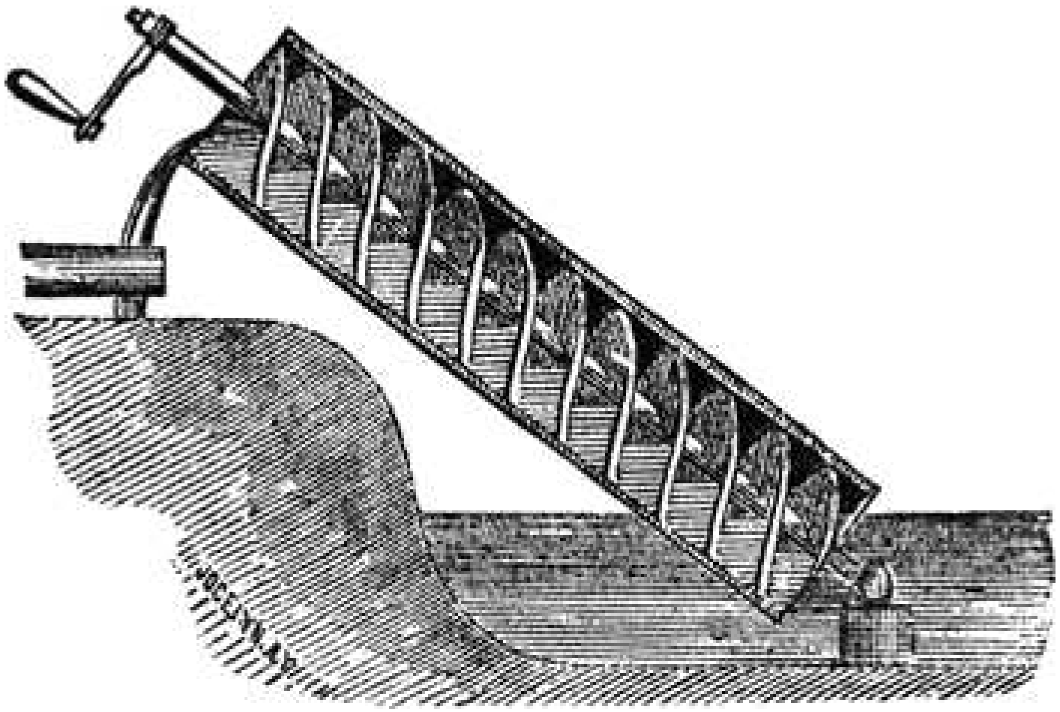
…

ARCHIMEDE l'INGENIEUR

Vis (*Philon de Byzance, Vitruve*)

Mise au point lors de son voyage en Egypte

Lien avec hélices, Conon?



ARCHIMEDE l'INGENIEUR

Planétarium

qui réunit tous les mouvements célestes connus de l'époque

Allusion de Cicéron lors du pillage de Syracuse

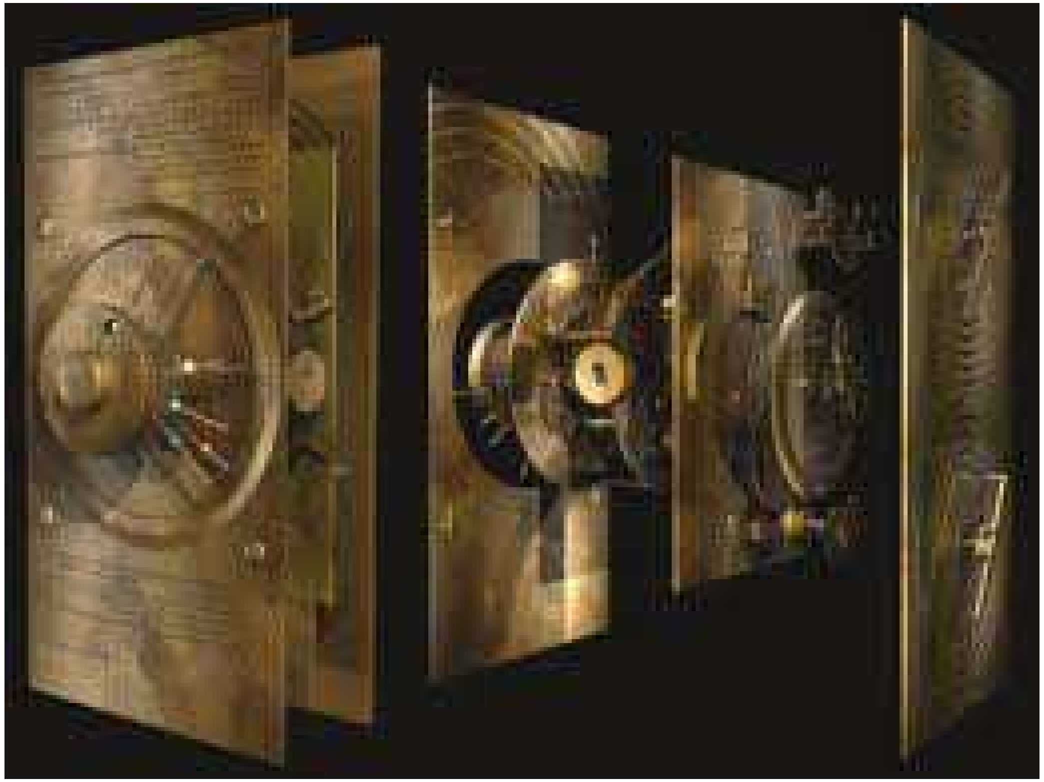
Sphères d'Archimède (*plutôt que les cercles?*)

Allusion à cette machine:

Platon (?), **Eudoxe de Cnide**, **Calliste**

Anticythère?

Anticythère



François Lavallou - Association PlayMaths

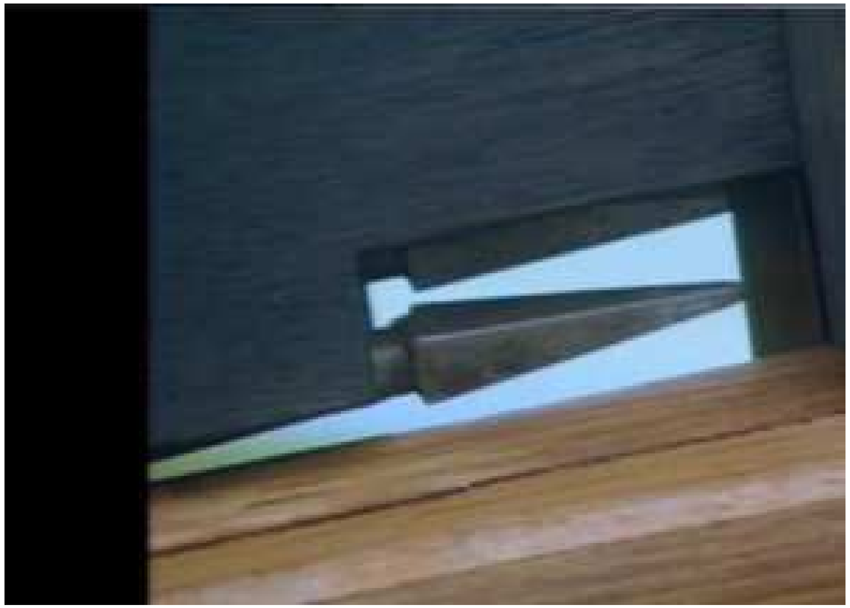
INGENIEUR MILITAIRE

Catapultes, « mains de fer » (corbeau)

Fortifications (*Plutarque, Polybe, Tite-Live*)

On ne prête qu'aux riches

Orgues hydrauliques (Tertullien)
En fait : Alexandrin Ktésibios, puis Héron



INGENIEUR MILITAIRE

Miroirs ardents

Anthémius de Tralles (*architecte de sainte Sophie*)

24 miroirs plans

Discussions sur efficacité, faisabilité

Dioclès (*focale de la parabole, cissoïde*)

Archimède : **aucun** ouvrage technologique!

INGENIEUR MILITAIRE

Expérience du port de Syracuse

Contredire le Stagirite (Aristote)

Dynamique à seuil (Cf. tome I pXI)

Erreur jusqu'aux temps modernes

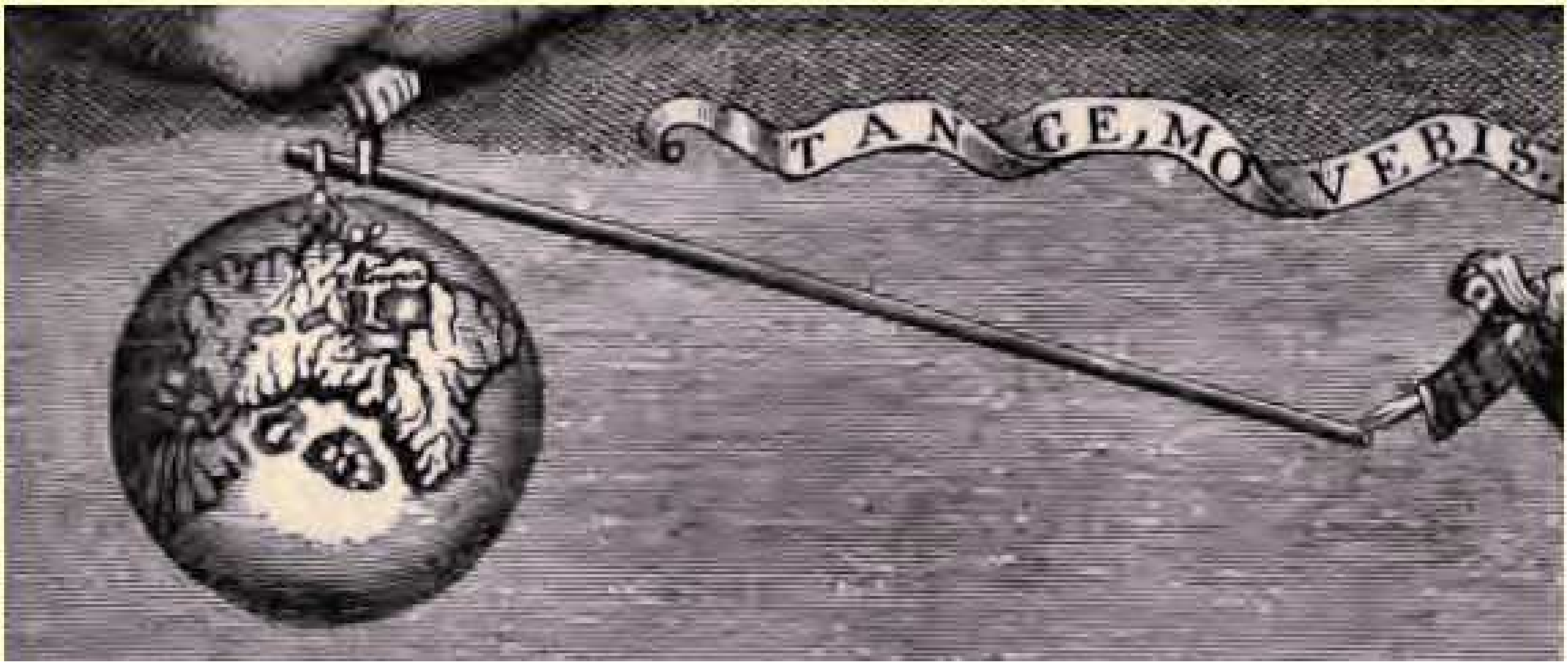
Archimède reprends la démonstration d'Aristote:

« Si la force pouvait se diviser, un seul homme suffirait pour un bateau » (*argument pour initiés*)

Expériences de physique = outil de justification de la théorie
Vérification de proposition de math appliquée
Vérification de loi physique

Sources : Plutarque (vie de Marcellus), Proclus

Donnez-moi un point d'appui (et un levier), et je soulèverai la terre.



MORT d’ARCHIMEDE

Siège de Syracuse

Instruments

de défense

Guerre puniques

Marcellus :

Attaque de nuit
Prise Syracuse
Mort d’Archimède
Hommage

DEATH OF ARCHIMEDES.

MORT d'ARCHIMEDE

Cercles ou sphères?

Mathématiques pré-archimédienne

Eléments d'Euclide: arithmétique, géométrie pythagoricienne, figures planes, cercles

Théorie des similitudes reprise par Eudoxe de Cnide

Théétète : **polyèdres réguliers**

Construction et existence des **5 polyèdres platoniciens**

Rapport de surfaces **cercle-carré**, de volume **sphère-cube**

$$\boxed{\textbf{vol(cône)=vol(cylindre)/3}}$$

Figures de révolution : cône, cylindre, sphère

Tore : Archytas de Tarente

Quadratures : lunules d'Hippocrate

Quadratrice d'Hippias d'Elis + **coniques**

Œuvre mathématique d'Archimède

Créativité, variété, perfection logique

Trouvailles sur polygones réguliers

Méthodes nouvelles – **champs géométriques nouveaux**

Cercle : 3+10/71 < pi < 3+1/7

Volume entre surface courbe et plane

Méthode d'exhaustion perfectionnée (**compression**)
Première intégration de l'histoire :
quadrature de la parabole

Spirale

Mathématiques appliquées :
Traité de statique, mécanique rationnelle

Traités d'Archimède

De l'équilibre des figures planes (Livre I) (*)

La quadrature de la parabole (*)

De l'équilibre des figures planes (Livre II) (*)

De la sphère et du cylindre (I-II)

Des spirales (*)

Sur les conoïdes et les sphéroïdes (*)

Des corps flottants (I-II) (*)

De la mesure du cercle

L'arénaire

De la méthode

Traités cités mais perdus

Arithmétique (*archimédien*)

Cinq polyèdres réguliers

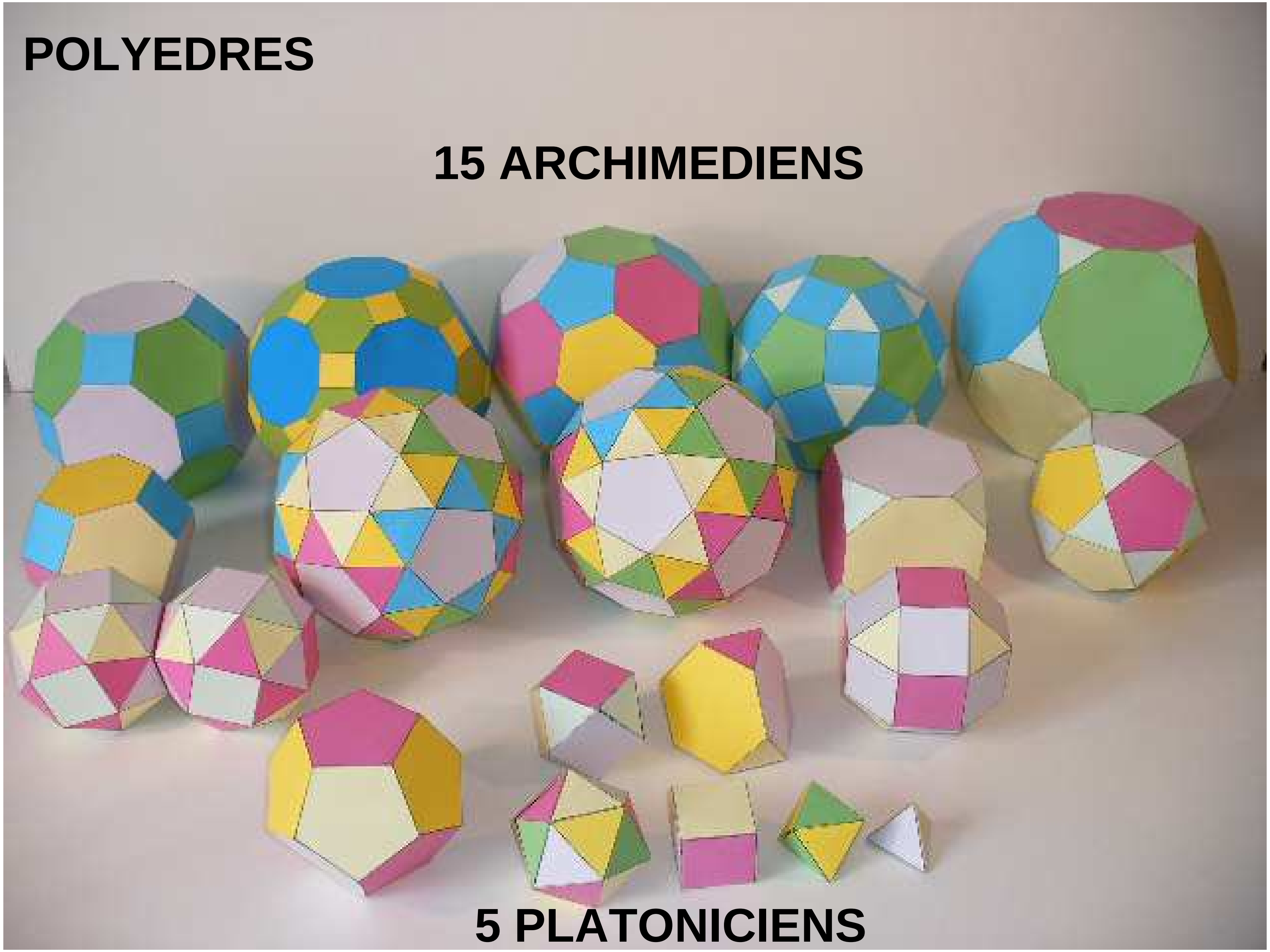
Treize polyèdres semi-réguliers (archimédiens) (Pappus)

Statique du levier et des centres de gravité

Parties d'un **traité d'optique** (*dans l'Almageste de Ptolémée*)

Traités de **géométrie élémentaire** : propriété du cercle

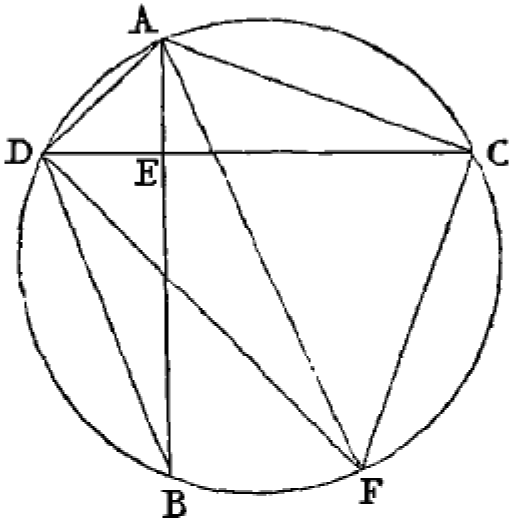
(version arabe de 15 théorèmes et traduction latine Liber assumptorum)
Texte original reconstitué en Dorien (pXIX)

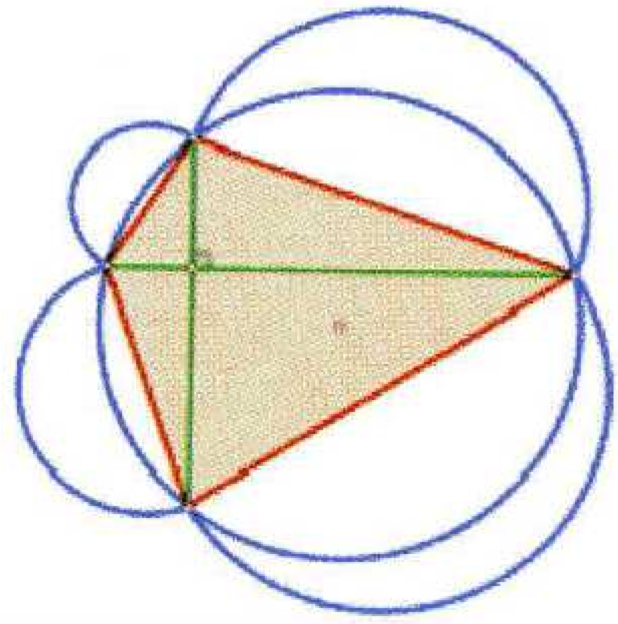


François Lavallou - Association PlayMaths

Lemmes

Proposition XI (généralisation Hippocrate de Chios)



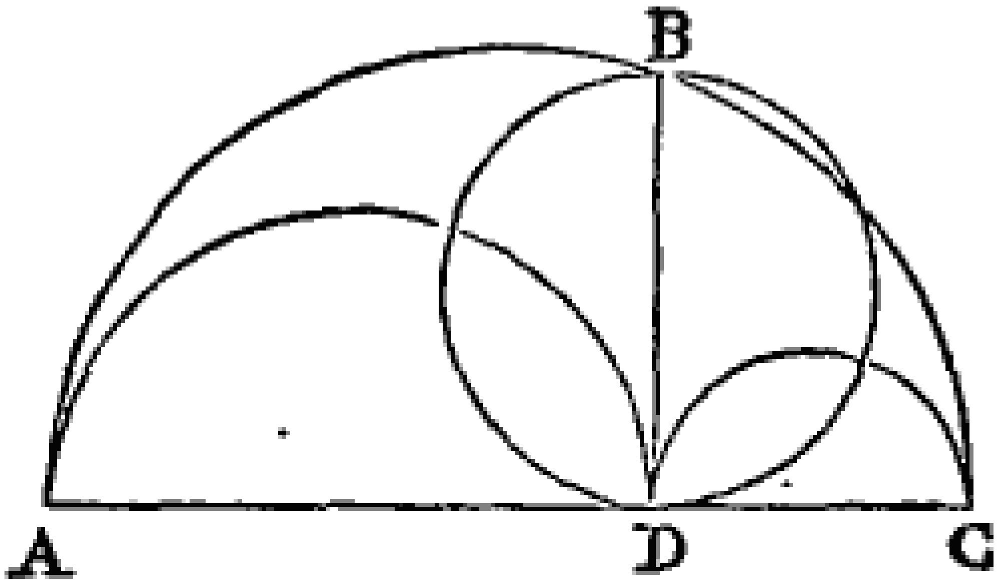


$$\boxed{EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4R^2}$$

Lemmes

Proposition IV

Surface de «l'arbelos» = surface du cercle BD



arbelos : couteau de savetier

Codex : +I, +IVème siècle
Eutoxe (né en +480) : œuvres complètes d'Archimède

IXème : lettres d'Archimède en trois codex A, B, C.
1265 : traduction du grec au latin
1450 : nouvelle traduction du codex A (*jacques de Crémone*)
1492 : copie du codex A (*Laurent le magnifique*)
1544 : 1ère édition (Bâle)
1564 : codex A perdu
B perdu
Palimpseseste = codex C

Hommage aux moines copistes
peu d'erreurs mathématiques
scribes connaissant la géométrie classique

Difficultés conservation des connaissances

Palimpseste trouvé en 1899
CODEX C

Monastère du saint Sépulcre

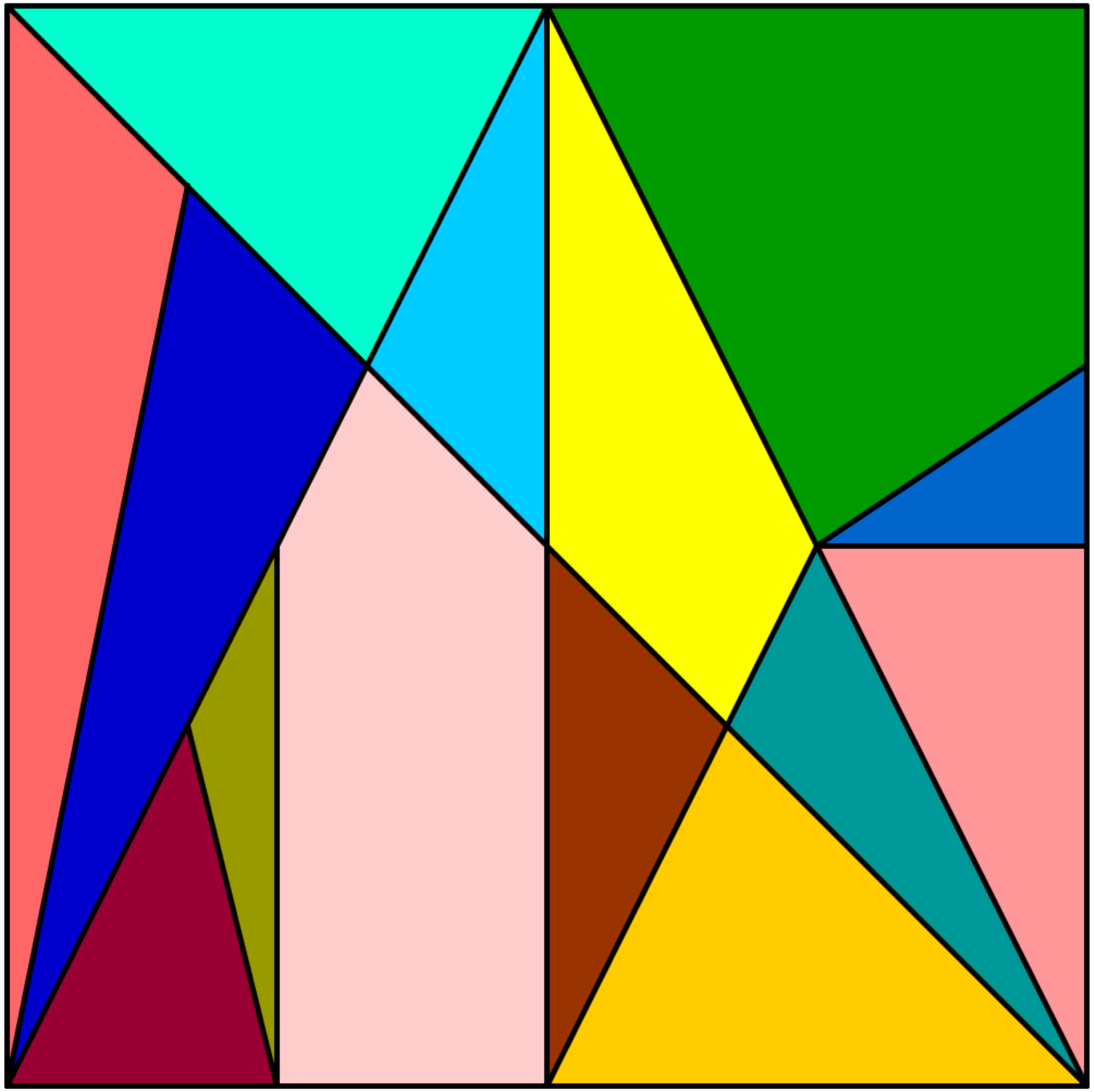
Traduction de Heiberg
en 1906

Texte grec des « corps flottants »
(en latin seulement auparavant)

« La méthode »
(seulement cité par quelques auteurs)

« Stomachion »

Stomachion



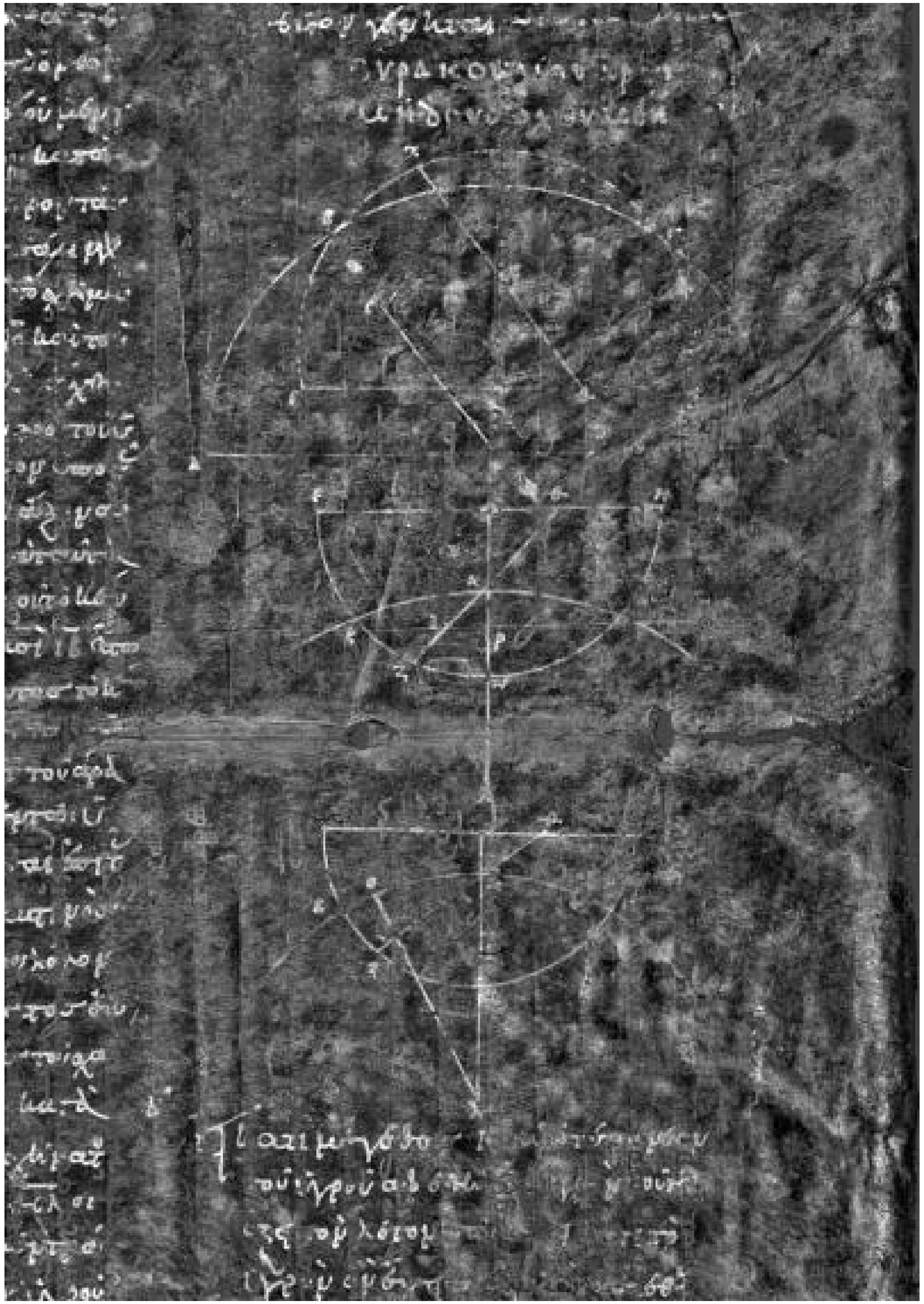
Combinatoire?

14 pièces

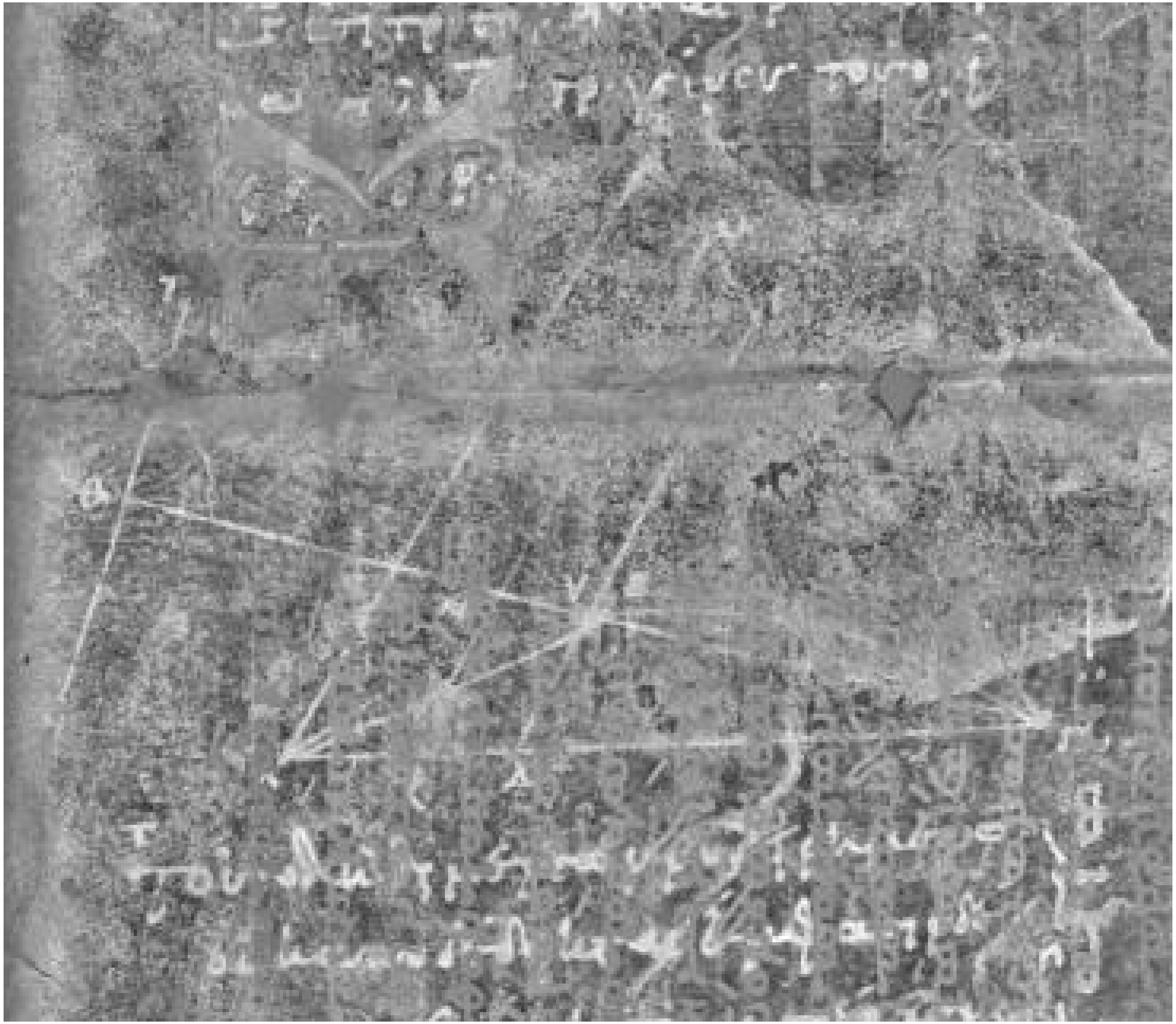
17152 combinaisons!

François Lavallou - Association PlayMaths

Le Codex C



Pesée de la Parabole



De l’équilibre des figures planes

Livre I

Livre II

Centre de gravité d’un segment de parabole (prop. 9)
Tronc de parabole (prop. 10)

De la sphère et du cylindre

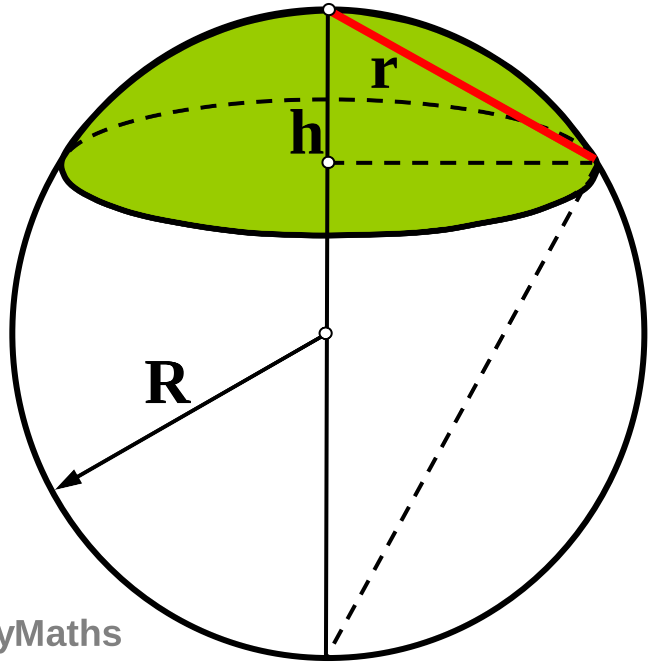
(1) l'aire de toute sphère est équivalente au quadruple de l'aire de son grand cercle : $S = 4\pi R^2$

(2) l'aire de tout segment de sphère est équivalente à l'aire d'un cercle dont le rayon est égal au segment de droite joignant le pôle du segment à un point quelconque de la circonférence limitant le segment : $S = \pi r^2$

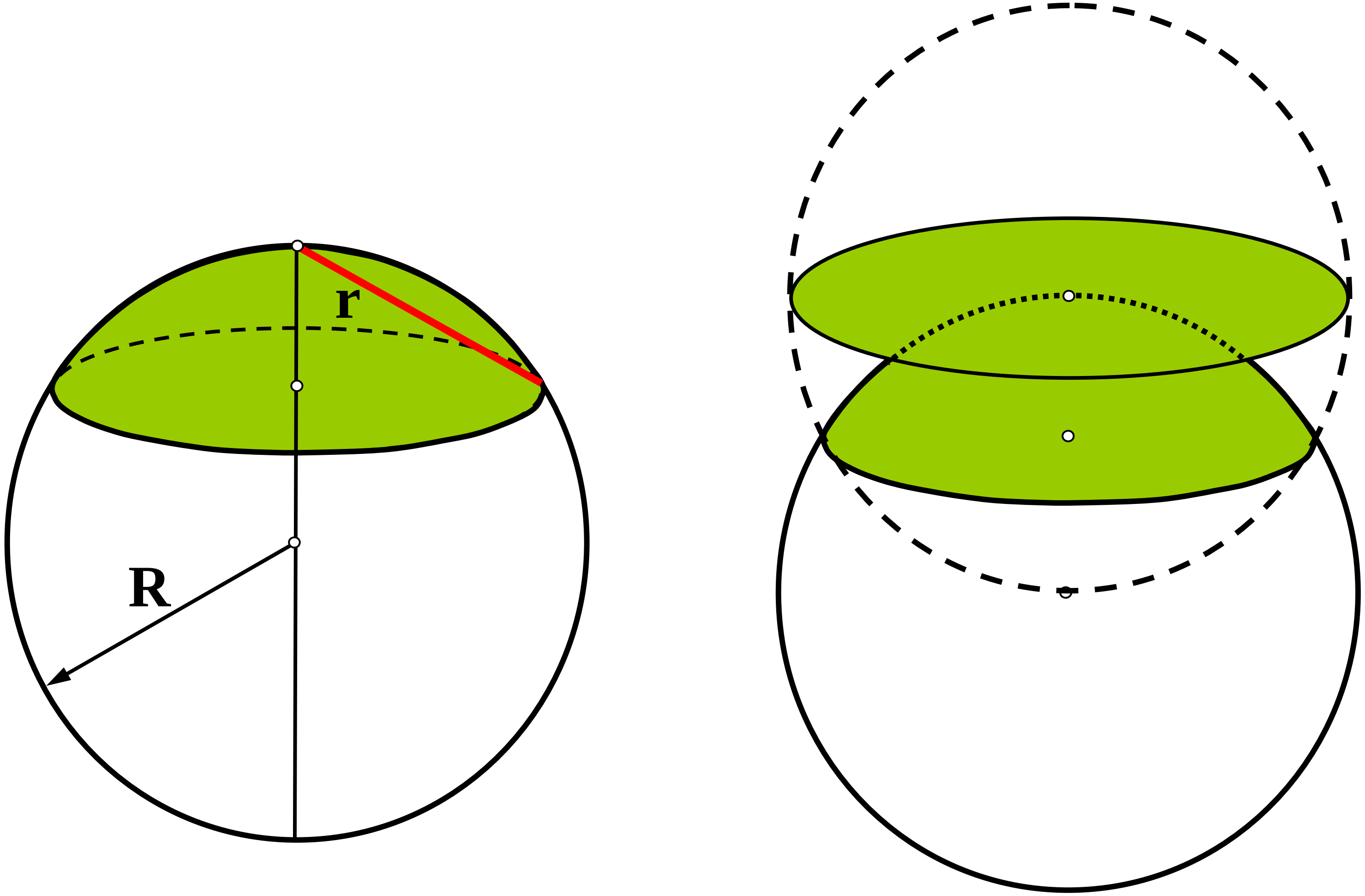
$$\frac{h}{r} = \frac{r}{2R}$$

$$r^2 = 2 \cdot R \cdot h$$

$$\boxed{\pi r^2 = 2\pi R \cdot h}$$



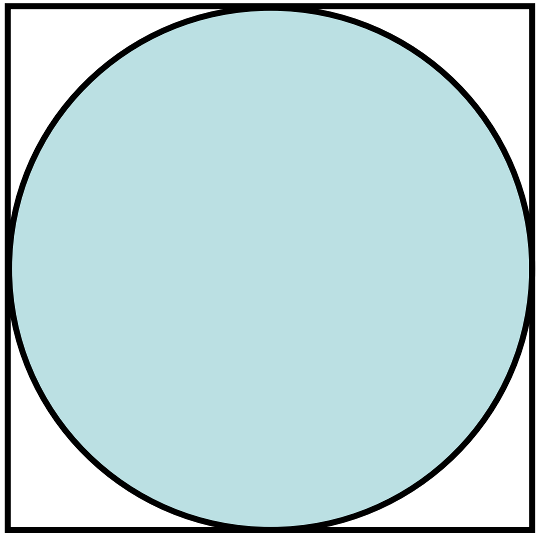
De la sphère et du cylindre



François Lavallou - Association PlayMaths

De la sphère et du cylindre

(3)



Volume :

$$V_{cyl} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \cdot V_{sphère}$$

$$\pi R^2 \cdot 2R = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \cdot \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)$$

Surface :

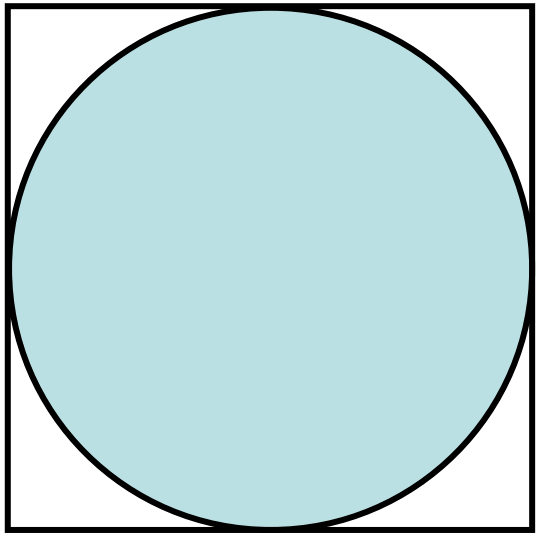
$$S_{cyl} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \cdot S_{sphère}$$

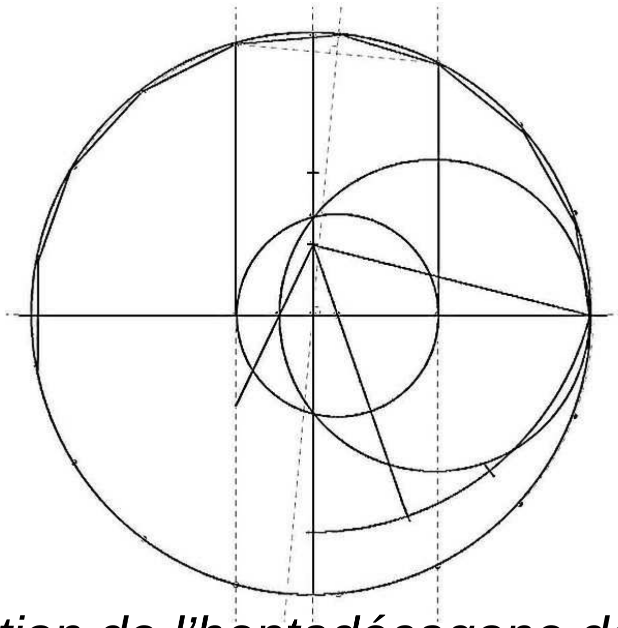
$$\pi R^2 + \pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \cdot \left(\frac{4}{3} \pi R^2 \right)$$

« Il est clair que tout cylindre, ayant comme base le grand cercle de la sphère, vaut une fois et demie cette sphère »

De la sphère et du cylindre

(3)





Construction de l'heptadécagone de Gauss

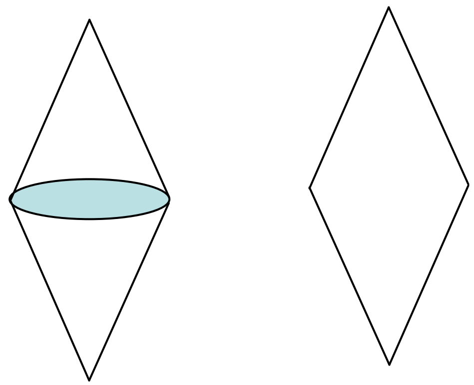
Bernouilli? daniel

Ces propriétés préexistaient, liées à la nature des figures indiquées, mais elles étaient ignorées de ceux qui se sont occupés de géométrie avant nous, personne d'entre eux ne s'étant aperçu que les mesures de ces figures sont comparables.

De la sphère et du cylindre

Application du passage à la limite d'Eudoxe

<u>Perfectionnement :</u>
double réduction par l'absurde (mais?) encadre la courbe par deux suites convergentes.



- **DEFINITIONS** (*axiomata*):
  position courbe/droite ; surface/plan ;
  secteur sphérique ; rhombe

- **POSTULATS** (*lambanomena*) :
  propriété géodésique de la droite
  (*notion la plus abstraite*)
  propriété semblable pour une figure plane

De la sphère et du cylindre

<u>5ème postulat (dernier) :</u>

De plus, parmi les lignes inégales, les surfaces inégales, les volumes inégaux, le plus grand dépasse le plus petit d’une grandeur telle que, ajoutée à elle-même, elle peut dépasser toute grandeur donnée ayant un rapport avec les grandeurs comparées entre elles.

Outil de base pour construire des encadrements

Rigueur exemplaire:

Démocrite NON   Eudoxe OUI

notion d’ensemble archimédien

<u>Notation moderne:</u>

A>B : il existe un entier n tel que n(B-A)>C

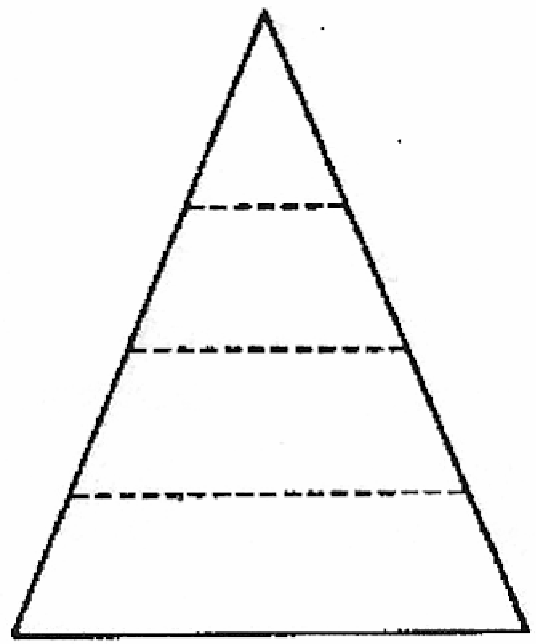
De la sphère et du cylindre

Outil de base pour construire des encadrements

Mise en garde

contre la validité logique

de l’atomisme mathématique.



Rigueur exemplaire:

Démocrite NON

Eudoxe OUI

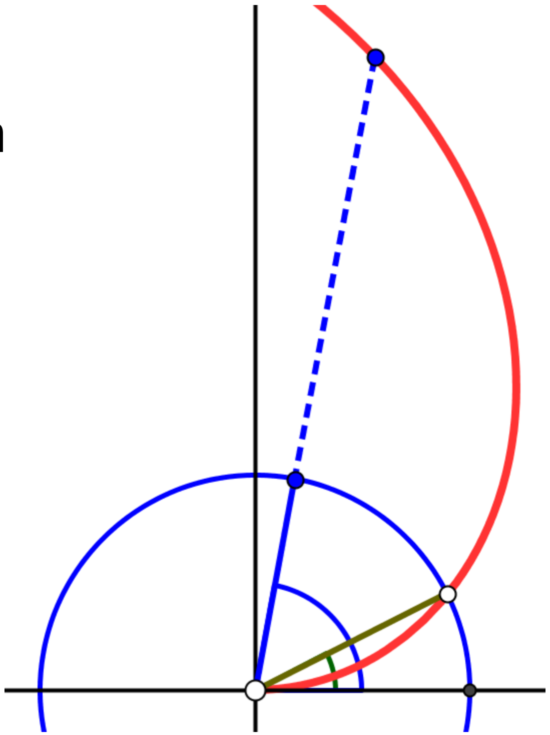
Des spirales (*peri elikon*)

Conon? **SPIRALE d'ARCHIMEDE**

<u>Prop. 1 :</u> Si un point se déplace d'un mouvement uniforme sur une certaine ligne et qu'on prend et qu'on prend sur cette ligne deux segments, les segments pris entre eux dans le même rapport que les temps mis par le point à les parcourir.

Prop. 1-11 : déplacement uniforme d'un point sur un
Prop. 12-28 : propriétés de la spirale

Prop. 21-28 : quadrature de la spirale



Trisection de l'angle?

Des spirales (*peri elikon*)

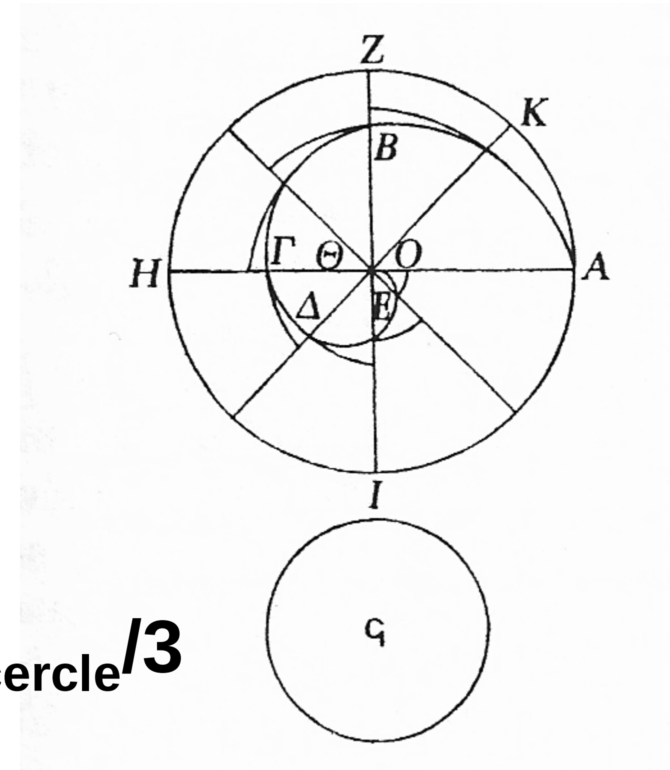
Intégration = cas d'espèce

Parabole → triangles

Spirale → secteurs circulaires

(rayons en progressions arithmétiques)

$$S_{spirale} = S_{cercle}/3$$



Sur les conoïdes et les sphéroïdes

Nouveaux objets mathématiques:

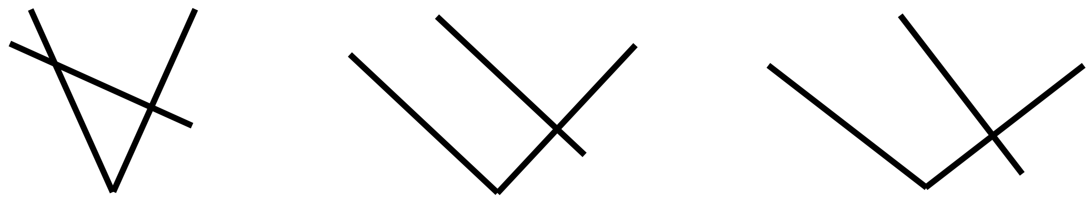
- **Conoïdes** :

  Paraboloïdes, Hyperboloïdes (2 nappes)

- **Sphéroïdes** :

  Ellipsoïdes allongés (/grand axe)
  aplatis (/petit axe)

Aristée, Euclide :



ellipse *parabole* *hyperbole*

Apollonius : plan quelconque

Sur les conoïdes et les sphéroïdes

Chef d’œuvre d’enchaînement logique : **32 propositions**

2 propositions arithmétiques (procédé de sommation)

Propositions 3-20 : propriétés des figures

prop. 3-6 : segment de parabole, rapports ellipse-cercle, ellipse-ellipse

prop. 7-9 : construction cône (sommet-ellipse), cylindre (axe-ellipse)

prop. 10 : segment d’un troncs de cône

prop. 11-14 : sections planes paraboloïde, hyperboloïde, ellipsoïde

prop. 15-17 : contacts plan de ces figures

prop. 18 : partage d’un ellipsoïde en 2 parties égales (surface, volume)
par un plan passant par son centre

Sur les conoïdes et les sphéroïdes

prop. 19-20 : ***méthode générale de compression***

Calcul intégral en germe
près de 2000 ans avant Leibniz et Newton!

Raisonnement géométrique + extrême logique => <u>rédaction longue</u>

Volume du segment droit du paraboloïde = 10 pages!

Double réduction par l'absurde / valeur intuitée du résultat (*pesée*)

prop. 21-32 : valeurs de segments de conoïdes et sphéroïdes

simplicité arithmétique

Des corps flottants I et II

Poussée d’Archimède

Couronne de Hiéron (- 265)

De la mesure du cercle

Extrait d'un traité sur la quadrature du cercle : 3 prop.

prop. 3 : circonférence p d'un cercle de diamètre d

$$(3+10/71)d < p < (3+1/7)d$$

double le nombre de côtés → 96 côtés

$$a_{2n} = \frac{R \cdot a_n}{R + \sqrt{R^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}}$$

racines carrées : Archimède ?

De la mesure du cercle

Problème : estimation de $\sqrt{3}$ par $\dfrac{1351}{780}$ et $\dfrac{265}{153}$?

Proposition:

$$(\sqrt{3}-a_n)\cdot(\sqrt{3}+a_n)=3-a_n^2\approx(\sqrt{3}-a_n)\cdot 2\cdot a_n$$

$$a_{n+1}=a_n+\frac{3-a_n^2}{2\cdot a_n}=\frac{3+a_n^2}{2\cdot a_n}$$

$a_0=\dfrac{5}{3}$ $\quad a_1=\dfrac{26}{15}$ $\quad a_2=\dfrac{1351}{780}$ $\quad$ (erreur < 0,00003%)

Classique : $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(a_n+\dfrac{\mathrm{A}}{a_n}\right)$ converge vers $\sqrt{\mathrm{A}}$

De la mesure du cercle

Problème : estimation de $\sqrt{3}$ par $\frac{1351}{780}$ et $\frac{265}{153}$?

Proposition:

$$\underbrace{a_0 = \frac{5}{3} \qquad a_1 = \frac{26}{15}}$$

$$\boxed{\frac{5}{3} < \frac{265}{153} < \frac{26}{15}}$$

$\alpha = 10\,; \quad \beta = 1$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{\alpha c + \beta a}{\alpha d + \beta b} < \frac{c}{d} \qquad \begin{array}{l} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \end{array}$$

Exemple :

$$\frac{3}{1} < \pi < \frac{4}{1} \qquad \alpha = 1\,; \quad \beta = 6 \qquad \frac{3}{1} < \pi < \frac{22}{7}$$

$$\frac{3}{1} < \pi < \frac{22}{7} \qquad \alpha = 10\,; \quad \beta = 1 \qquad \boxed{\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}}$$

L'Arénaire

Pindare : « ***le sable échappe au nombre*** ».

Myriade : 10.000

Grec moderne : εκατομμυριο (10^6)

Premiers nombres : 1 à 10^8

Nombres seconds : 10^8 est la nouvelle unité, de 10^8 à 10^{16}

Nombres troisièmes : de 10^{16} à 10^{24}

et ainsi de suite jusqu'à : **A = M^M^** $= 10^{8.10^8}$

et encore ainsi de suite ... jusqu'à $\mathbf{A}^{10^8} = 10^{8.10^{16}}$

Dimension du cosmos (χοσμοζ =/= παν)

Aristarque de Samos (- 310, - 230) : *Copernic de l'antiquité*

Phidias : Φ soleil = 12 x Φ lune

Archimède : description minutieuse de sa mesure du diamètre du soleil.

De la méthode

Précurseurs exhaustion

Bryson (- 520, - 450)

Anaxagore (- 500, - 428)

Antiphon (- 480, - 411)

Hippocrate de Chios (- 470, - 400)

Eudoxe de Cnide (- 408, - 355)

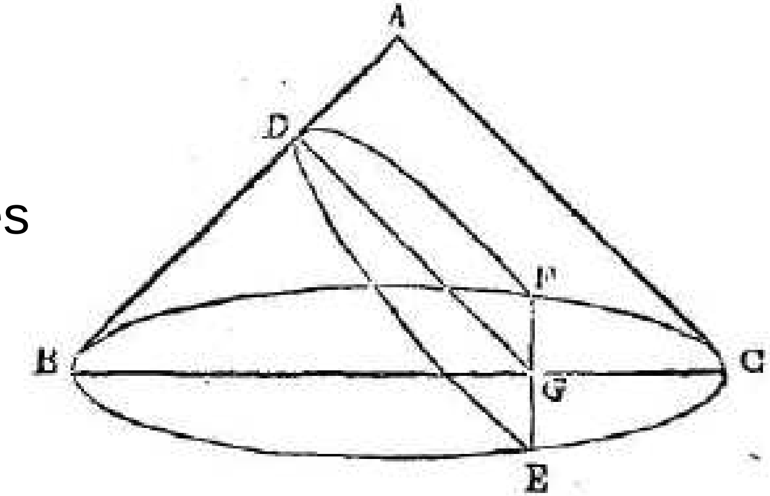
Principe d'Eudoxe :

Soit une suite M_n de nombres positifs tels que : $\mathrm{M}_n < \mathrm{M}_{n-1}/2$

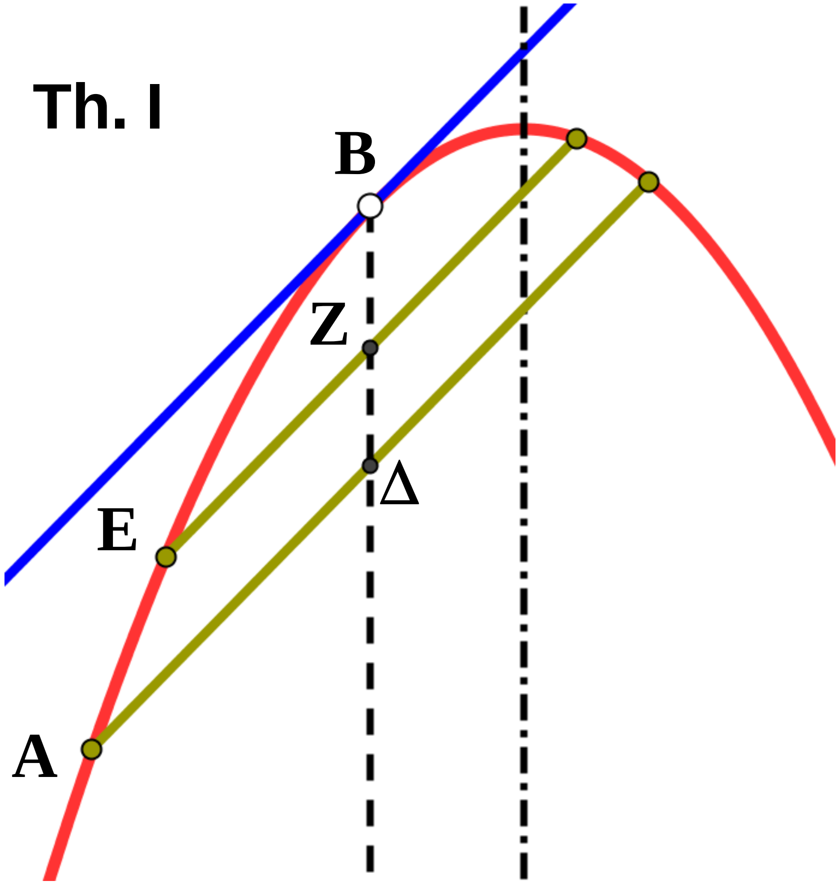
Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier *n* tel que : $\mathrm{M}_n < \varepsilon$

La quadrature de la parabole

Références : Eléments des sections coniques
(*Euclide, Aristée*)

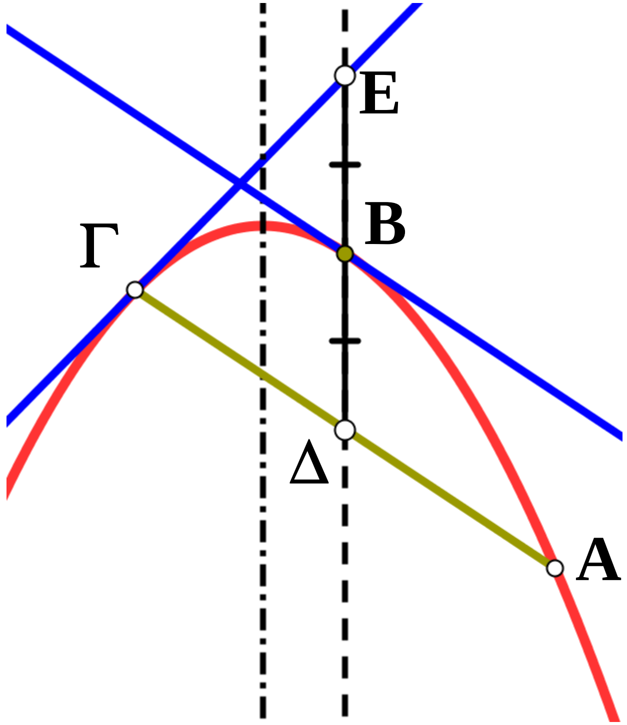


Th. I



Th. II

EB = BΔ

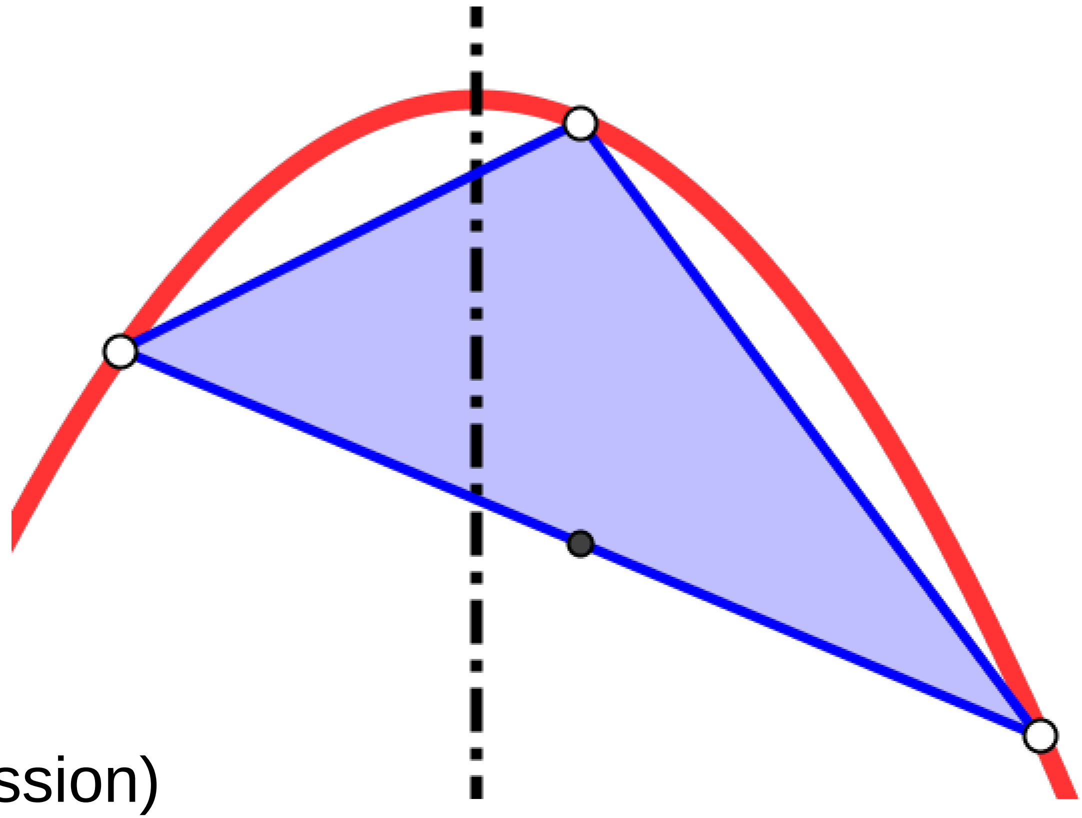


Th. III : carré des segments EZ/AD = BZ/BΔ ($y = ax^2$)

François Lavallou - Association PlayMaths

La quadrature de la parabole

Tout segment de parabole est égal aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur.



prop. 6 - 17 :

procédé statique

(méthode de la pesée)

prop. 18 - 24 :

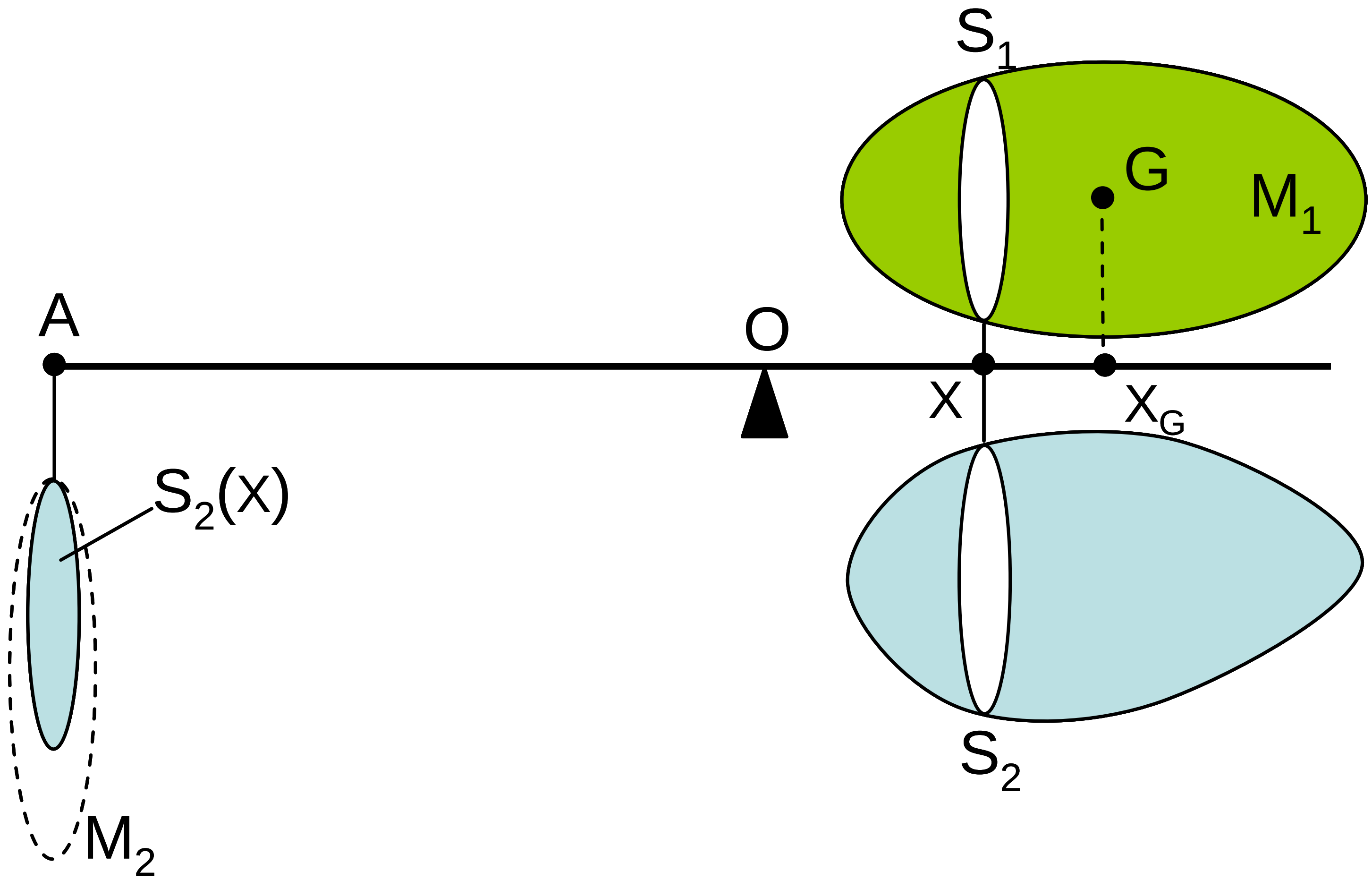
méthode géométrique

(méthode de la compression)

Pourquoi la parabole, pourquoi pas le cercle?

La quadrature de la parabole

Principe de la pesée



La quadrature de la parabole

ABC : **triangle maximal** (*Grégoire de saint-Vincent, 1647*)

JN diamètre

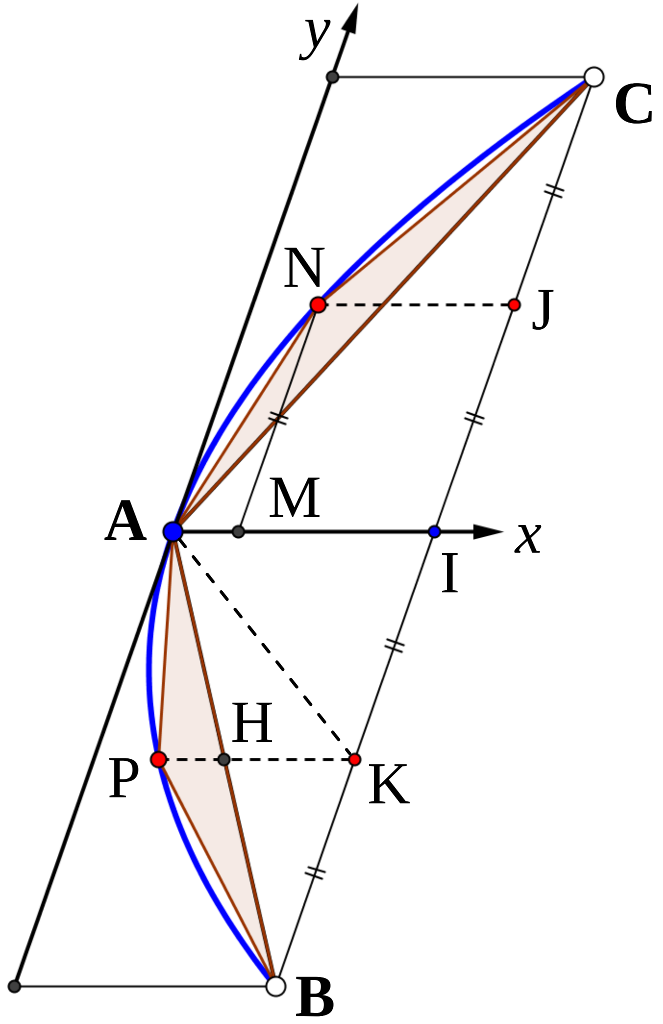
AM/AI = (MN/IC)^2 = 1/4

AI/MI = AI/PK = 4/3

AI = 2.HK => HK = 2.HP

S(ABP) = S(ABK)/2 = S(ABC)/8

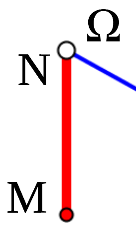
S(ABP) + S(ACN) = S(ABC)/4



La quadrature de la parabole

Pesée d'une parabole (*voie « moderne »*)

K, O, (P_2) : BΩ lieu des milieux de (P_1) et (P_2)

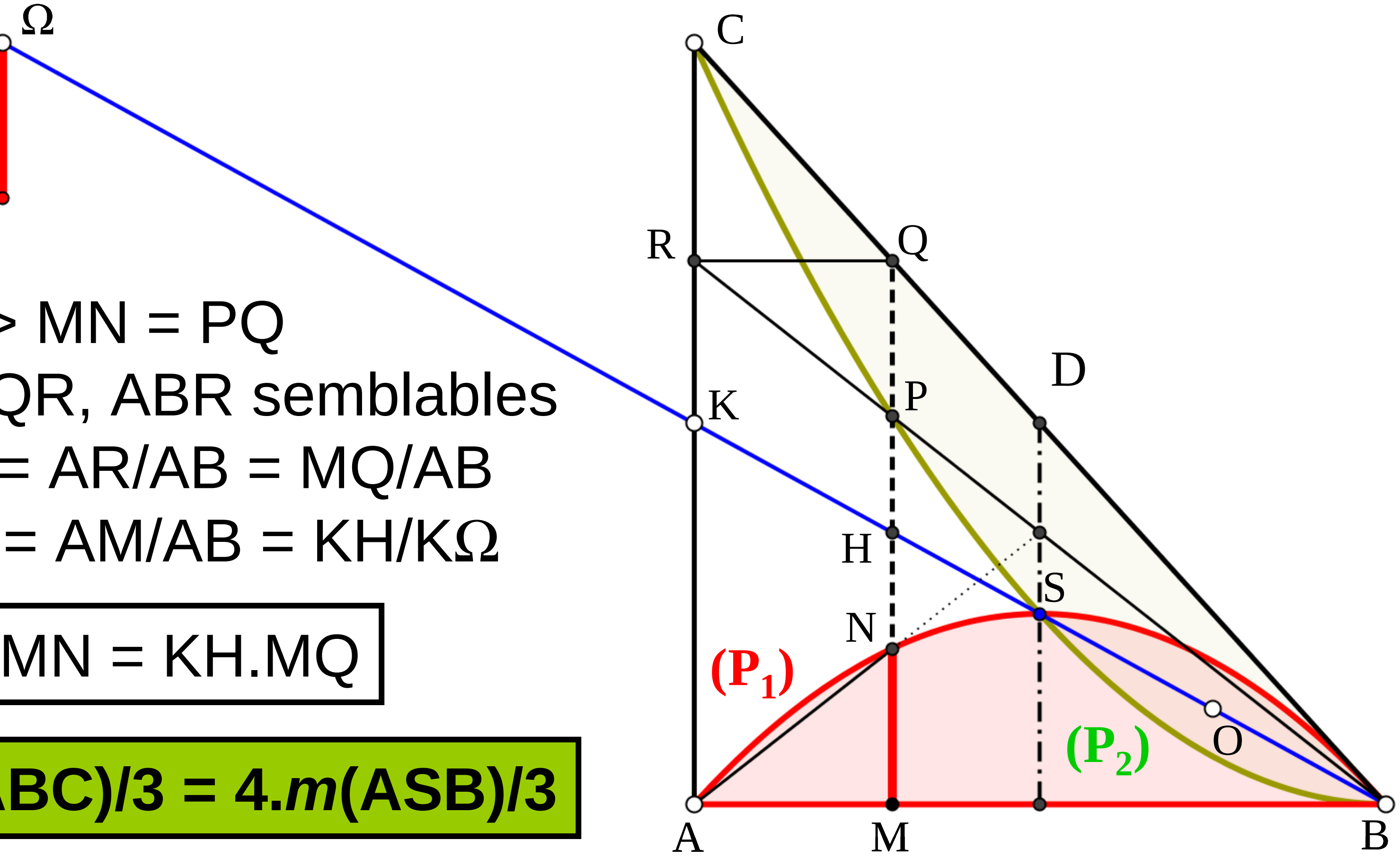


HN = HP => MN = PQ

=> NMA, PQR, ABR semblables

=> MN/AM = AR/AB = MQ/AB

=> MN/MQ = AM/AB = KH/KΩ



$\boxed{KW.MN = KH.MQ}$

***m*(P) = *m*(ABC)/3 = 4.*m*(ASB)/3**

François Lavallou - Association PlayMaths

La quadrature de la parabole

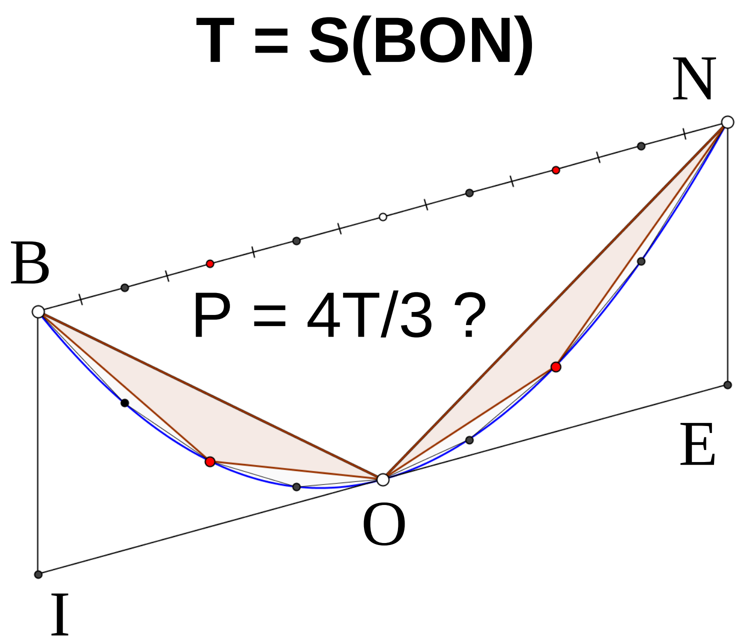
Méthode de la compression

Procédé itératif :

$$T_n = T \cdot (1 + 1/4 + \ldots + 1/4^n)$$

S(BIEN) = 2S(BON) > P

=> T > P/2



Archimède :

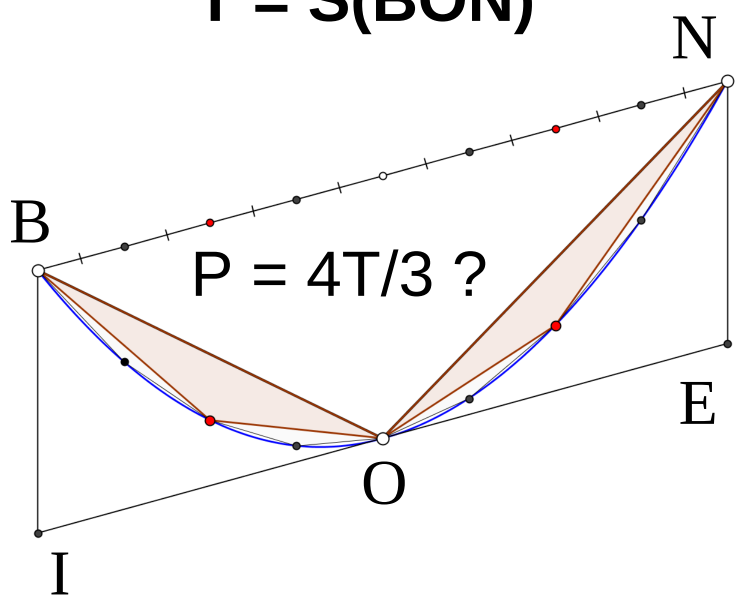
« la somme des grandeurs d'une série de raison 4 augmentée du tiers de la plus petite vaudra les quatre tiers de la plus grande ».

$$4T/3 - T_n = (1/3) \cdot (T/4^n) > 0$$

La quadrature de la parabole

Méthode de la compression

T = S(BON)



(H1) u = P – 4T/3 > 0

Il existe *n* tel que :

$P - T_n < u \Rightarrow T_n > 4T/3$

contradiction

(H2) u = 4T/3 – P > 0

$$4T/3 - T_n = (1/3)\cdot(T/4^n) > 0$$

Il existe *n* tel que : $4T/3 - T_n < u \Rightarrow T_n > P$ ***contradiction***

$$\boxed{P = 4T/3}$$

Influence d’Archimède

Fondement du calcul intégral, statique (XVII, XVIII)

2000 ans perdus

Regret de Pascal, Newton

ARCHYTAS de Tarente (-435, -347)

Mathématiques = art applicable à tous les problèmes :

«Il semble bien que l'art du calcul rapporté à la philosophie soit bien supérieur aux autres arts, de par sa capacité à traiter, mieux encore que ne le fait la géométrie, n'importe quel problème avec une certitude plus grande.»