

Eh bien votons, maintenant !

François Dubois <sup>1</sup>

**La question d'un système de vote  
est un problème de maths très difficile !**

**Kafemath  
"L'Oiseau Blanc", Paris 08<sup>ième</sup>  
jeudi 05 avril 2012**

---

<sup>1</sup> animateur du Kafemath, café mathématique à Paris.

# Dès qu'on est plus de deux candidats, on est..

Dire **oui ou non**, faire un choix binaire...

C'est facile...

Mais si on a plus de deux choix possibles ?

Si plus de deux candidats se présentent ?

Solution "à la Française" : se ramener au cas précédent !!

Au second tour : deux candidats... choix binaire !

Après le premier tour on garde les deux premiers...

pas toujours d'ailleurs !!!

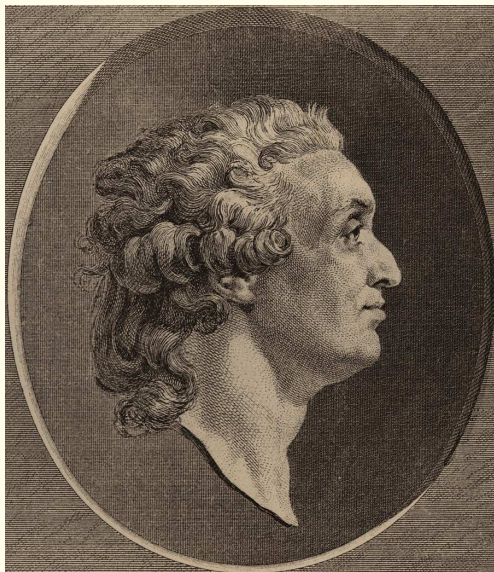
Cette façon de faire est-elle **juste** ?

Quel **système de vote** ? une (très) vieille question !

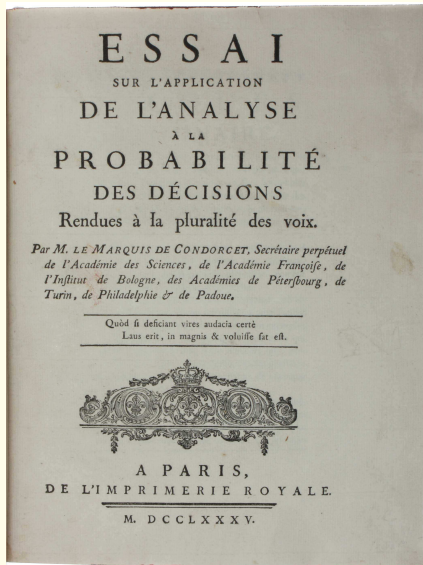
Problème considéré comme difficile par les cardinaux

pour élire le pape ....

# Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet (1743-1794)



# Essai sur l'application de l'analyse... 1785



# chevalier Jean-Charles de Borda (1733 - 1799)



source : [www.whynomath.org](http://www.whynomath.org)

Mémoire sur les élections au scrutin, 1781

“Si vous parlez de ce que je dis sur les élections, il faut observer que M. le chevalier de Borda a remarqué le premier l’absurdité de la méthode ordinaire.” (N. de Condorcet, lettre à Garat, 1784)

## chevalier Jean-Charles de Borda (1733 - 1799)

DES SCIENCES.

657

## M É M O I R E

## SUR LES ÉLECTIONS AU SCRUTIN \*.

Par M. DE BORDA.

C'EST une opinion généralement reçue, & contre laquelle je ne sache pas qu'on ait jamais fait d'objection, que dans une élection au scrutin, la pluralité des voix indique toujours le vœu des électeurs, c'est-à-dire, que le Candidat qui obtient cette pluralité, est nécessairement celui que les électeurs préfèrent à ses concurrents. Mais je vais faire voir que cette opinion, qui est vraie dans le cas où l'élection se fait entre deux sujets seulement, peut induire en erreur dans tous les autres cas.

Supposons, par exemple, que l'élection se fasse entre trois sujets présentés  $A, B, C$ ; & que les électeurs soient au nombre de 21 : supposons encore que de ces 21 électeurs, il y en ait 13 qui préfèrent le sujet  $B$  au sujet  $A$ , & que 8 seulement préfèrent le sujet  $A$  au sujet  $B$ ; que ces mêmes 13 électeurs donnent aussi la préférence à  $C$  sur  $A$ , tandis que les 8 autres la donnent à  $A$  sur  $C$ ; il est clair qu'alors le sujet  $A$  aura, dans l'opinion collective des électeurs, une infériorité très-marquée, tant par rapport à  $B$  que par rapport à  $C$ , puisque chacun de ces derniers, comparé au sujet  $A$ , a 13 voix, tandis que le sujet  $A$  n'en a que 8; d'où il suit évidemment que le vœu des électeurs donneroit l'exclusion au sujet  $A$ . Néanmoins il pourroit arriver qu'en faisant l'élection à la manière ordinaire, ce sujet eût la pluralité des voix. En effet, il n'y a qu'à supposer que dans le nombre des 13 électeurs qui sont favorables aux sujets  $B$  &  $C$ , & qui donnent à l'un & à l'autre la préférence sur  $A$ , il y en ait 7 qui mettent  $B$

\* Les idées contenues dans ce Mémoire, ont déjà été présentées à l'Académie il y a quatorze ans, le 16 Juin 1770.

# Vainqueurs de Condorcet et de Borda

## Vainqueur de Condorcet

Le vainqueur de Condorcet est celui, s'il existe, qui comparé tour à tour tous les autres candidats, s'avèrerait à chaque fois être le candidat préféré.

## Vainqueur de Borda

On choisit un nombre  $n$  inférieur ou égal au nombre de candidats.

Chaque électeur construit alors une liste de  $n$  candidats par ordre de préférence.

Au premier de la liste, on attribue  $n$  points, au second  $n - 1$  points, et ainsi de suite, le  $n$ ième de la liste se voyant attribuer 1 point.

Le score d'un candidat est la somme de tous les points qui lui ont été attribués. Le ou les candidats dont les scores sont les plus élevés remportent les élections.

Dans le cas où  $n = 1$ , on retrouve le système de scrutin majoritaire un tour

# Un exemple avec trois candidats... et soixante électeurs

Préférences individuelles entre les trois candidats

Je préfère A à B et B à C :

je le note :  $A > B > C$

les autres peuvent préférer B à C et C à A :

je le note :  $B > C > A$

Une ribambelle de relations d'ordre !!

Pour cet exemple simple, on va les décrire toutes... ou presque !!

$A > B > C$  23 cas

$B > C > A$  17 cas

$C > A > B$  10 cas

$C > B > A$  8 cas

$B > A > C$  2 cas

je tire un trait et j'additionne ??

??? 60 cas



# Résultat d'un "premier tour à la Française"

Seul le candidat préféré a une voix

$A > B > C$	23 cas
$B > C > A$	17 cas
$C > A > B$	10 cas
$C > B > A$	8 cas
$B > A > C$	2 cas

Score de A : 23

Score de B : 19

Score de C : 18

$A > B > C$

# Calcul du vainqueur de Borda

Le premier du trio a deux points,  
le second un point, le troisième zéro point.

$$A > B > C \quad 23 \text{ cas}$$

$$B > C > A \quad 17 \text{ cas}$$

$$C > A > B \quad 10 \text{ cas}$$

$$C > B > A \quad 8 \text{ cas}$$

$$B > A > C \quad 2 \text{ cas}$$

Score de A :

$$2 \times 23 + 0 \times 17 + 1 \times 10 + 0 \times 8 + 1 \times 2 = 58$$

Score de B :

$$1 \times 23 + 2 \times 17 + 0 \times 10 + 1 \times 8 + 2 \times 2 = 69$$

Score de C :

$$0 \times 23 + 1 \times 17 + 2 \times 10 + 2 \times 8 + 0 \times 2 = 53$$

$$B > A > C$$

# Calcul du vainqueur de Condorcet

Regarder les duels deux à deux issus des préférences

$A > B > C$	23 cas
$B > C > A$	17 cas
$C > A > B$	10 cas
$C > B > A$	8 cas
$B > A > C$	2 cas

Duel A - B :

$$\text{score de A} = 23 + 10 = 33$$

$$\text{score de B} = 17 + 8 + 2 = 27$$

Duel B - C

$$\text{score de B} = 23 + 17 + 2 = 42$$

$$\text{score de C} = 10 + 8 = 18$$

Duel C - A

$$\text{score de C} = 17 + 8 + 10 = 35$$

$$\text{score de A} = 23 + 2 = 25$$

Pas de vainqueur de Condorcet...

# Un autre exemple.....

Les préférences :

$A > B > C$	30 cas
$A > C > B$	01 cas
$B > A > C$	29 cas
$B > C > A$	10 cas
$C > A > B$	10 cas
$C > B > A$	01 cas

Calcul de Condorcet :

$$\text{duel } A - B : 30 + 1 + 10 = 41 / 40 = 29 + 10 + 1$$

$$\text{duel } A - C : 30 + 1 + 29 = 60 / 21 = 10 + 10 + 1$$

Le candidat **A** est le vainqueur de **Condorcet**.

Calcul de Borda :

$$\text{score de } A : 2 \times (30 + 1) + 29 + 10 = 101$$

$$\text{score de } B : 2 \times (29 + 10) + 30 + 1 = 109$$

$$\text{score de } C : 2 \times (10 + 1) + 1 + 10 = 33$$

Le candidat **B** est le vainqueur de **Borda** !!

# Formaliser mathématiquement le problème...

L'approche de Condorcet n'introduit pas de nombres

*a priori* inutiles...

Famille de  $m$  candidats...

Préférences des électeurs entre les candidats :

$m!$  relations d'ordres

$A_1 > A_2 > \dots > A_m$   $N_1$  cas de figure

$A_2 > A_1 > \dots > A_m$   $N_2$  cas de figure

*etc !*

Comment les agréger pour former un "ordre social" ?

Comment construire un classement social  $>_s$  ?

# Formaliser mathématiquement le problème... (ii)

Axiomes pour l'agégation :

(1) **Unanimité**

$A > B$  quel que soit le votant, alors  $A >_S B$

(2) **Indépendance des alternatives non pertinentes**

Le choix social dépend du classement relatif

des candidats entre eux et non des candidats intermédiaires

Si  $A >_1 B$  et  $A >_2 B$  quel que soit le votant, alors  $A >_S B$

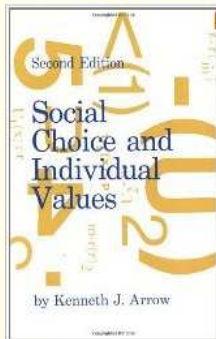
Si  $B >_1 A$  et  $B >_2 A$  quel que soit le votant, alors  $B >_S A$

(3) **Non dictature**

Aucun votant ne peut imposer

son choix sans tenir compte des autres votants.

# Théorème d'impossibilité de Arrow (1951)



source : <http://www.amazon.fr>

**Kenneth Arrow** a reçu le prix Nobel d'économie en 1972

# Kenneth Arrow (né en 1921)



source : <http://english.pku.edu.cn>



# Vote Unique Transférable

Et pourtant on vote !

en Irlande, Malte, Tasmanie, Australie, Estonie, Alberta, ...

Cas de plusieurs sièges ( $n$ ) à pourvoir

L'électeur donne une liste ordonnée de ses préférences...

Il met le nombre de noms qu'il souhaite dans la liste.

La liste est parcourue petit à petit

par un "désistement par anticipation".

Combien de voix  $N$  un candidat doit-il obtenir

pour être certain d'être élu ?

Il ne peut pas exister  $n$  autres candidats

possédant également ce nombre de voix...

Donc  $N(n+1) > v =$  nombre de votants

$$\text{c'est à dire } N > \frac{v}{n+1} \geq E\left(\frac{v}{n+1}\right)$$

$$\text{soit } N \geq E\left(\frac{v}{n+1}\right) + 1$$

## Vote Unique Transférable (ii)

Exemple avec  $v = 100$  votants,  $n = 2$  sièges à pourvoir  
et 4 candidats A, B, C, D.

Un exemple de résultats (source <http://fr.wikipedia.org>)

A	B	C	D	28 voix
A	C	D	B	14 voix
B	C	A	D	15 voix
C	A	B	D	17 voix
D	B	C	A	26 voix

La barre  $N$  vaut  $E\left(\frac{100}{3}\right) + 1 = 34$

On compte le total de chacun en première colonne (premier choix)

A : 42,    B : 15,    C : 17,    D : 26.

Donc A est élu. Et il lui reste 8 voix !

## Vote Unique Transférable (iii)

A B C D	28 voix
A C D B	14 voix
B C A D	15 voix
C A B D	17 voix
D B C A	26 voix

Les 8 voix "en trop" du candidat A

sont transférées équitablement à ses successeurs,  
dans des proportions  $28 / 42$  pour B et  $14 / 42$  pour C.

Nouveau nombre de voix de B :  $5,33 + 15 = 20,33$

Nouveau nombre de voix de C :  $2,66 + 17 = 19,66$

Nouveau nombre de voix de D : 26

Personne n'a 34 voix.

Le candidat C qui a le plus petit nombre de voix est éliminé.

# Vote Unique Transférable (*iv*)

Voix restantes

A B C D	28 voix	B D	5,33 voix
A C D B	14 voix	D B	2,66 voix
B C A D	15 voix	B D	15 voix
C A B D	17 voix	B D	17 voix
D B C A	26 voix	D B	26 voix

Nouveau nombre de voix de B :  $5,33 + 15 + 17 = 37,33$

Nouveau nombre de voix de D :  $2,66 + 26 = 28,66$

Et B est élu par transfert de voix.

# Jugement majoritaire de Balinski et Laraki (2006)

D'abord se donner une grille **commune** de notation, par exemple  
 à rejeter < insuffisant < passable <  
 < assez bien < bien < très bien

Puis on vote en deux temps

Chaque électeur donne un jugement sur chaque candidat  
 et un seul...

Ensuite , un classement entre les candidats est obtenu par  
 extraction de médianes successives

La “mention majoritaire” est celle qui réunit **plus de 50 % des voix**  
 en y additionnant les mentions qui lui sont supérieures.

Par exemple, un candidat qui reçoit

10% de “à rejeter”, 10 % d’“insuffisant”, 20 % de “passable”,  
 20 % d’“assez bien”, 30 % de “bien”, et 10 % de “très bien”  
 a 40 % de votes égaux ou supérieurs à la mention “bien”  
 et 60 % égaux ou supérieurs à la mention “assez bien”.

Sa **mention majoritaire** est donc “assez bien”.

# Michel Balinski (né en 1933) et Rida Laraki (né en 1974)



<http://rangevoting.org>



<http://sites.google.com/site/ridalaraki>

# Expérience d'Orsay (Balinski et Laraki, 2007)

Un vote "expérimental"

pour le premier tour du 22 avril 2007.

mention majoritaire

Orsay

rappel national

Bayrou	assez bien +	25,5 %	18,6 %
Royal	assez bien -	29,9 %	25,9 %
Sarkozy	assez bien -	29,0 %	31,2 %
<b>Voynet</b>	passable -	<b>01,7 %</b>	<b>01,6 %</b>
Besancenot	insuffisant +	02,5 %	04,1 %
Buffet	insuffisant +	01,4 %	01,9 %
Bové	insuffisant -	00,9 %	01,3 %
Laguiller	insuffisant -	00,8 %	01,3 %
Nihous	à rejeter	00,3 %	01,1 %
de Villiers	à rejeter	01,9 %	02,2 %
Schivardi	à rejeter	00,2 %	00,3 %
<b>Le Pen</b>	à rejeter	<b>05,9 %</b>	<b>10,4 %</b>

Pour les élections de 2012, aller voir le site "Slate.fr" ...

# Vote par assentiment

Cas particulier du précédent avec seulement  
**deux choix** possibles pour chaque candidat  
à rejeter < à retenir

Pour la prochaine élection du 22 avril,  
cela conduit à **1024** votes différents !!! au lieu de **11** ...

Système connu depuis les années 1970...

Il peut être mis en œuvre avec le matériel existant...

Le dépouillement est un peu plus compliqué.

Faut pas rêver !

L'article **7** de la constitution de **1958** prévoit que le président de la République est élu au scrutin uninominal à deux tours...



# Eh bien votons, maintenant !

- Premier tour d'un scrutin uninominal à deux tours  
On dépose **au plus un** bulletin dans l'enveloppe
  
- Jugement majoritaire  
à rejeter < insuffisant < passable <  
< assez bien < bien < très bien  
On **note tous** les candidats avec une **échelle commune**
  
- Vote par assentiment  
On dépose dans l'enveloppe  
**au plus un** bulletin relatif à **chaque** candidat

## Pour en savoir plus

- Gilles-Gaston Granger. *La mathématique sociale du Marquis de Condorcet*, Presses Universitaires de France, Paris, 1956.
- Michel Balinski, Rida Laraki. Le Jugement Majoritaire : l'Expérience d'Orsay, *Commentaire*, vol. 30, no. 118, p. 413-420, 2007.
- Antoinette Baujard, Herrade Igersheim. Expérimentation du vote par note et du vote par approbation lors de l'élection présidentielle française du 22 avril 2007, rapport au Centre d'Analyse Stratégique, 289 pages, décembre 2007.
- Michel Balinski, Rida Laraki. *Majority Judgment; Measuring, Ranking, and Electing*, MIT Press, 414 pages, mars 2011.
- Michel Balinski, Rida Laraki. Rendre les élections aux électeurs : le jugement majoritaire, Note *Terra Nova*, 21 avril 2011.
- Michel Balinski, Rida Laraki. Article sur le jugement majoritaire, *Pour la Science*, p. 22-28, avril 2012,