i comme... impossible ?

G. Kratzenstein-Stub, 1793-1860: Orpheus and Eurydice. Photo © Maicar Förlag - GML.

"Avec mon chant
Je charmerai la fille de Déméter,
Je charmerai le Souverain des Ombres;
J'attendrirai leurs coeurs avec ma mélodie
Et loin du Hadès, j'emporterai Eurydice."
ORPHEE

$$i^2 = -1$$

$$i * i = -1$$

Un carré négatif ???!!!!

-1 x -1 = +1   Je ne dis pas non = oui

+1 x +1 = +1   Je dis oui = oui

-1 x +1 = -1   Je ne dis pas oui = non

+1 x -1 = -1 Je dis non = non

i comme...

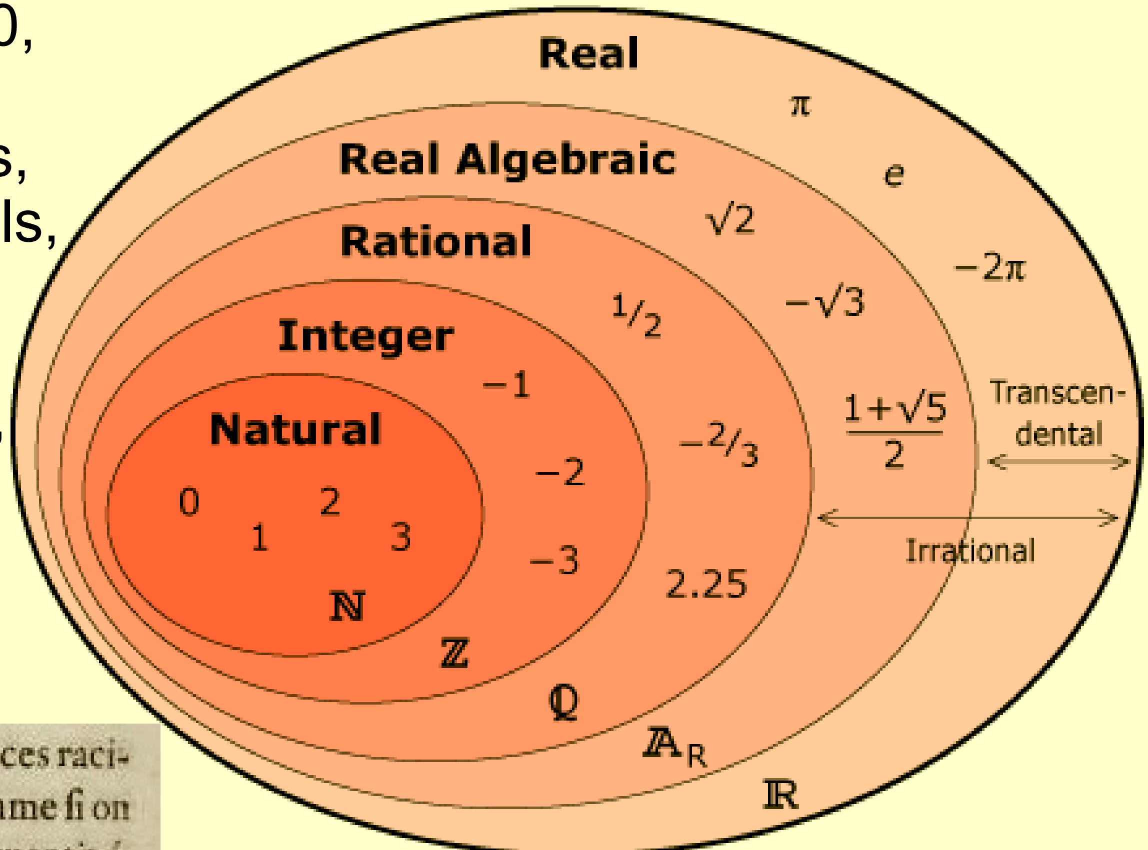
imaginaire, impossible, inexplicable, inutile, irréel, irreprésentable, fictif...

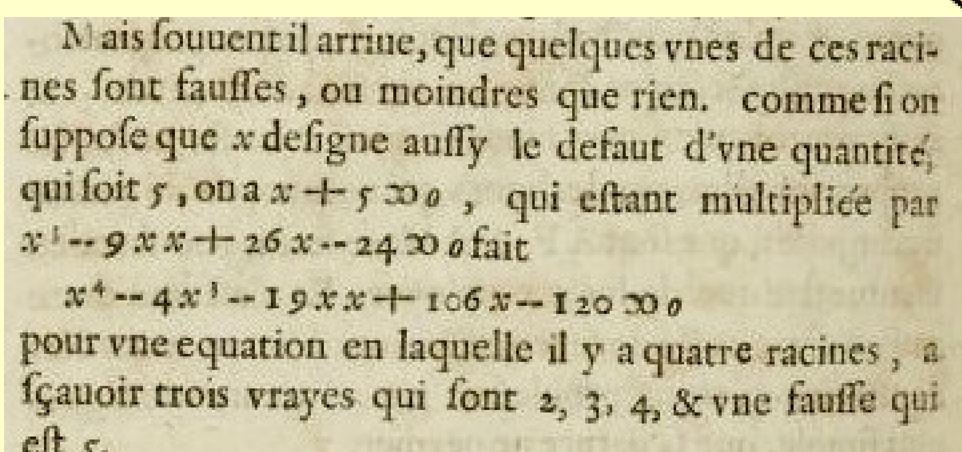
« [...] quelquefois seulement imaginaires c'est-à-dire que l'on peut toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celle qu'on imagine. »

René Descartes, 1637

Blocages...

Difficultés conceptuelles, blocages dus au langage/culture, zéro (Brahmagupta vers an 600, arrive en occident en l'an 1000 seulement...), entiers (complets, intacts, non altérés...), rationnels, irrationnels (encore polémique au XVIème siècle!), “incommensurables”, réels (...), négatifs («absurdes» jusqu'au XIXème !)





Mais ſouuent il arriue, que quelques vnes de ces raci-
nes ſont fauſſes, ou moindres que rien. comme ſi on
ſuppoſe que x deſigne auſſy le defaut d'vne quantité,
qui ſoit 5, on a $x + 5 \infty 0$, qui eſtant multipliée par
$x^3 - 9xx + 26x - 24 \infty 0$ fait

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$$

pour vne equation en laquelle il y a quatre racines, a
ſçauoir trois vrayes qui ſont 2, 3, 4, & vne fauſſe qui
eſt 5.

Extrait de la *Géométrie* de Descartes 1635

Equations, racines, polynômes

$$5 = 3 + 2$$
$$x + 2 = 5$$
$$x^2 + 4 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

Factorisation : $(x-1)(x-2)(x+5) = 0$

n racines dans polynômes de degré n ?

$x^2 - 1 = 0$ a deux racines : 1 **et** -1

$x^6 - 1 = 0$ aurait six racines : 1 ,-1, **et** ...

Equations du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4\mathrm{ac}$

Si Δ positif, 2 racines : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}}$ $\quad x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}}$

Si Δ nul, 1 racine double : $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2\mathrm{a}}$

Si Δ négatif, pas de racines...

Algèbre, équations cubiques

Al-jabr (transposition, remise en place) correspond à transformer une soustraction dans un membre en une addition dans l'autre membre.

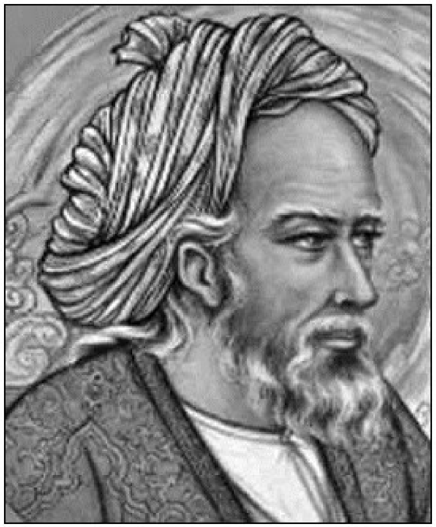
Par exemple : $2x - 20 = 58$

devient par al-jabr : $2x = 58 + 20$

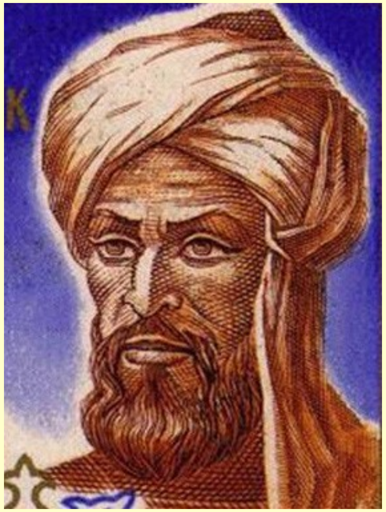
Al-muqabala (réduction) revient à supprimer dans les deux membres l'addition d'un même nombre.

Par exemple : $2x + 100 = 58 + 20$

devient par al-muqabala: $2x + 42 = 20$



Omar Khayyam (1148-1131 Iran)



Al Khwarizmi (800-850 Bagdad)

Khayyam démontre que les équations cubiques peuvent avoir plus d'une racine. Il fait état aussi d'équations ayant deux solutions, mais n'en trouve pas à trois solutions.

« Les équations du troisième degré sont insolubles par des méthodes algébriques. »

Défis italiens

Scippione dal Ferro
(1465 - 1526)

Niccolo Fontana dit Tartaglia
(1499 - 1557)

Jérôme Cardan
(1501 - 1576)

Rafael Bombelli
(1526 - 1573)

En 1535, lors d'une confrontation avec **Antonio Maria Fior** (un des élèves de Scipione del Ferro), on propose à Tartaglia trente équations du troisième degré du type $x^3 + px = q$

Dans la nuit du 12 au 13 février, juste avant la date limite, Tartaglia aurait trouvé la résolution générale de ce type d'équation, et résolu les trente équations en quelques heures. Fior, lui, ne sait résoudre que $x^3 + px = q$ mais les équations proposées par Tartaglia sont du type $x^3 + px^2 = q$

Fior n'en résoud aucune ou, selon les sources, il n'en résoud qu'une seule, en tous les cas il a perdu le défi...

Poème

"Quando che'l cubo con le cose appresso $x^3 + px = q$ con p, q > 0

Quand le cube avec les choses

Se agguaglia à qualche numero discreto

Est égalé à un certain nombre

Trovan dui altri differenti in esso. $q = u - v$

Trouves-en deux autres qui diffèrent de ce dernier

Da poi terrai questo per consueto

Ensuite tu tiendras ceci pour habituel

Che 'l lor produtto sempre sia uguale $uv = (p/3)^3$

Que leur produit soit égal

Al terzo cubo delle cose neto,

Au tiers du cube, des choses exactement

El residuo poi suo generale $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$

Ensuite son reste général,

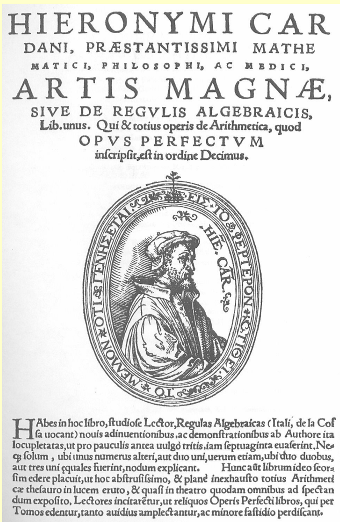
Delli lor lati cubi ben sottratti

De leurs racines cubiques bien soustraites,

Varrà la tua cosa principale." $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$

Vaudra ta chose principale.

Un bogue dans la méthode...


HIERONYMI CARDANI, PRÆSTANTISSIMI MATHEMATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neq; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Jérôme Cardan
Ars Magna
1545

Soit l'équation : $ax^3+bx^2+cx+d=0$

En posant $x=z-\dfrac{b}{3a}$, l'équation devient de la forme : $z^3+pz+q=0$

On pose : $z=u+v$, ça devient : $(u+v)^3+p(u+v)+q=0$

Posons : $u^3+v^3=-q$ et $u^3v^3=\dfrac{-p^3}{27}$

u^3 et v^3 se retrouvent racines de l'équation : $X^2+qX-\dfrac{p^3}{27}=0$

$$\Delta=q^2-\frac{4p^3}{27} \qquad \Delta>0 \quad u^3=\frac{-(q+\sqrt{\Delta})}{2} \qquad v^3=\frac{-(q-\sqrt{\Delta})}{2}$$

$\Delta=0$ $\quad u^3=v^3=\dfrac{-q}{2}$ puis on revient vers z puis vers x de départ

$\Delta<0$ **pas de racines**

Or, pour $z^3-15z-4=0$ $\quad u^3v^3=\dfrac{15^3}{27}=125$ et $u^3+v^3=4$

Donc u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $X^2-4X+125=0$

...qui n'a pas de racines !

Or $z=4$ **est une racine de l'équation originelle !** Problème...

« Lasciate ogne speranza, voi ch'entrate »

Devant ces problèmes, Bombelli reprend la méthode (plus simple...) de Dal Ferro pour résoudre les équations du type : $x^3 + px = q$

Il sait qu'il doit trouver une première racine en appliquant la formule :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}}$$

Il reprend : $x^3 - 15\text{x} = 4$ où p = -15 et q = 4 **dont il sait que x = 4 est une racine**

Quand il applique la formule, il tombe sur : $x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$

Que faire d'une « bouillie » pareille ?

Il hésite, cherche, se demande ce que vaut $\left(\sqrt{-1}\right)\left(-\sqrt{-1}\right)$ ou $\left(\sqrt{-1}\right)^2$

Et d'une façon générale, s'il est possible d'utiliser ces racines négatives

Il décide de donner des noms et des règles à ces « choses », histoire de les apprivoiser...

Più di meno...

Comment évaluer par exemple $(2+\sqrt{-1})^3=(2+\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1})$

$$(2+\sqrt{-1})^2=4+2\sqrt{-1}+2\sqrt{-1}+\sqrt{-1}\sqrt{-1}$$

Il décide de nommer $\sqrt{-1}$ ***più di meno***, *et* $-\sqrt{-1}$ *meno di meno*

Il s'autorise à additionner les $\sqrt{-1}$ entre eux, ce qui donne $4+4\sqrt{-1}+(\sqrt{-1})^2$

Il décrète que *più di meno* via *più di meno* fà *meno,* c'est-à-dire $(\sqrt{-1})(\sqrt{-1})=-1$

Il obtient donc $(3+4\sqrt{-1})$ qu'il multiplie encore par $(2+\sqrt{-1})$

$$(3+4\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1})=6+3\sqrt{-1}+8\sqrt{-1}+4(\sqrt{-1})(\sqrt{-1})$$

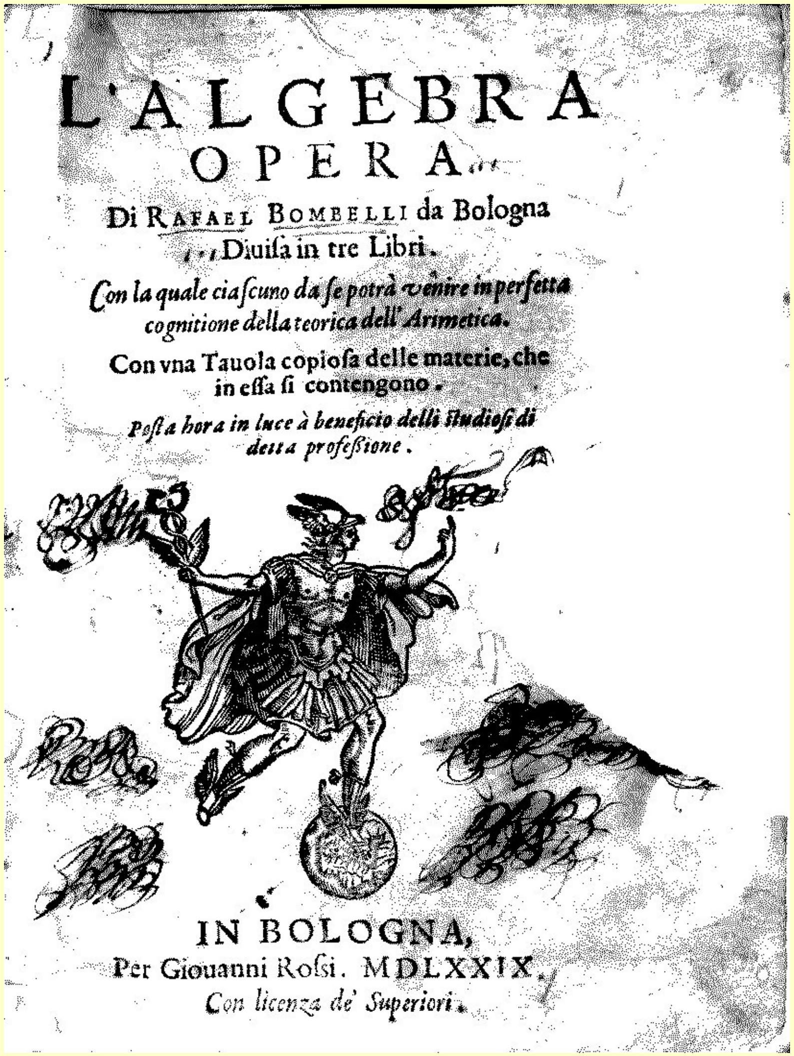
$6+11\sqrt{-1}-4=2+11\sqrt{-1}$ De même : $(2-\sqrt{-1})^3=2-11\sqrt{-1}$

Or, nous avions : $x=\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}$

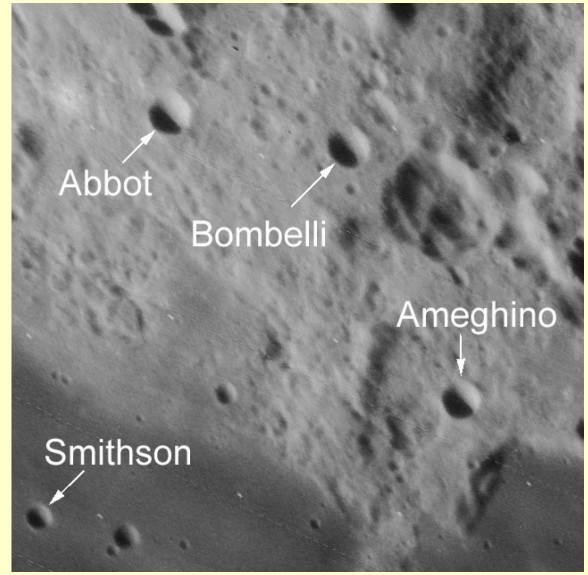
Donc $x=2-\cancel{\sqrt{-1}}+2+\cancel{\sqrt{-1}}=4$ **il retrouve bien que x = 4 !**

Donc toute équation cubique a au moins une racine réelle !

Le retour du héros


L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori.

Algebra 1572



Più via più di meno fà più di meno.
Meno via più di meno fà meno di meno.
Più via meno di meno fà meno di meno.
Meno via meno di meno fà più di meno.
Più di meno via più di meno fà meno.
Più di meno via meno di meno fà più.
Meno di meno via più di meno fà più.
Meno di meno via meno di meno fà meno.

Il constate d'autre part que *più* et *più di meno* ne s'additionnent pas, ayant ainsi une première intuition de l'indépendance linéaire de 1 et i.

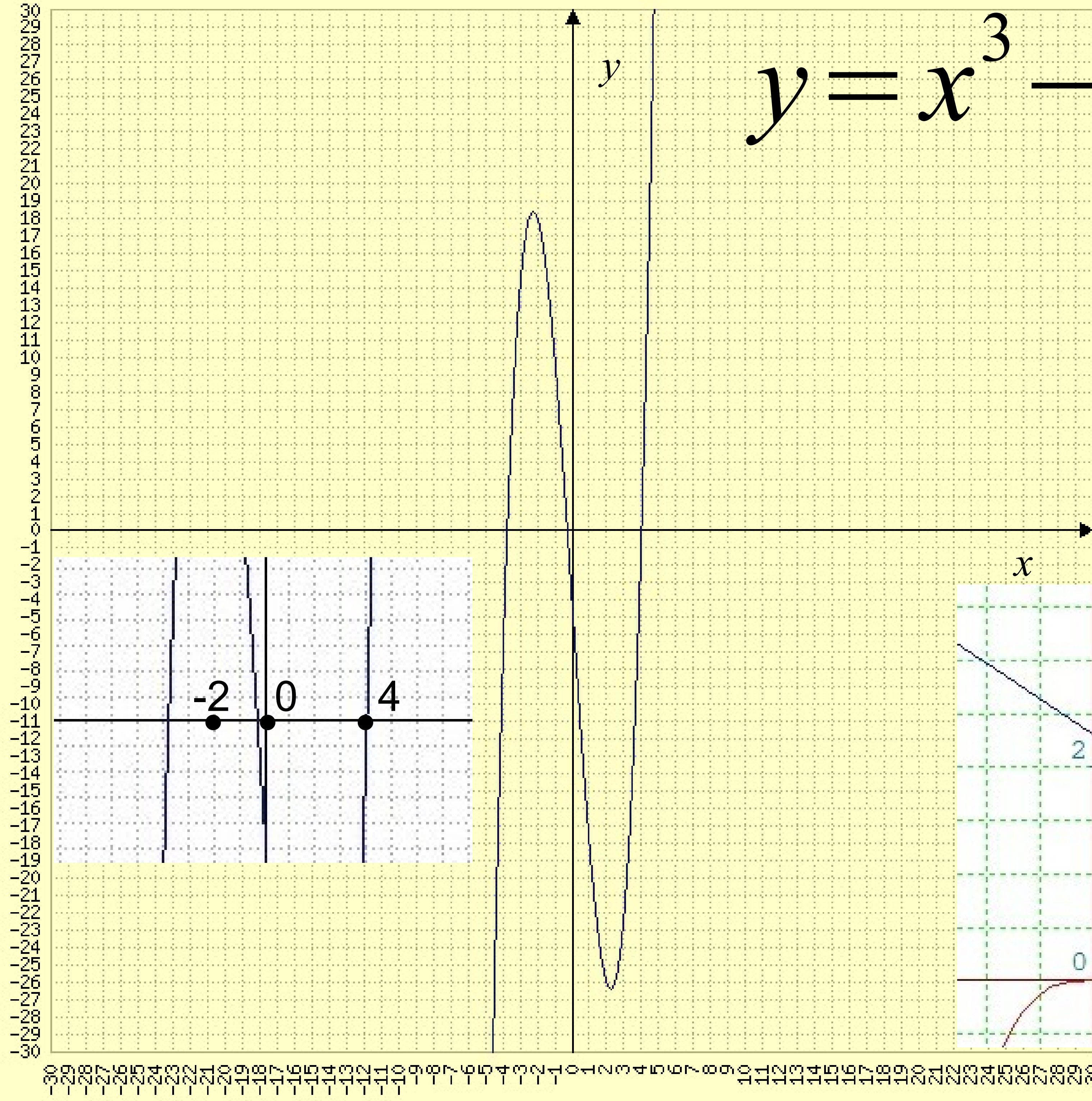
$$y = x^3 - 15x - 4$$

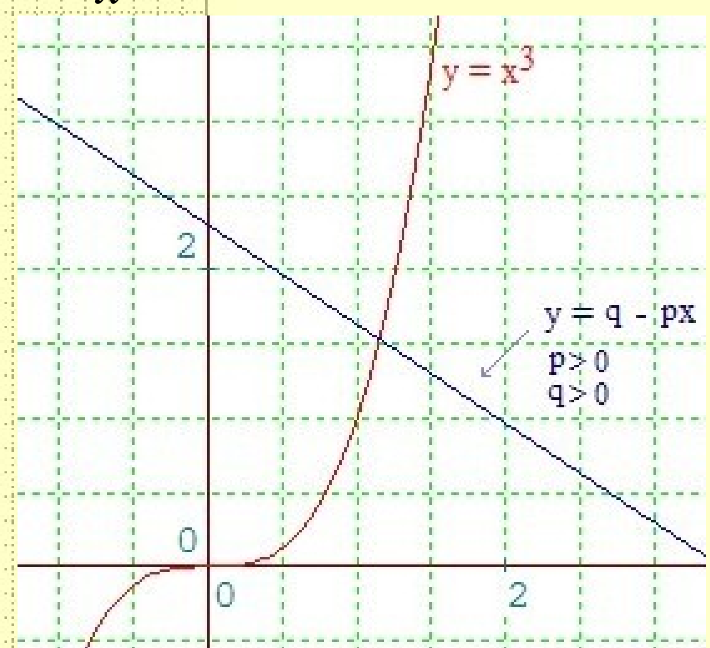
$$x_1 = 4$$

$$y = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$$

$$x_2 = -2 + \sqrt{3}$$

$$x_3 = -2 - \sqrt{3}$$





Intermède pour Stella...

Un test (Bagni, 2000) fut fait auprès de 52 étudiants du même âge, où on a tout d'abord présenté cette équation cubique.
41% acceptèrent la solution,
25% la rejetèrent,
34% dirent qu'ils ne savaient pas.

Immédiatement après, on leur présentait abruptement la solution de l'équation quadratique $x^2+1=0 \rightarrow x=\pm i$
18% l'acceptèrent,
66% la rejetèrent,
16% dirent qu'ils ne savaient pas.

Ces résultats induisent fortement l'idée que les développements historiques ont une grande force pédagogique et peuvent réellement aider les élèves à comprendre...

Première sortie dans le plan

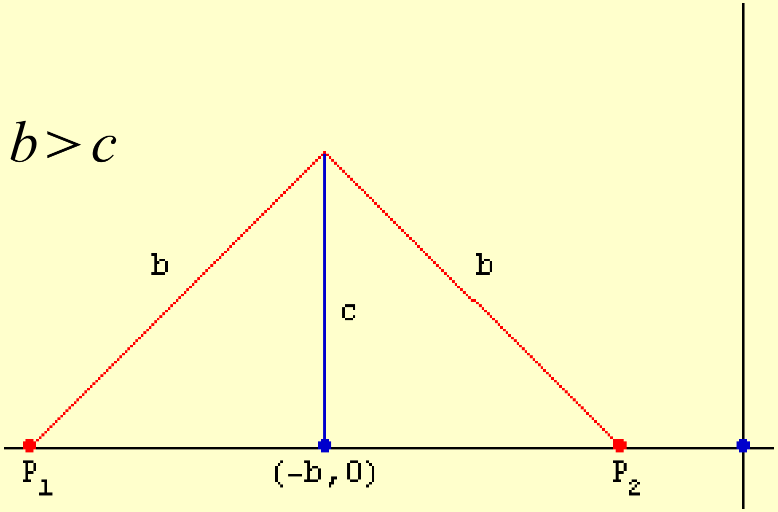
1685 John Wallis

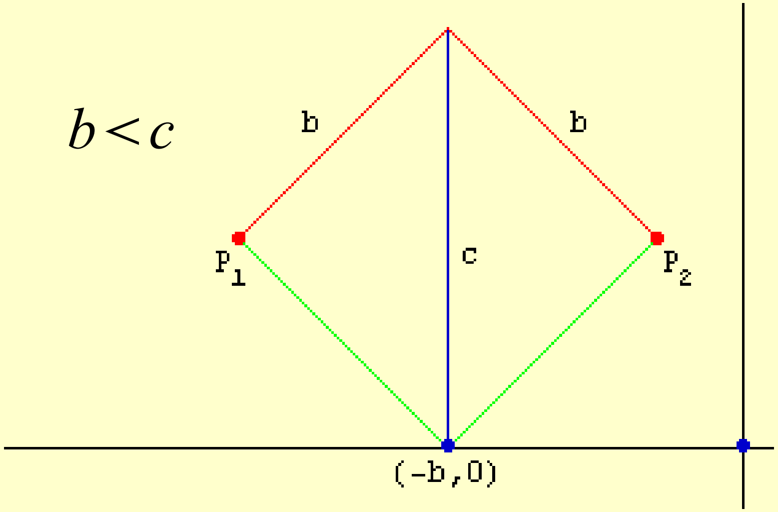
Première représentation géométrique dans le plan des nombres complexes.

Cas de $x^2+2bx+c^2=0$

Racines : $x_1=-b-\sqrt{b^2-c^2}$

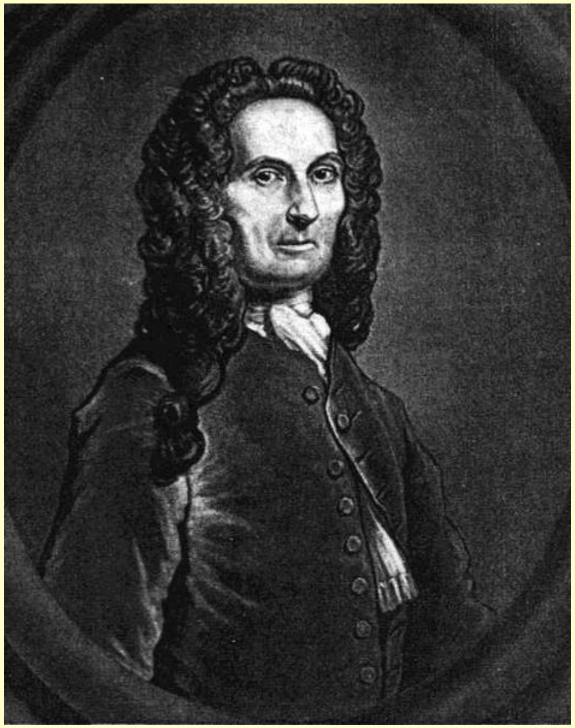
$x_2=-b+\sqrt{b^2-c^2}$





Les nombres commencent à s'émanciper de la droite des réels...

Première trigonométrie



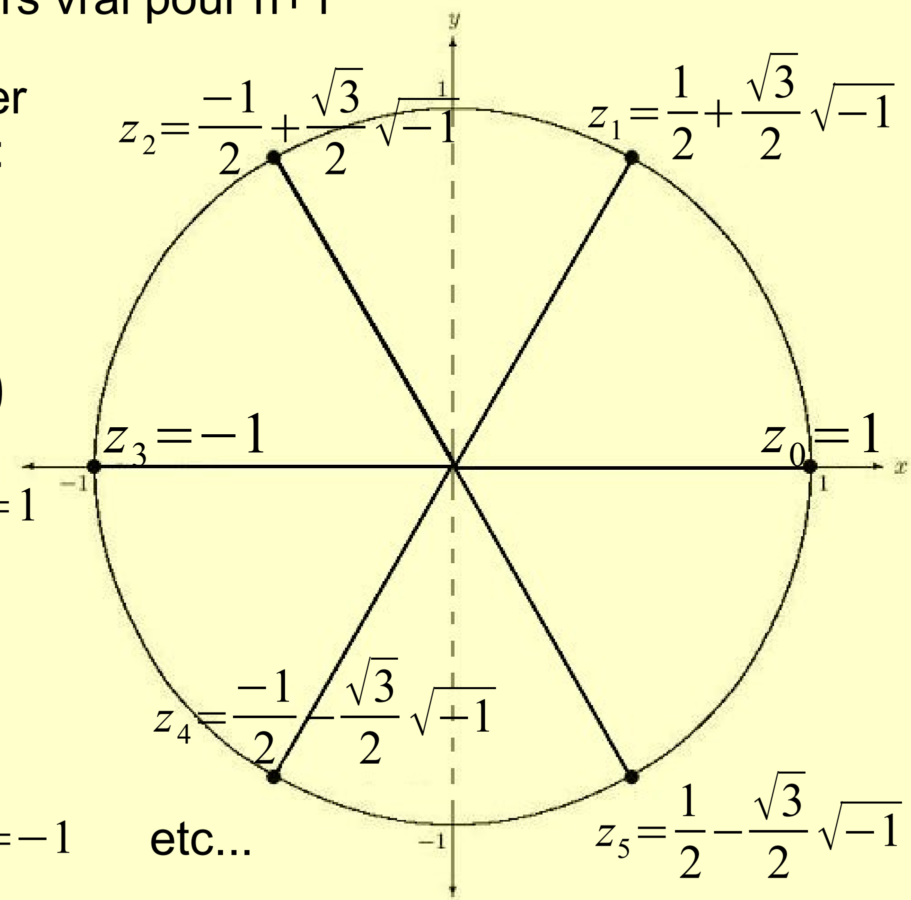
Abraham de Moivre
(1667- 1754)
Formule découverte en 1722.

$$\left(\cos(\theta)+\sqrt{-1}\sin(\theta)\right)^n=\cos(n\theta)+\sqrt{-1}\sin(n\theta)$$

On le prouve pour n=1 puis par récurrence :
si vrai pour n, alors vrai pour n+1

Permet de trouver
les 6 racines de :

$$x^6-1=0$$



$$\left(\cos(2\pi)+\sqrt{-1}\sin(2\pi)\right)^{\left(\frac{m}{6}\right)}=\cos\left(2\pi\frac{m}{6}\right)+\sqrt{-1}\sin\left(2\pi\frac{m}{6}\right)$$

$$\left(\cos(2\pi)+\sqrt{-1}\sin(2\pi)\right)^{\left(\frac{0}{6}\right)}=\cos\left(2\pi\frac{0}{6}\right)+\sqrt{-1}\sin\left(2\pi\frac{0}{6}\right)=1$$

$$\left(\cos(2\pi)+\sqrt{-1}\sin(2\pi)\right)^{\left(\frac{1}{6}\right)}=\cos\left(2\pi\frac{1}{6}\right)+\sqrt{-1}\sin\left(2\pi\frac{1}{6}\right)$$

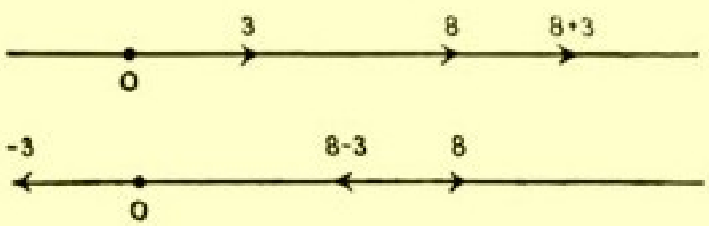
$$\left(\cos(2\pi)+\sqrt{-1}\sin(2\pi)\right)^{\left(\frac{2}{6}\right)}=\cos\left(2\pi\frac{2}{6}\right)+\sqrt{-1}\sin\left(2\pi\frac{2}{6}\right)$$

$$\left(\cos(2\pi)+\sqrt{-1}\sin(2\pi)\right)^{\left(\frac{3}{6}\right)}=\cos\left(2\pi\frac{3}{6}\right)+\sqrt{-1}\sin\left(2\pi\frac{3}{6}\right)=-1$$

etc...

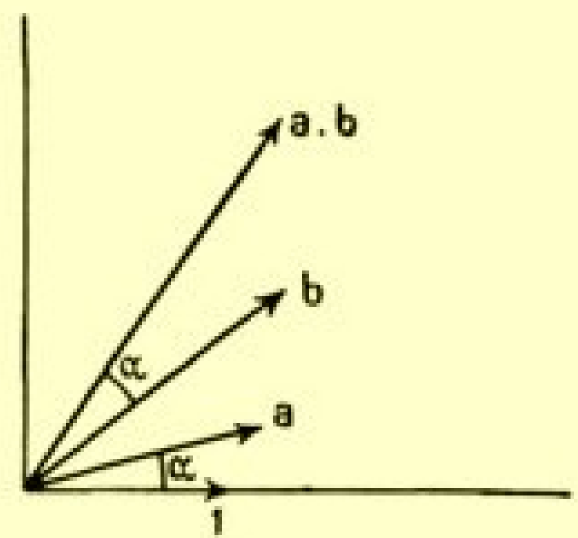
Tout est dit, mais...

1799 Wessel Caspar
norvégien/danois
Arpenteur, géomètre et cartographe, Wessel commence à « géométriser » les nombres.
Sur la représentation analytique de la direction, un essai principalement appliqué aux polygones plans et sphériques, fut édité en 1799 par l'Académie royale danoise. Écrit en danois, il resta ignoré jusqu'à son édition française : en 1897, un siècle plus tard !



L'addition et la soustraction peuvent être représentées par des vecteurs indiquant une direction, positive ou négative.

La multiplication s'obtient en multipliant les longueurs et en additionnant les angles

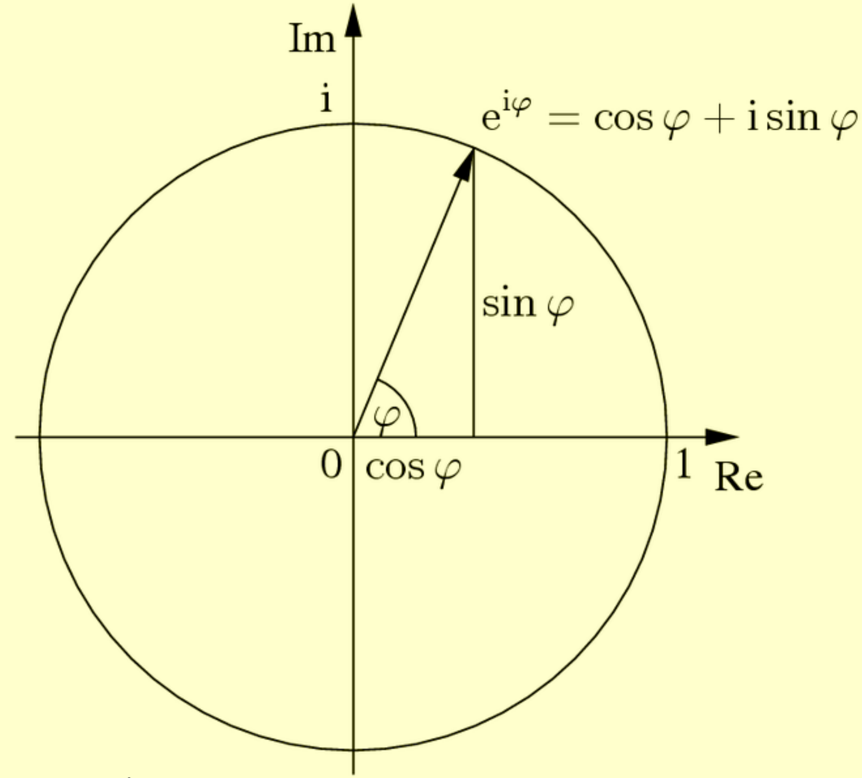


La trigonométrie s'ajuste parfaitement...
Tout était donc dit !

L'ultime victoire

Leonhard Euler
(1707-1783)

En 1777, Euler formalise racine de moins 1 en i. Cette notation aura cependant beaucoup de mal à s'imposer, la notation [racine de moins 1] sera souvent utilisée en fait jusqu'au 20è siècle !



$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Qualifiée de « formule la plus remarquable des mathématiques » par Richard Feynman, car elle réunit en seulement 7 caractères l'addition, la multiplication, l'exponentiation, l'égalité et les constantes remarquables 0, 1, e, i et π

Multiplier par $e^{i\varphi}$, c'est faire tourner de φ

Démonstration...

Le développement en série de la fonction *exp* de la variable réelle *x* peut s'écrire :

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

et s'étend à tout nombre complexe *x*.

Maintenant si nous injectons *i* dans l'exposant, nous obtenons :

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} i^n$$

Nous pouvons regrouper ses termes pour obtenir cette écriture dégénérée :

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{4n}}{(4n)!} i^{4n} + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} i^{4n+1} + \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} i^{4n+2} + \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} i^{4n+3} \right)$$

Pour simplifier cela, nous utilisons les propriétés de base suivantes de *i* :

$$i^0 = 1, \qquad i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1, \ldots$$

en généralisant à tout exposant entier, on a pour tout *n* :

$$i^{4n} = 1, \qquad i^{4n+1} = i, \qquad i^{4n+2} = -1, \qquad i^{4n+3} = -i$$

Ainsi,

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{4n}}{(4n)!} + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} i - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} i \right)$$

en réarrangeant les termes et en séparant la somme en deux (ce qui est possible puisque les deux séries sont absolument convergentes) :

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{4n}}{(4n)!} - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \right) + i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} \right)$$

Pour avancer un peu plus, nous utilisons les développements en série de Taylor des fonctions cosinus et sinus:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{4n}}{(4n)!} - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \right)$$

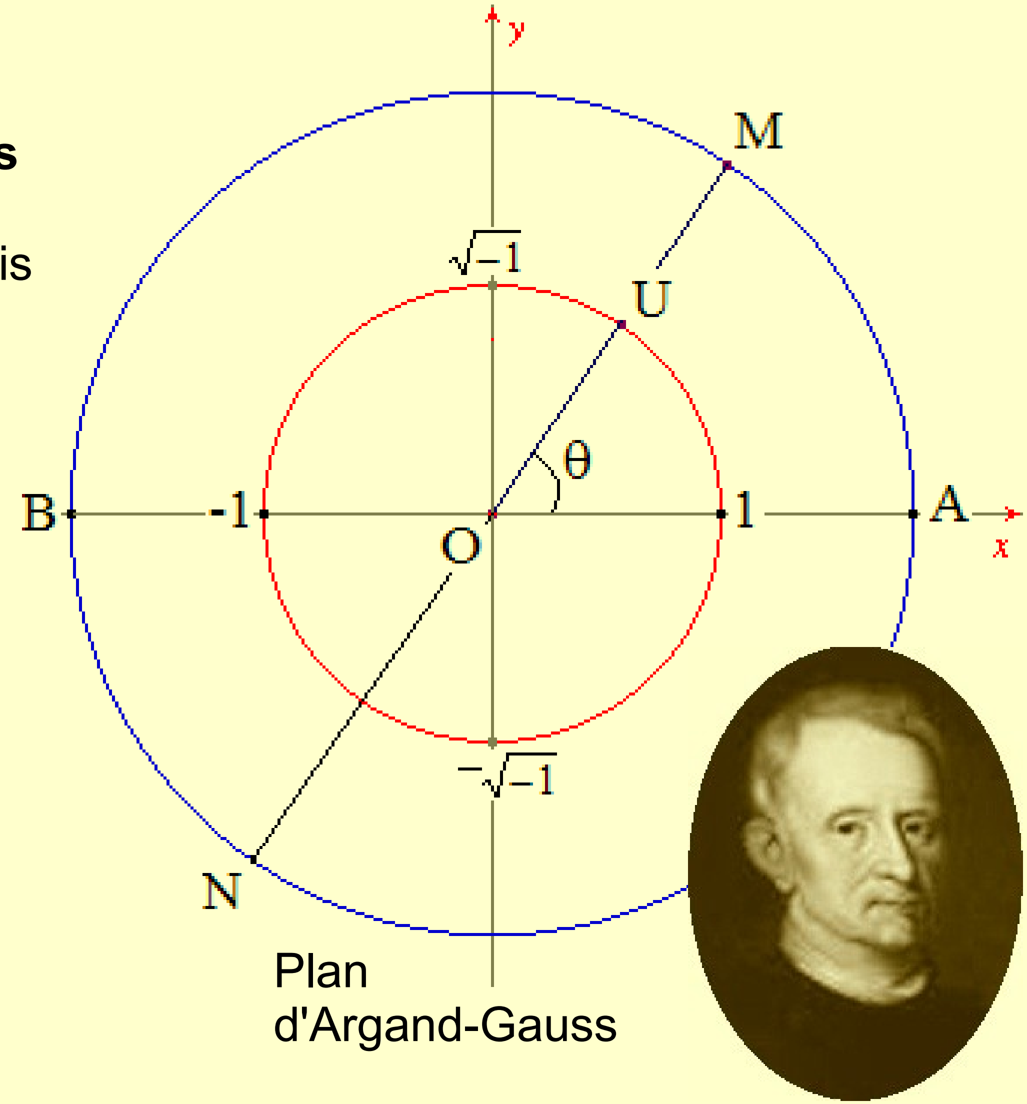
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} \right)$$

Ce qui, en remplaçant dans les formules précédentes de e^{ix}, donne :

$$e^{ix} = \cos x + i \ \sin x$$

Premières rotations

Argand reprend les mêmes idées que Wessel dans son **Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques (1806)**. Là encore, cet essai n'est guère pris en compte. Argand l'envoie à Legendre (1813) mais cet auteur inconnu laisse le grand mathématicien sceptique...
La notation i pour n'est pas encore utilisée malgré la notation d'**Euler** (1777).
La vision d'Argand est clairement **vectorielle** dans les notations : il distingue entre OA (longueur, nombre positif) et $\overline{OA}$, "lignes dirigées". La notation $\overline{OU}$ désigne alors le nombre $\cos\theta + \sqrt{-1}.\sin\theta$ où θ désigne l'angle que fait avec $\overline{OU}$ l'unité positive notée 1. $\overline{OM}$ désignera le nombre complexe $z = r(\cos\theta + \sqrt{-1}.\sin\theta)$ en posant r = OM.
On doit aussi à Argand, dans ce même ouvrage une démonstration du **théorème fondamental de l'algèbre**.



Plan d'Argand-Gauss

Jean-Robert Argand
1768-1822

Remise en ordre générale

Karl Friedrich Gauss
1777-1855

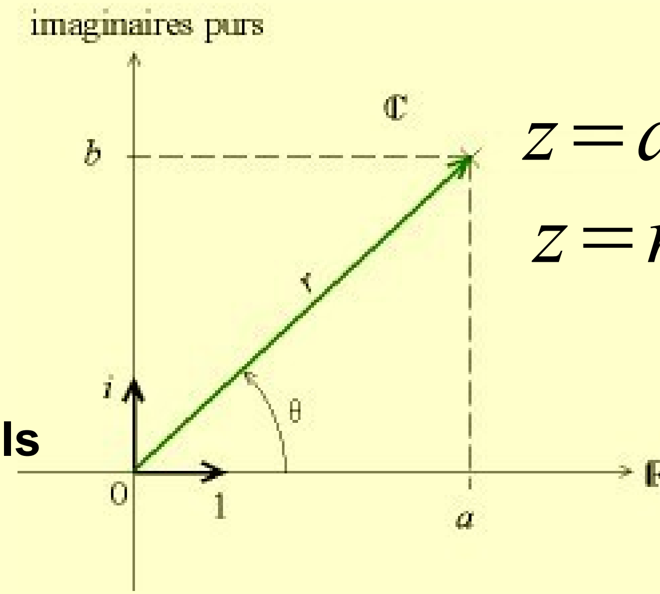
$$\left(\sqrt{-1}\right)^2 = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1 \; ...$$

Pour éviter ce gente de confusion, hélas courante, il conjure de nommer $\sqrt{-1}$ i.

Gauss **donne un vrai statut aux nombres qu'il nomme « complexes », les notant z = a + bi**, incluant les nombres usuels (réels) lorsque b = 0.

Il **valide l'interprétation géométrique**, avec addition, multiplication, inverse, etc.
Commence à étudier les **fonctions de variables complexes**...
Etablit que si une équation a pour racine z=a+ib, alors le conjugué a-ib est aussi une racine..

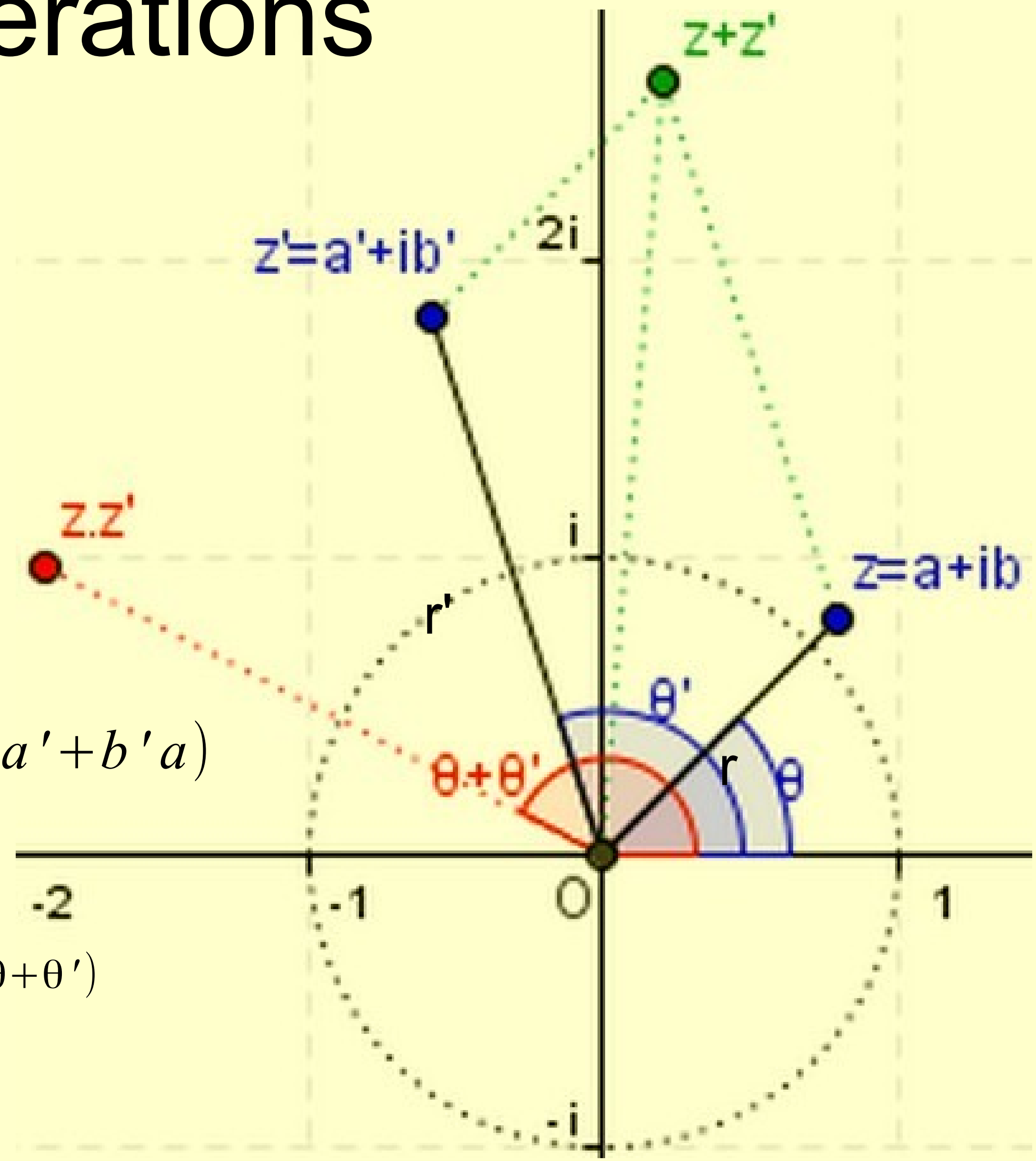
Démontre que **tout polynôme à coefficients réels d'une variable complexe, de degré n, admet n racines complexes (éventuellement égales).**



$$z = a + ib$$
$$z = r\,e^{i\theta}$$

Effet collatéral, avec les travaux de Gauss et, précédemment, de Euler, **les nombres négatifs sont définitivement considérés comme des nombres à part entière, 1000 ans après les indiens...**

Opérations



Addition

$$z=a+ib \qquad z'=a'+ib'$$

$$z+z'=(a+a')+i(b+b')$$

$$(2-2i)+(1+4i)=3+2i$$

$$z+z'=z'+z$$

Multiplication

$$(a+ib)(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ba'+b'a)$$

$$z=r\,e^{i\theta}$$

$$z'=r'\,e^{i\theta'}$$

$$zz'=(r\,e^{i\theta})(r'\,e^{i\theta'})=rr'\,e^{i(\theta+\theta')}$$

$$zz'=z'z$$

Simplifications...

$$e^{i\theta}e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')} \qquad (e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$$

Mais z < z' n'a pas de sens...

Développements... complexes !

Cauchy
1789-1857

Augustin-Louis Cauchy développe l'**analyse complexe**, c'est-à-dire les fonctions dérivables à variables complexes, dites holomorphes.

Théorême des résidus, qui permet de calculer une intégrale sans connaître la primitive de la fonction.

Le résidu d'une fonction *f* au point *c* est : $\operatorname{Res}(f, c) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz$

Le théorème : $\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f, a_k)$

Application pratique, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+1}\, dx$

qui apparaît en théorie des probabilités, résiste aux calculs classiques

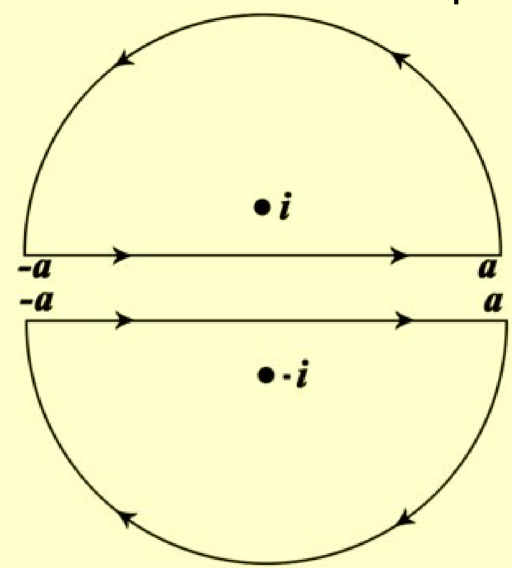
On pose l'intégrale de contour : $\int_C f(z)\, dz = \int_C \frac{e^{itz}}{z^2+1}\, dz$

f(z) possède deux singularités en i et -i

Son résidu au point z = i est : $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \frac{e^{-t}}{2i}$

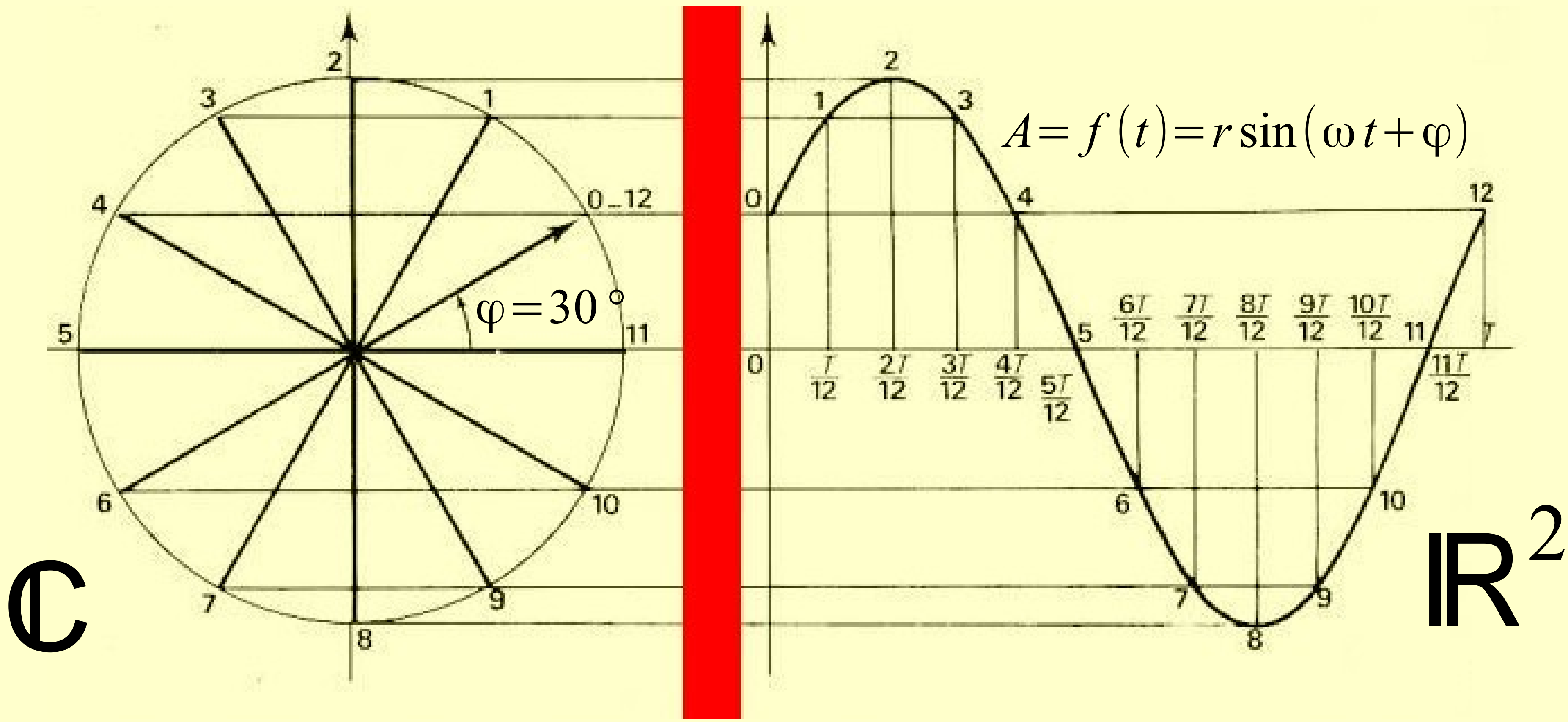
En appliquant le théorême des résidus, on obtient :

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \frac{e^{-t}}{2i} = \pi e^{-t}$$



Finalement, après avoir développé aussi autour de z = -i $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itz}}{z^2+1}\, dz = \pi e^{-|t|}.$

Dès que ça vibre, que ça ondule...



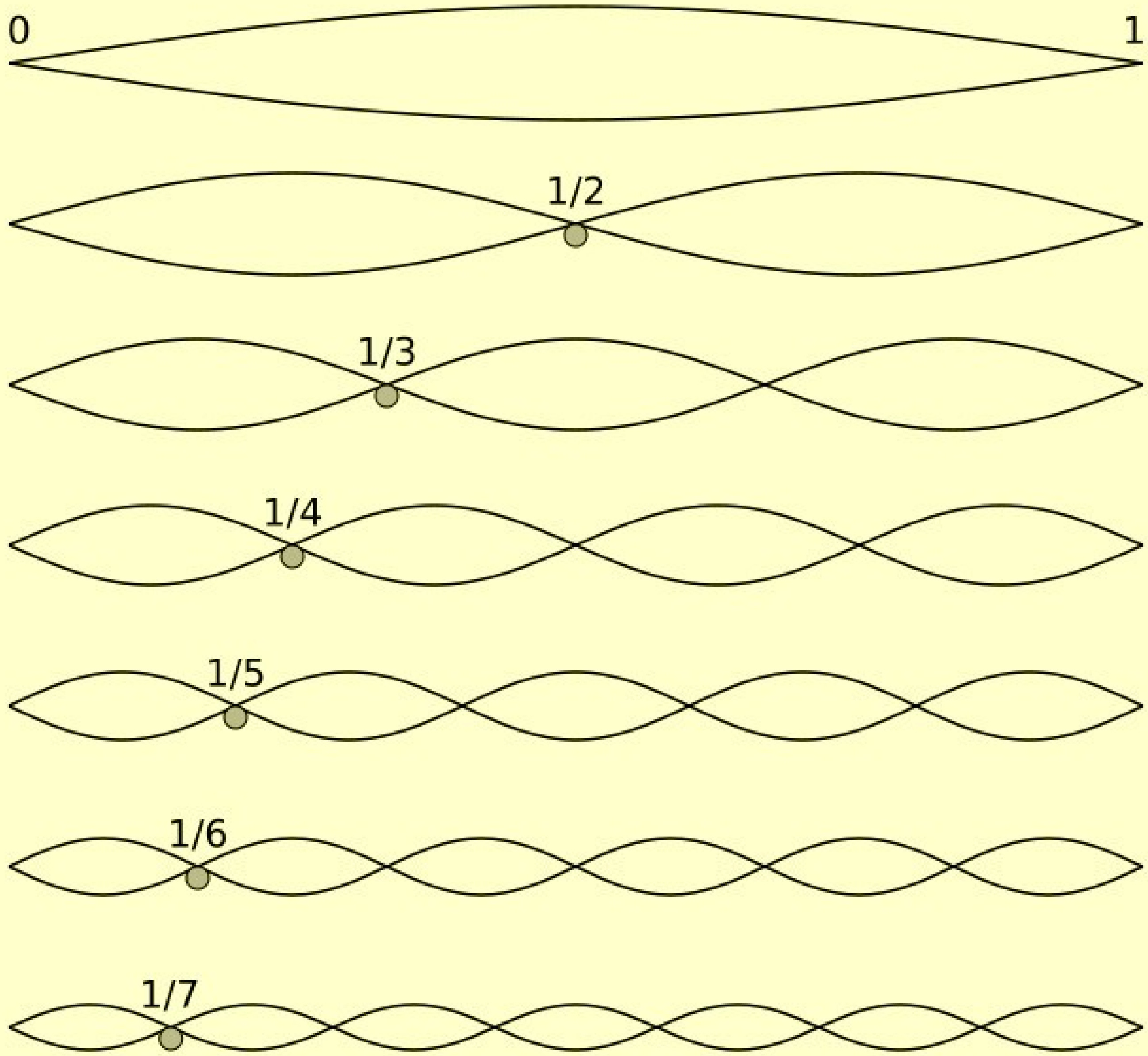
$$z = f(t) = r(\cos(\omega t + \varphi) + i\sin(\omega t + \varphi)) = r\,e^{(i\omega t + \varphi)}$$

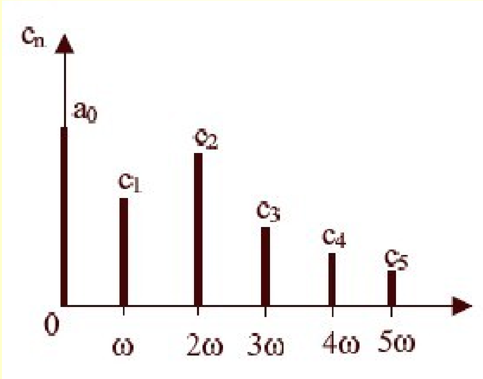
en sinus/cosinus

en amplitude/phase

ou pour tout phénomène périodique correctement « borné ».

Harmoniques

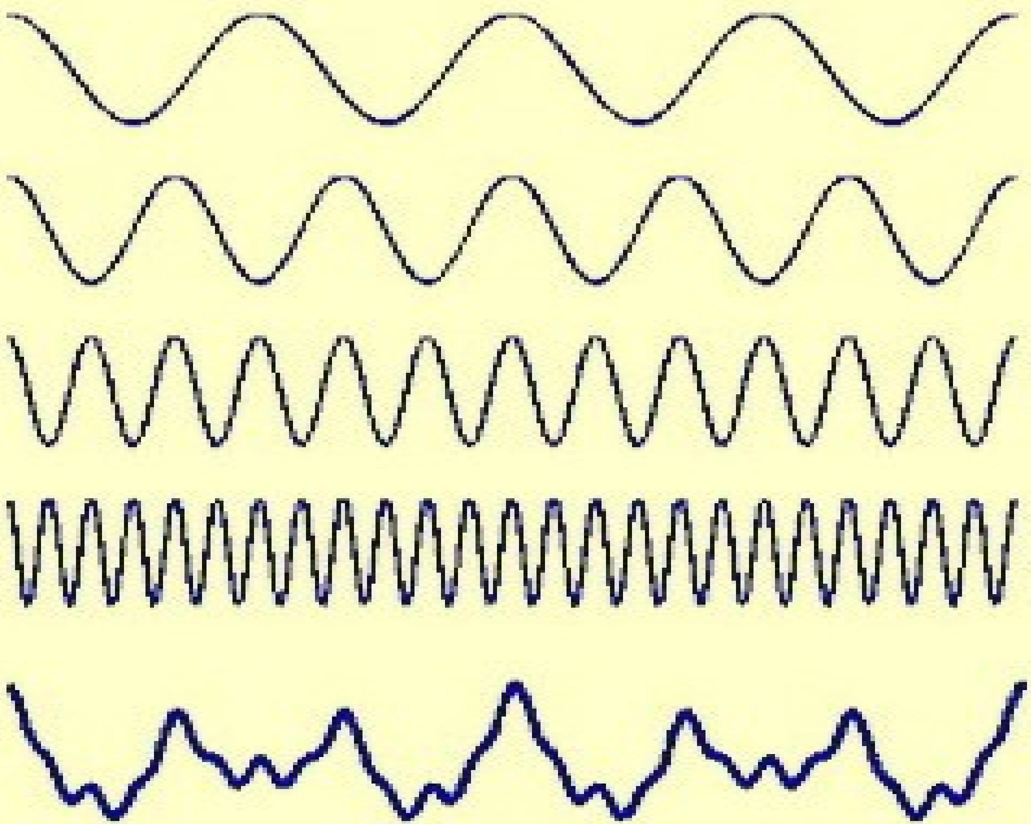




Spectre
Fréquences et intensités des harmoniques qui constituent le signal, le son (timbre), etc...

Une corde tendue entre deux point peut vibrer de différentes façons.

Empilage de sinus...



$f_1(t)=\sin(2\mathrm{t})$

$f_2(t)=\sin(3\mathrm{t})$

$f_3(t)=\sin(6\mathrm{t})$

$f_4(t)=\sin(12\mathrm{t})$

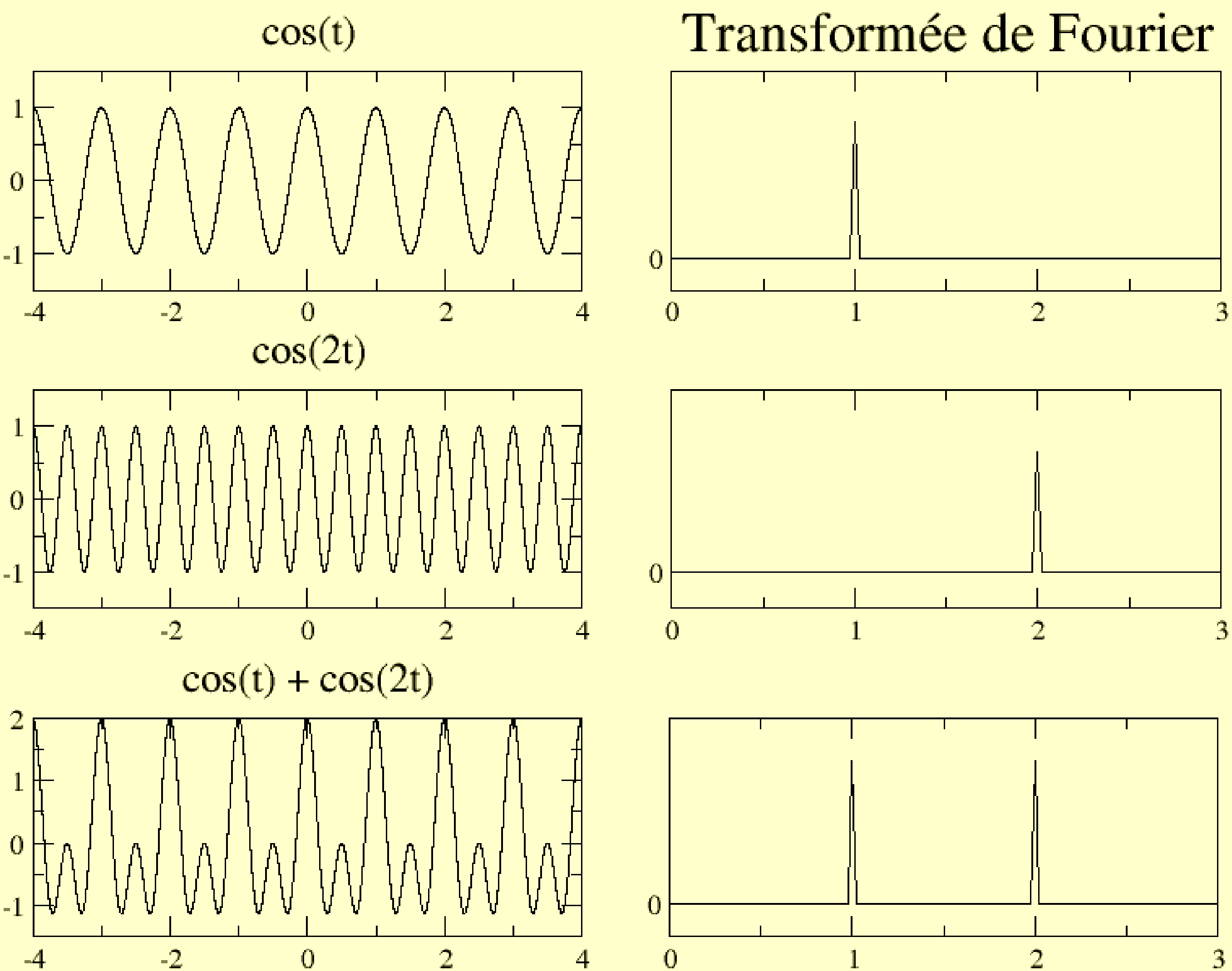
L'analyse de Fourier (1822) affirme qu'il est toujours possible de décrire une fonction périodique comme une somme, éventuellement infinie, de sinusoïdes simples.

$$f(t)=a_0+a_1 f(1)+a_2 f(2)+a_3 f(3)+a_4 f(4)$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} a_k \mathrm{e}^{i\omega_k t+\phi_k}$$

Traitements sur images, compression/décompression de données vidéo et audio, etc...,

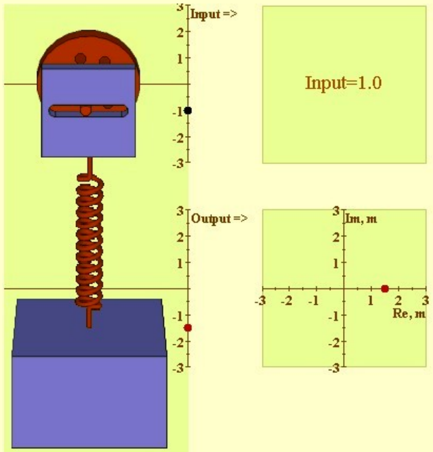
...et désempilage



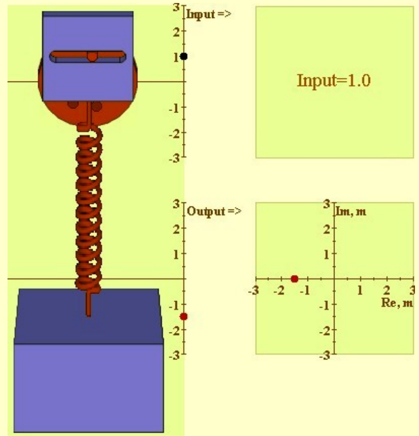
Non seulement il est possible, à partir d'une fonction continue, d'obtenir son spectre, mais que d'autre part il est possible de resynthétiser complètement la fonction initiale à partir de son spectre.

Si $\quad Transf(\omega) = \int f(t)\, e^{i\omega t}\, dt \quad$ alors $\quad f(t) = \frac{1}{(2\pi)} \int Transf(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$

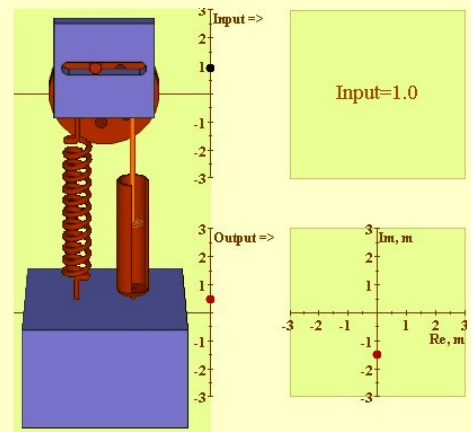
Interdépendances



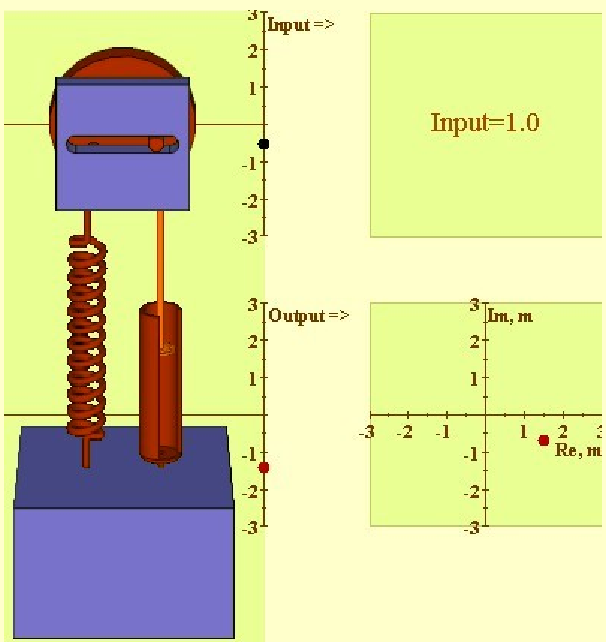
Réponse réelle positive
Output/Input= 1,5   Masses en phase



Réponse réelle négative
Output/Input = -1,5
Masses en opposition de phase



Réponse imaginaire négative
Output/Input = -1,5i
Masses décalées d'un quart de phase

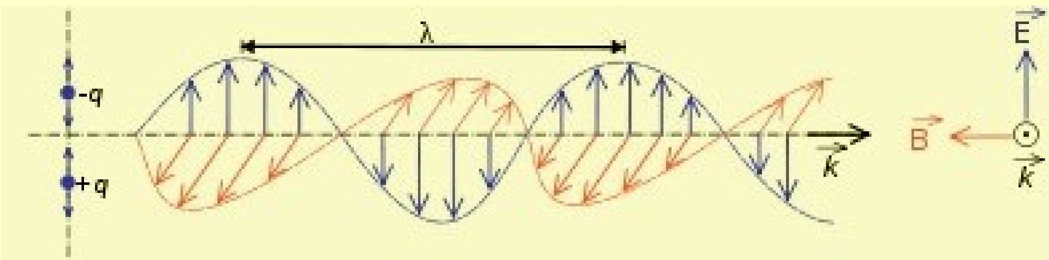


Réponse complexe
Output/Input = 1,5i - 0,7i
Masses juste légèrement décalées.

Imaginaire ne veut pas dire que ça n'existe pas

Good vibrations

Ondes électromagnétiques : radio, lumière, rayons X, ...



Intensité du champ
électromafnétique :

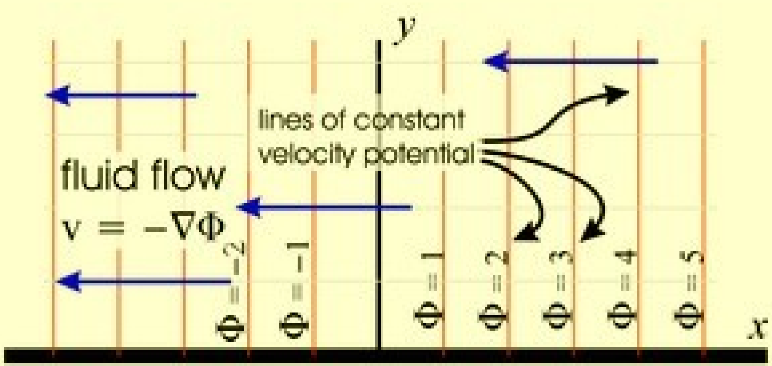
$$\vec{\Gamma} = \sqrt{\mu_0}\,\vec{H} + i\sqrt{\varepsilon_0}\,\vec{E}$$

Physique des particules, mécanique quantique

$$\frac{\hat{\vec{\mathbf{p}}}^2}{2m}\,|\Psi(t)\rangle + V(\hat{\vec{\mathbf{r}}},t)\,|\Psi(t)\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}\,|\Psi(t)\rangle$$

Equation de Schrödinger :
densités de probabilités des résultats
de toutes les mesures d'un système.

Mécaniques des fluides, écoulements le long des surfaces, résonances



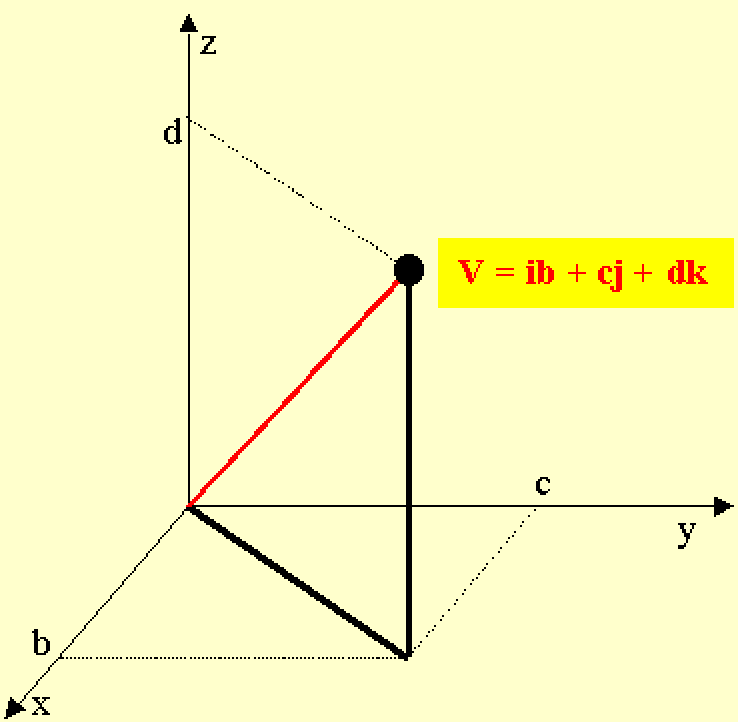
$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = V_x - iV_y$$

etc...

Quaternions, hypercomplexes

William Rowan Hamilton
1805-1865

$$Q = a1 + bi + cj + dk$$



Après des années de recherches sur la construction d'une algèbre avec des « triplets » de trois nombres réels, il bute sur la multiplication (qui fut prouvée ultérieurement comme impossible à définir).
Hamilton construit alors un ensemble de triplés, auxquels il ajoute un 4ème élément scalaire.
Pour b=c=d=0, on obtient les réels. Pour 01, on obtients un vecteur ou « imaginaire pur ».
La relation qui existe entre les quaternions et les rotations en dimension 3 fait de l'ensemble des quaternions un outil utile pour le traitement de l'espace comme en infographie ou en théorie de la commande.

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Plaque du Broom Bridge à Dublin

Méditations finales...

- Pas plus de (-2) bières que de zéro bières que de (5+3i) bières que de π bières sur le comptoir...
- Les nombres ne poussent pas sur les arbres !
- **Ils sont dans notre esprit, donc tous sont « imaginaires »...**

« L'esprit divin s'est manifesté de façon sublime
dans cette merveille de l'analyse,
ce prodige d'un monde idéal,
cet intermédiaire entre l'être et le non-être,
que nous appelons la racine imaginaire
de l'unité négative »
Gottfried Leibniz

Le malheur d'Orphée

J'ai perdu mon Eurydice,
Rien n'égale mon malheur;
Sort cruel! quelle rigueur!
Rien n'égale mon malheur!
Je succombe à ma douleur!
Eurydice, Eurydice,
Réponds, quel supplice!
Réponds-moi!
C'est ton époux fidèle;
Entends ma voix qui t'appelle.

J'ai perdu mon Eurydice,

Eurydice, Eurydice!
Mortel silence! Vaine espérance!
Quelle souffrance!
Quel tourment déchire mon cœur!

G. Kratzenstein-Stub, 1793-1860: Orpheus and Eurydice. Photo © Maicar Förlag - GML.

Bibliographie

http://serge.mehl.free.fr [cours de maths très complet plus « chronomath » formidable !]
http://publimath.irem.univ-mrs.fr/   [base bibliographique très riche]
http://www.math93.com/index.html   [remarquable histoire des maths]
http://www.mathamazement.com   [très riche et original, en anglais]
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Fourier/fourier1.html
[fantastique animation flash sur séries de Fourier]
http://www.picomonster.com/ [excellentes anims sur les systèmes interdépendants]

Wikipedia, surtout en anglais...