Dimensions fractales

Hervé Stève
herve.steve@hotmail.fr
KaféMath du 24/11/2011

PLAN

1. Généralités, Mandelbrot
2. Dimensions entières et fractales
3. Des exemples

Généralités

- Fractales : formalisme B. Mandelbrot (1975)
- Dimension linéaire :

  ex) feuille A4 : 210mm x 297mm
- Nombre de coordonnées :

  - Surface d'une feuille : dimension d=2
  - Notre espace : d=3 : largeur, hauteur, profondeur
  - d > 3 ? hypercubes, espace-temps …
- Propriété d'un objet fractal :

  ex) dimension fractale = 2,5
- dimension topologique objet ≠ dimension espace

Benoit Mandelbrot

- Origine lituanienne, 1924-2010
- Mathématicien franco-américain
- Ecole Polytechnique, IBM, Yale, Cambridge …
- Théorie de l'information
- Les fractales

  -*Forme, hasard et dimension* (1974)

  -Théorie financière (dès 1961), temps multifractal

  Une approche fractale des marchés (2004)

  -De Mandelbrot : $z_{n+1} = z_n^2 + c$, c complexe

Dimensions entières

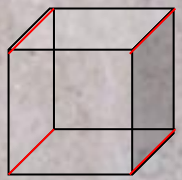
- d < 0 : kafemath du 6/01/2011

- d = 0 : point, scalaire, sans axe
- d = 1 : droite, vecteur, 1 axe

  segments, courbes
- d = 2 : plan, 2 vecteurs, 2 axes

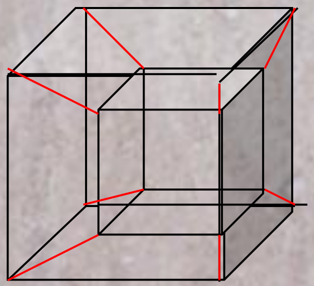
  quadrangles, …, surfaces, …

- d = 3 : espace, 3 vecteurs, 3 axes



- d > 3 : hyperespace, d vecteurs, …

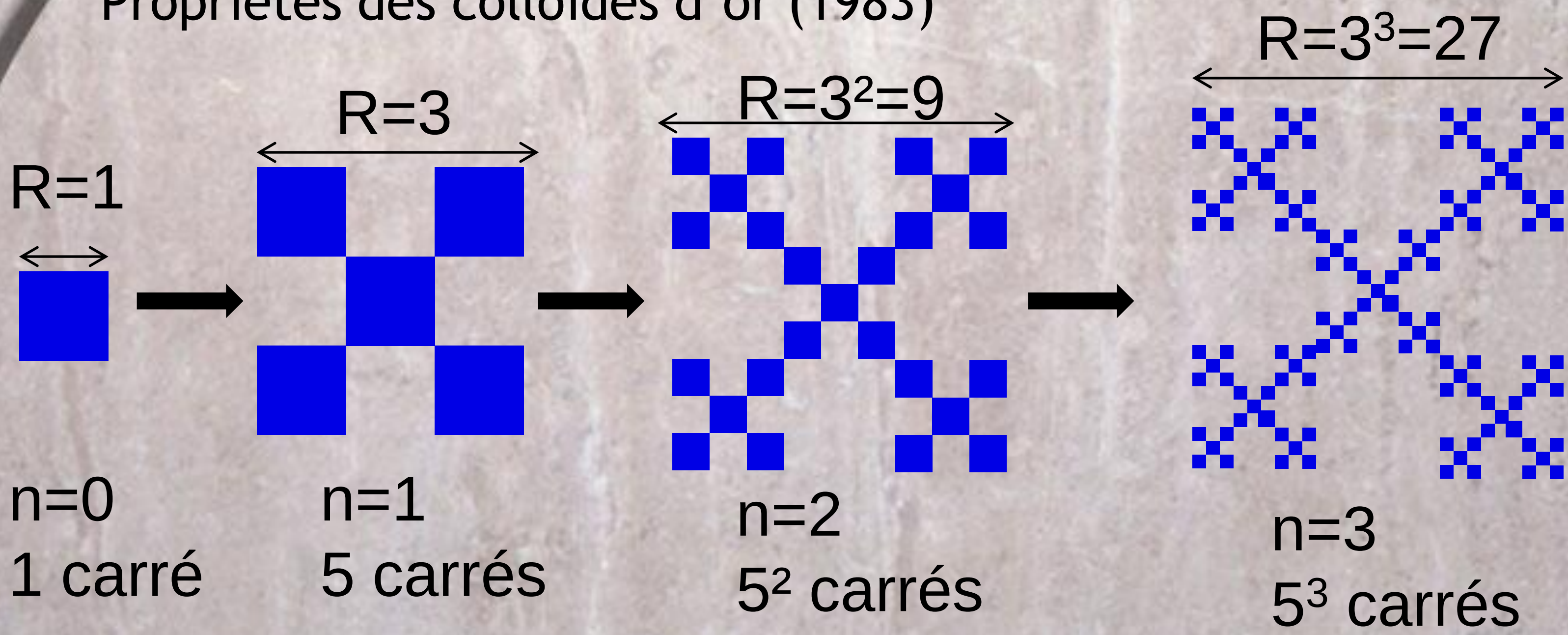
d=4
hypercube
2^d sommets



16 sommets
32 arêtes
24 faces
8 cubes

Fractale de Vicsek

Propriétés des colloïdes d’or (1983)



→ n : $R=3^n$, $V=5^n$ carrés, $R < V < R^{d=2}$

$\boxed{V=R^{D_f}}$

$D_f = \log_3 5 \approx 1{,}4650 < 2 = d$

Dimension fractale

V « volume »

R longueur caractéristique

Dimensions fractales

- Calcul de Df : $V = R^{D_f}$
- Fonction log = logarithme : $\log_b b = 1$

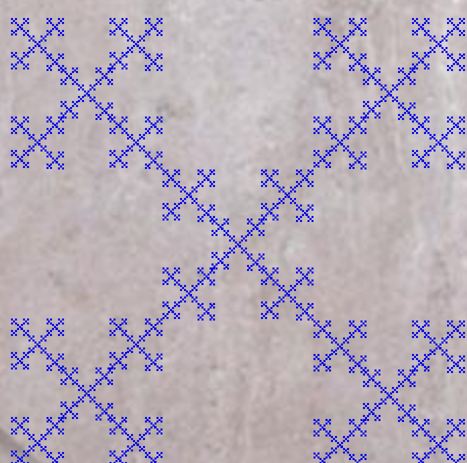
  $\log(a \times b) = \log a + \log b \Rightarrow \log a^2 = 2 \log a$

  $\Rightarrow \log a^b = b \log a$

- $\Rightarrow \log V = D_f \log R \Rightarrow D_f = \log V / \log R$

  $\Rightarrow D_f = \log 5^n / \log 3^n = \log 5 / \log 3 = \log_3 5$

n=5

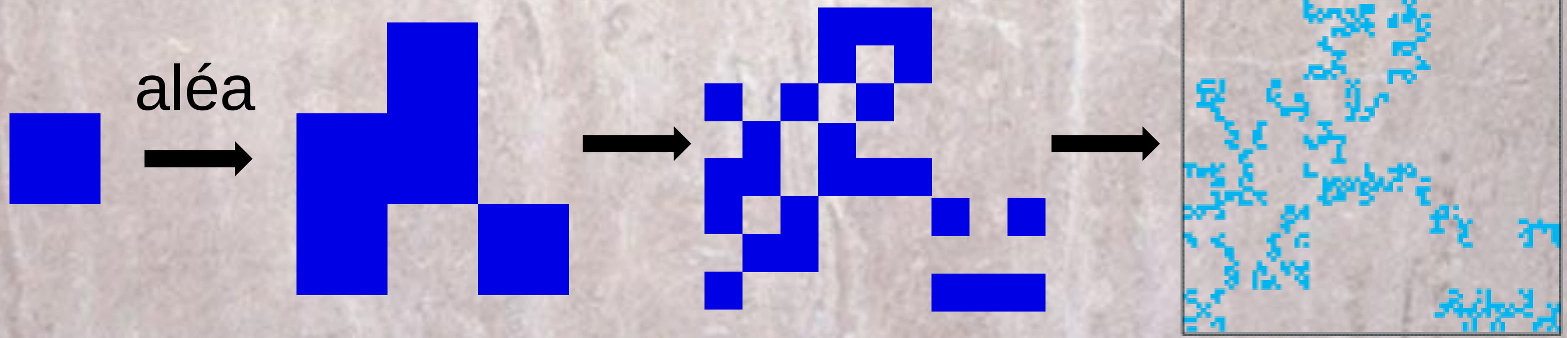


Hiérarchie infinie des détails
Rugosité infinie (*fractus*)
Objet autosimilaire régulier

$D_f = \log_q p$

propriétés

• Fractale désordonnée (or) :



Df = log 5 / log 3 n=5

• **Loi d'échelle** : $V(\lambda\ r) = (\lambda\ r)^{Df} = \lambda^{Df}\ V(r)$
invariance par unité de longueur
Df dimension fractale de similitude = $\log_{\lambda} V(\lambda\ r) / V(r)$

• N(r) nombre de carrés de côté r : $N(r) \propto 1 / r^{Df}$
Df dimension fractale de « comptage de boites »
ex) Vicsek : $r = 1/3^n$, $N(r)=5^n$, $Df=\log N(r) / \log(1/r)$

Dimension de Hausdorff-Besicovitch

- Espace métrique (X,dist) Félix Hausdorff (1918)
  - espace euclidien : $D=\dim_H(X)$ = d entier
  - espace métrique : $D=\dim_H(X)$ réel ≥ 0
- H^s mesure de Hausdorff (H^s « volume », s réel ≥ 0)

$h(A_i)$ diamètres de parties dénombrables A_i de X

$$H^s(X) = \lim_{r \to 0} \inf_{h(A_i) < r} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} h(A_i)^s : X \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

$D = \dim_H(X) = \inf \{ s, H^s(X) = 0\} = \sup \{ s, H^s(X) = \infty \}$

Propriété d'invariance : $H^D(\lambda X) = \lambda^D H^D(X)$

Longueur d’une côte …

Somme de petites longueurs (s=1) :

$H^1 \Rightarrow$ « infini »

Somme de petites surfaces (s=2) :

$H^2 \Rightarrow 0$

Dépendance de la mesure !

On a affaire à une fractale !

Somme intermédiaire H^s

On trouve $1,2 < s < 1,3$

côte ouest GB : $D=1,24 >1$

Côte de la Norvège $D=1,52$ (fjords !)

Auto-similarité

- Si l'objet X est compact auto-similaire :

$$X = S_1(X) \cup S_2(X) \cup \ldots \cup S_N(X)$$

avec $S_1, S_2, \ldots S_N$ similitudes de rapport $r_1, r_2, \ldots, r_N < 1$

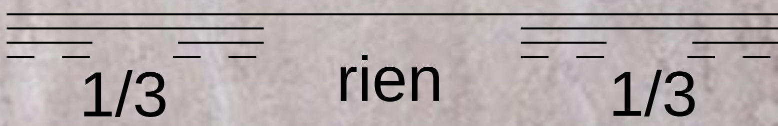
Alors s dimension d'autosimilarité vérifie :

$$r_1^s + r_2^s + \ldots + r_N^s = 1$$

et $s = D = \dim_H(X)$ (avec une condition sur X)

- Applications :

- Vicsek : $5\,(1/3^s) = 1 \Rightarrow s = D = \log_3 5 < 2$
- Poussières de Cantor :

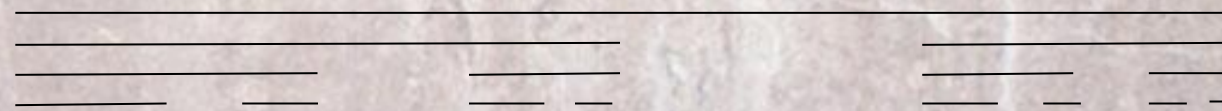


$2\,(1/3^s) = 1 \Rightarrow s = D = \log_3 2 \approx 0{,}6309 < 1$

Mesure(Cantor)=0, Cantor indénombrable !

Cantor (suite) flocon de Koch

- Cantor asymétrique : $1 \Rightarrow 1/2 + \text{rien} + 1/4$



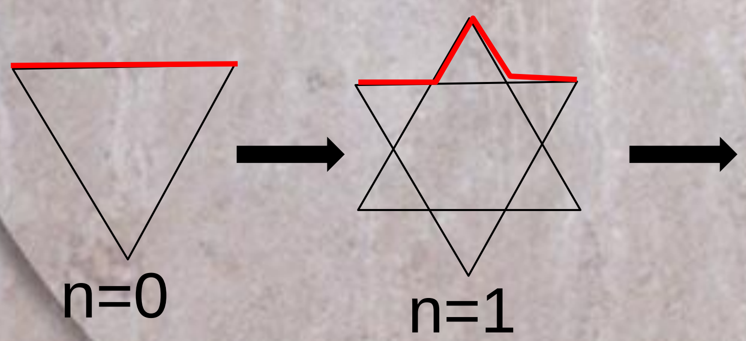
$$1/4^s + 1/2^s = 1 \Rightarrow 1 + 2^s = 4^s = (2^s)^2$$

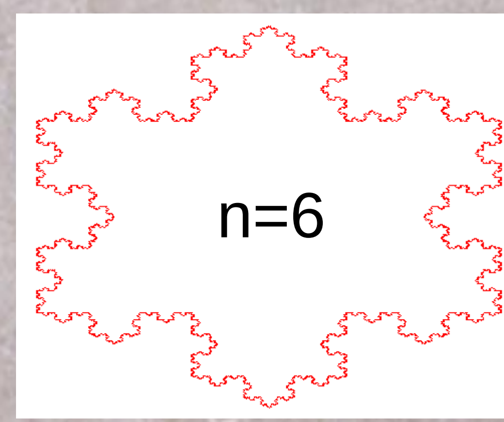
$$\Rightarrow 2^s = \Phi = (1+\sqrt{5})/2 \quad \text{nombre d'or}$$

$$\Rightarrow s = D = \log_2 \Phi \approx 0{,}6942 < 1$$

- Flocon de Koch :

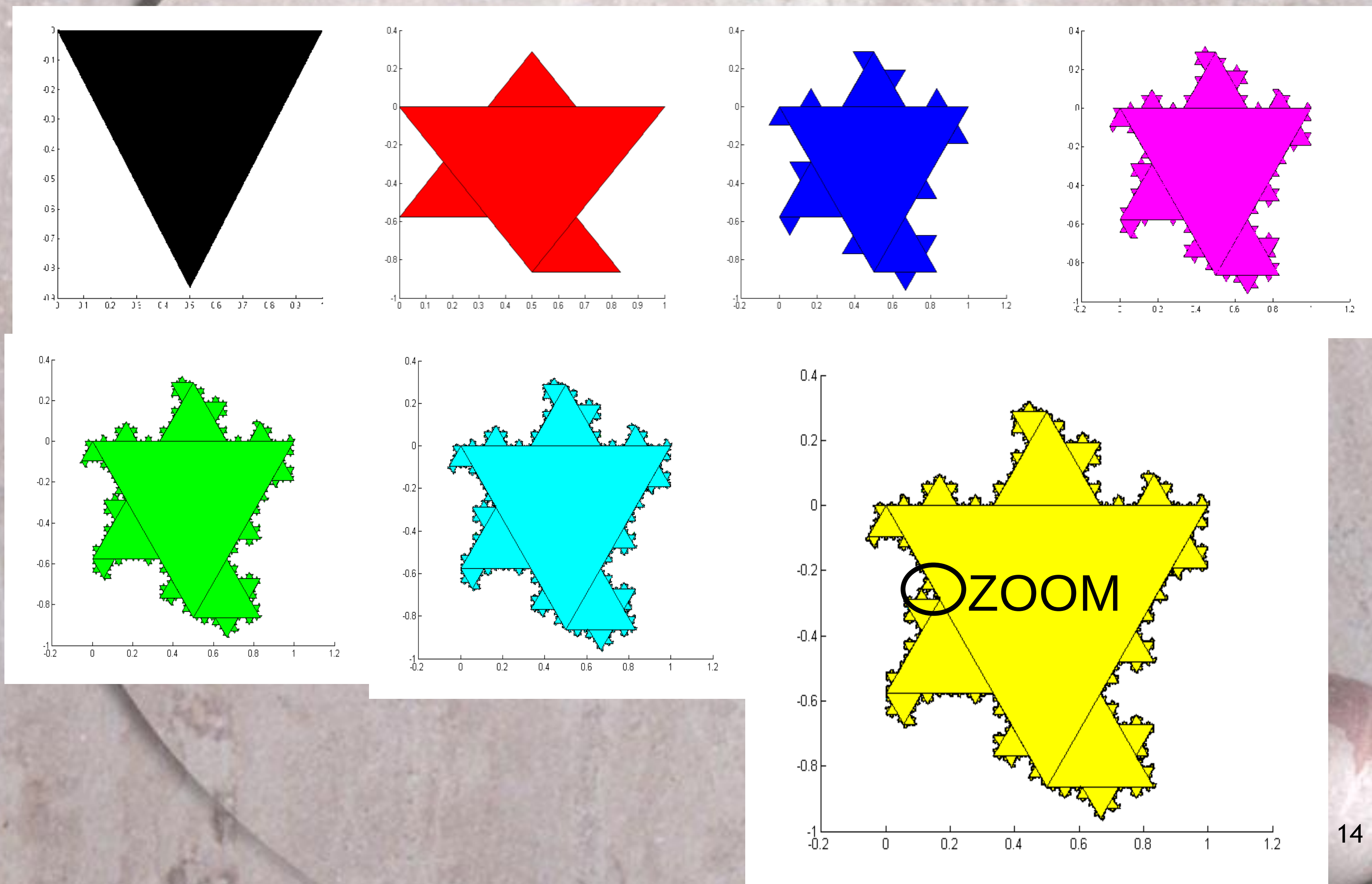
$$4\,(1/3)^s = 1 \quad \Rightarrow s = D = \log_3 4 \approx 1{,}2619 > 1$$



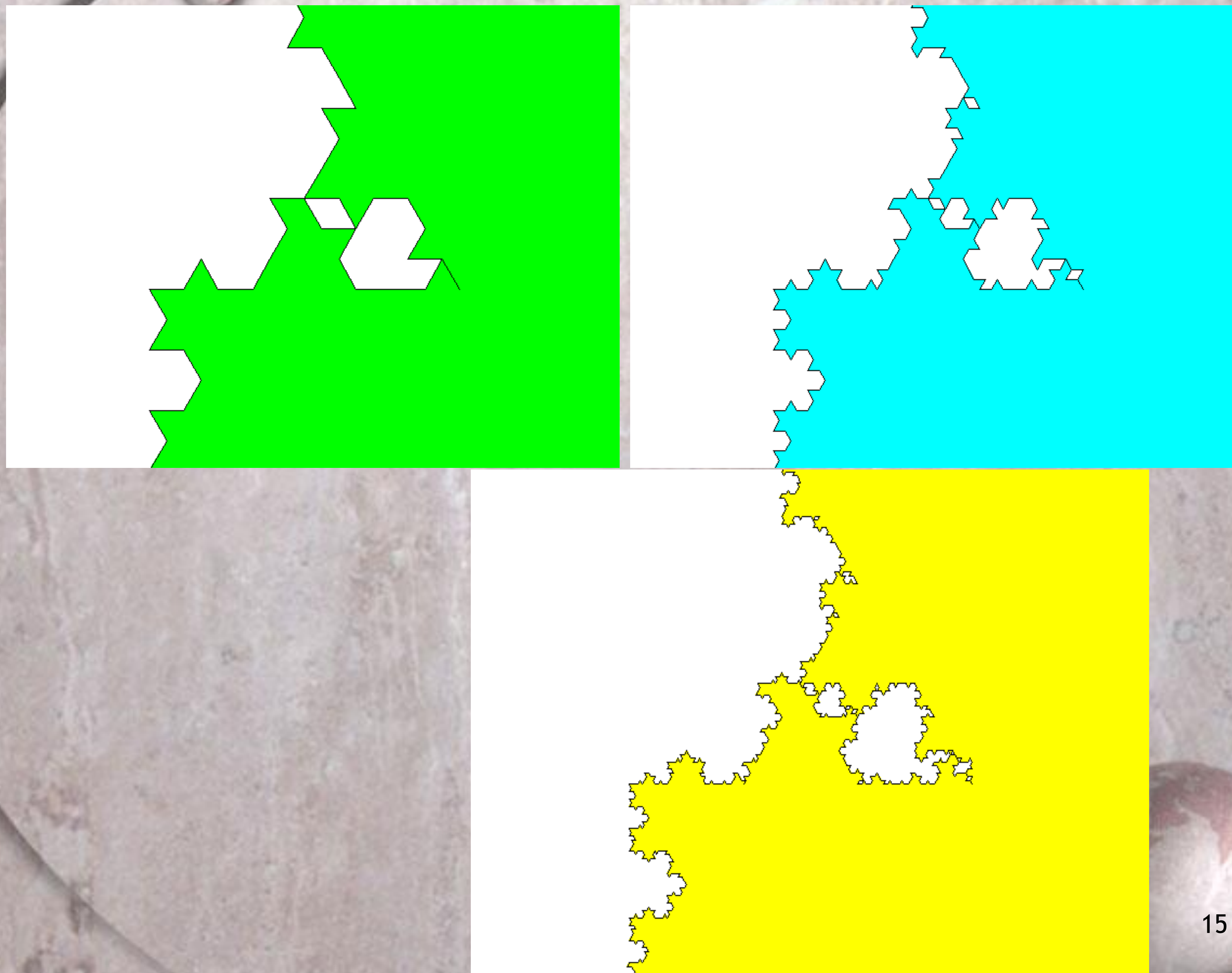


Périmètre = $3 \times 4^n/3^n$

Animation flocon de Koch



Zoom flocon de Koch

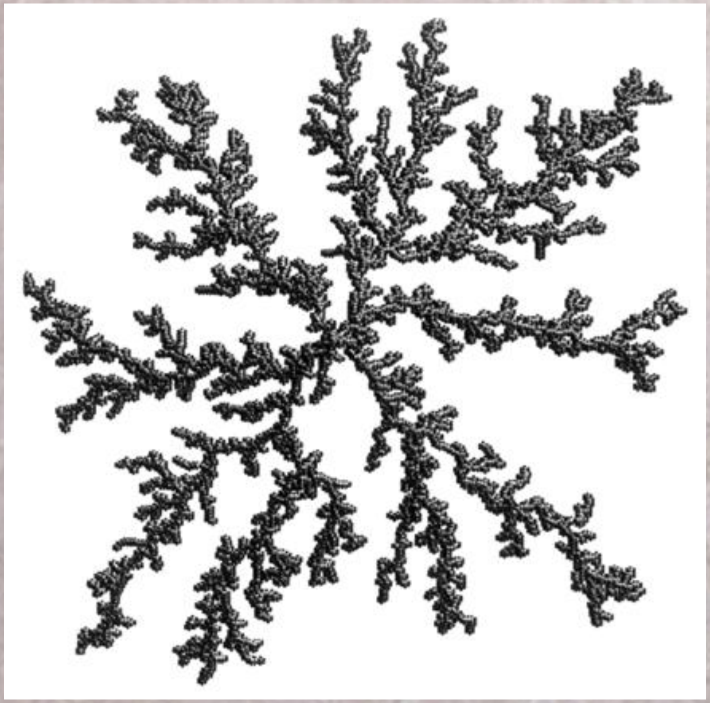


colloïdes d’or

agrégation rapide de particules

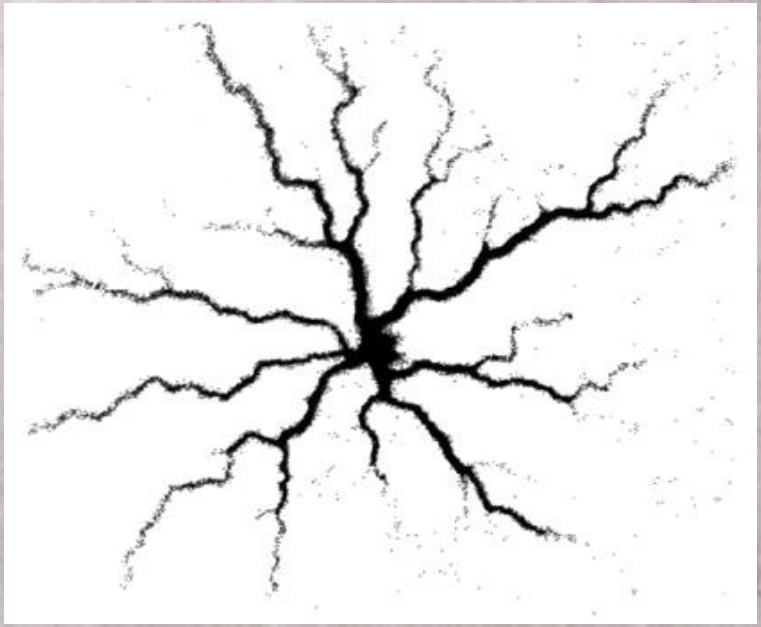
autour d'un germe

agrégat de particules



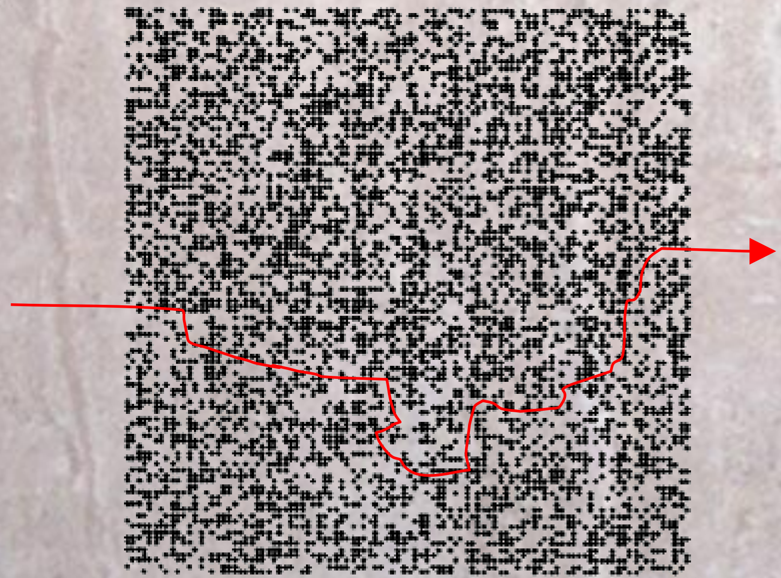
D_f=1,7   (d=2)

Claquage électrique

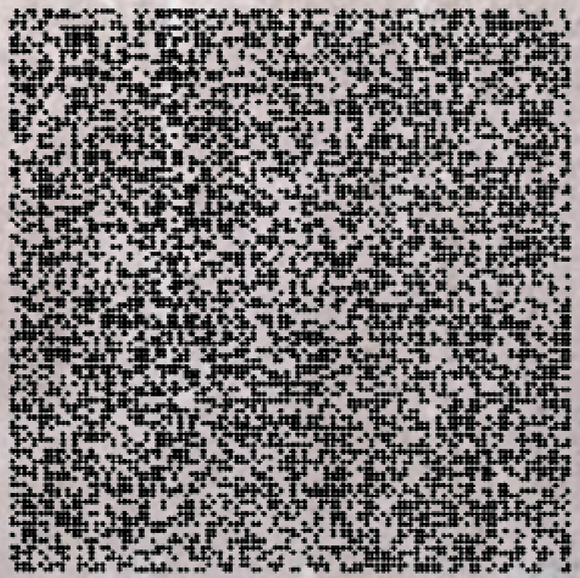


percolation

Remplissage (carré, cube) avec probabilité p



en dessous du seuil
amas isolés
D_f =2 en 3D
D_f=1,6 en 2D



juste au seuil
amas compacts
D_f=2,3 en 3D
D_f=1,9 en 2D

Encore des fractales

- Tout n'est pas fractal !

  Q nombre rationnels : D=0 et Q dense dans R !
- R nombres réels avec décimales paires

  $D_f = \log 5 / \log 10 \approx 0{,}69897$
- Pseudo-fractales, autosimilarité variable, …
- Exemples :

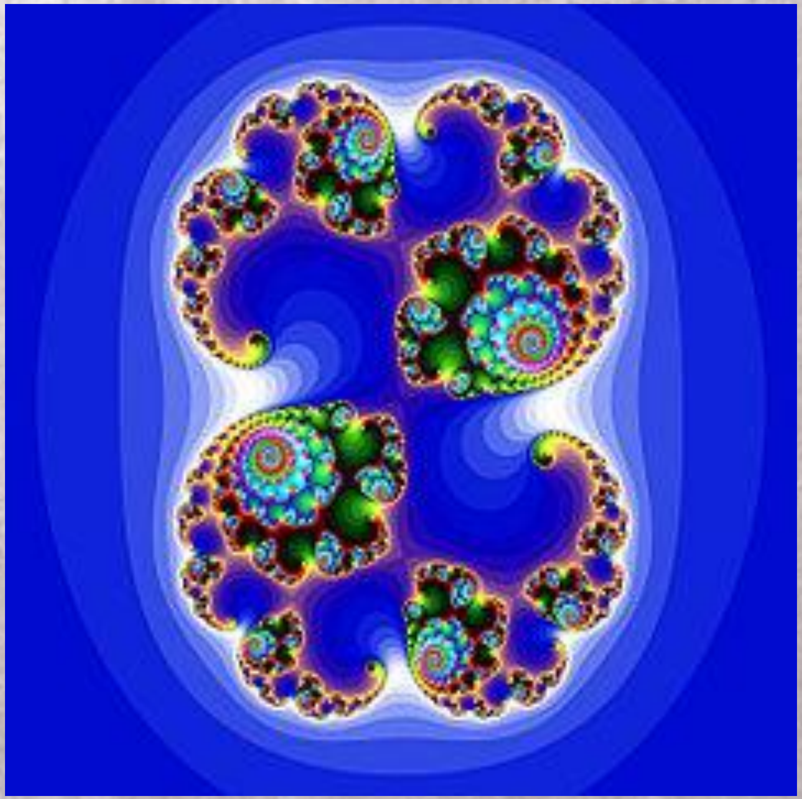
  chou romanesco : D_f=2,66

  Mouvement Brownien : ligne brisée

  et pourtant en 3D , D_f=2 ! presque sûrement

Images

Fougères



Julia