Solution d’un problème posé par Martin Gardner en 1976.

Mais qui résoudra son autre problème posé en 1996 ?

Christian Boyer

G4G, Paris, 21 octobre 2010

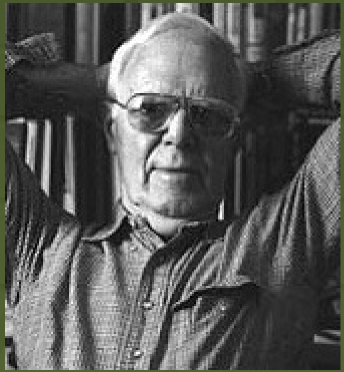
Problème du
plus petit cube magique parfait

- "Is there a perfect magic cube of order 5? No one knows."

Martin Gardner

Scientific American (1976)

Time Travel and Other Mathematical Bewilderments (1988)



(ici en 1988)

Ordres 1 et 2

- Réglons une fois pour toute le sort de ces deux ordres à la fois pour les carrés et les cubes magiques

- Ordre 1
  - « je suis magique… mais stupide… »

1

- Ordre 2
  - « je suis un vilain copieur »
    si a + b = S
    et si a + c = S,
    … alors b = c…

a	b
c	d

Cube magique d'ordre 3

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

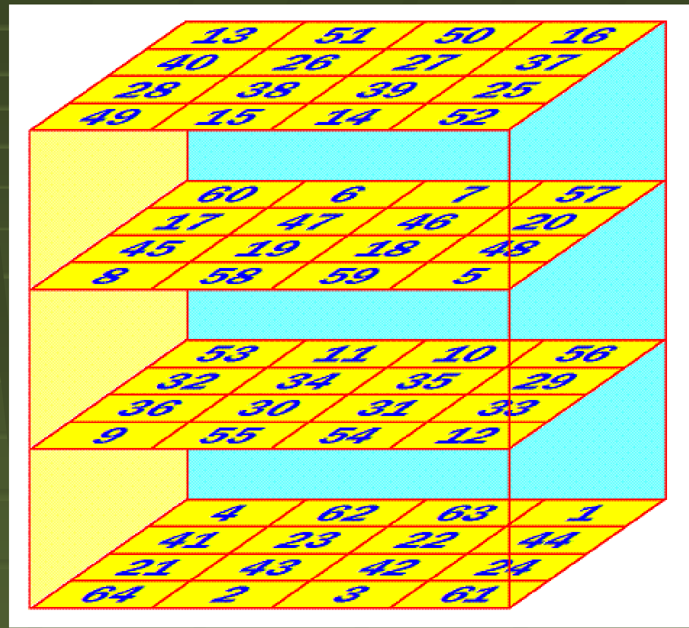
- Il existe un seul carré magique d'ordre 3
- Mais il existe quatre cubes magiques d'ordre 3 (aux rotations et symétries près)

1	17	24	2	18	22	10	26	6	12	26	4
15	19	8	24	1	17	24	1	17	23	1	18
26	6	10	16	23	3	8	15	19	7	15	20
23	3	16	15	19	8	23	3	16	22	3	17
7	**14**	21	7	**14**	21	7	**14**	21	9	**14**	19
12	25	5	20	9	13	12	25	5	11	25	6
18	22	2	25	5	12	9	13	20	8	13	21
20	9	13	11	27	4	11	27	4	10	27	5
4	11	27	6	10	26	22	2	18	24	2	16

- Même somme pour les n² lignes, n² colonnes, n² piles et 4 grandes diagonales
  - $S = n(n^3 + 1) / 2$ pour l'ordre 3 : 31 alignements avec $S = 3(3^3 + 1) / 2 = 42$
- Mais les petites diagonales ne donnent pas toutes la bonne somme
  - Exemple premier cube : $1 + 19 + 10 = 30 \neq 42$
- Un cube est dit « parfait » s'il a en plus <u>toutes</u> ses diagonales magiques
  - ($3n^2$ <u>+ 6n</u> + 4) alignements doivent donc donner la même somme S
- Aucun des quatre cubes magiques existants d'ordre 3 n'est parfait
  - Un cube magique parfait d'ordre 3 est donc impossible

Cube magique d'ordre 4

- 1640, Fermat envoie à Mersenne ce cube



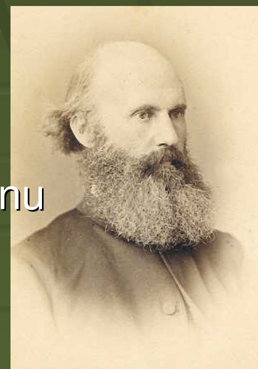
- Il annonce à Mersenne 72 alignements magiques
  - Mais son cube n'en a réellement que 64. C'est quand même excellent, puisque meilleur que les $3n^2 + 4 = 52$ alignements demandés pour un cube magique
- Un cube magique parfait d'ordre 4 sera ensuite prouvé impossible
  - Richard Schroeppel prouve mathématiquement en 1972 qu'il est impossible que les $3n^2 + 6n + 4 = 76$ alignements soient magiques

Histoire des cubes magiques parfaits

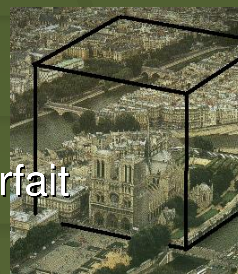
3	Impossible	
4	Impossible, Schroeppel	1972
5	Pb de Martin Gardner	?
6	Walter Trump	sept. 2003
7	Révérend A.H. Frost	1866
8	Gustavus Frankenstein	1875
…	*(nombreux autres)*	XIXe-XXe
8192	Christian Boyer	début 2003

Presque parfait, par Fermat, 1640

Schroeppel: si solution, centre=63



Premier parfait connu



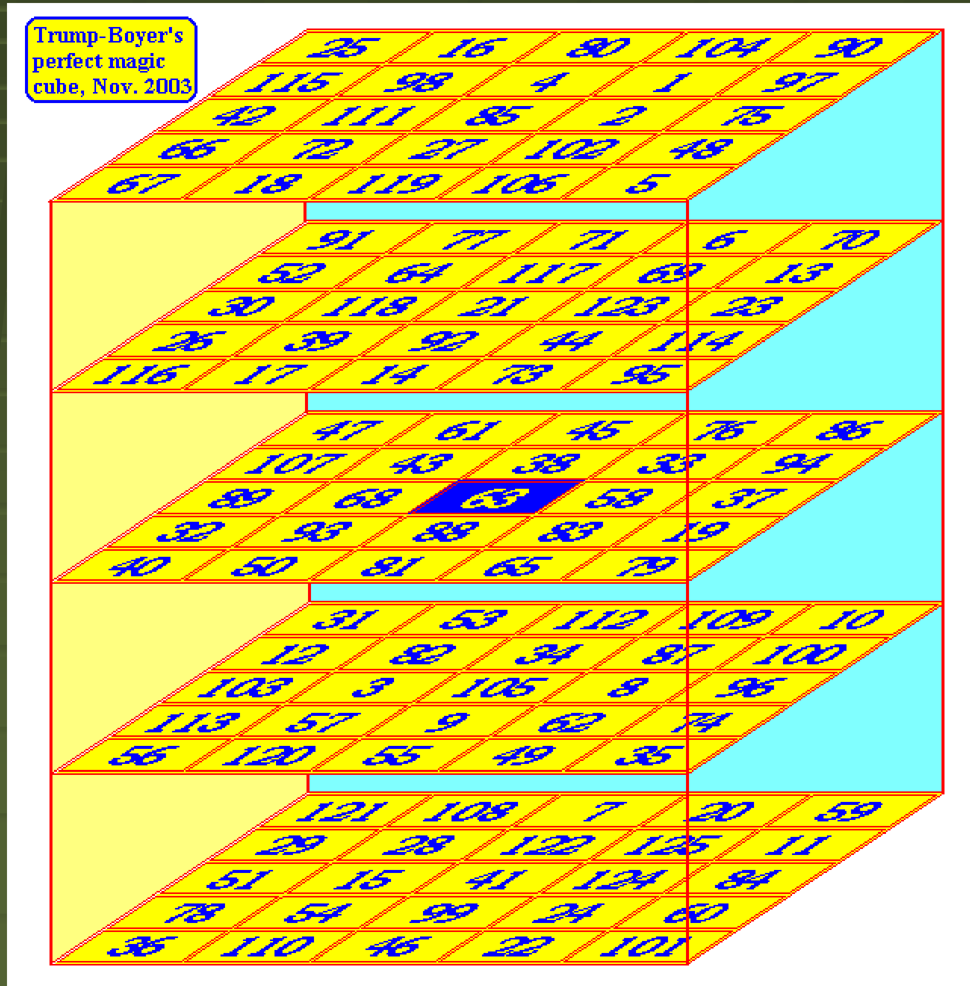
Cube tétramagique parfait

POUR LA SCIENCE

Le plus petit cube magique parfait

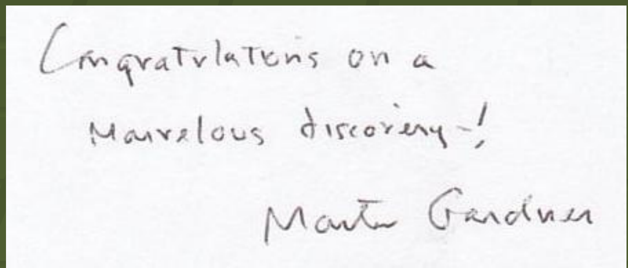
- La réponse au problème de Gardner est « Yes » !
- Cube trouvé en nov. 2003, avec Walter Trump

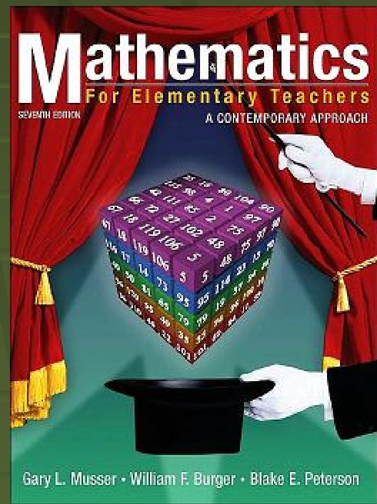
- Tous les entiers de 1 à 125 (= 5^3)
- Son centre est 63
- Ses 109 alignements ont la même somme égale à 315 :
  - 25 lignes
  - 25 colonnes
  - 25 piles
  - 4 grandes diagonales
  - 30 petites diagonales



Nombreuses retombées

- Article signé dans *La Recherche*
- Grandes satisfactions
  - Annonce par Eric Weisstein, *MathWorld Headline News*
  - Beaux articles dans *Le Figaro*, *Le Point*, …
  - Couverture d'un livre mathématique américain
  - Lettre sympathique de Martin Gardner


Congratulations on a
marvelous discovery—!
Martin Gardner



- Mais un curieux mélange de joie et d'amertume avec
  - La une du *Monde*… qui titre :
    - « Une découverte mathématique qui ne sert à rien »

Problème du carré de carrés

- “Martin LaBar, in *The College Mathematics Journal*, January 1984, asked if a 3x3 magic square exists with nine distinct square numbers. (…) Neither such a square nor a proof of impossibility has been found. (…) I here offer $100 to the first person to construct such a square.”

a^2	b^2	c^2
d^2	e^2	f^2
g^2	h^2	i^2

Martin Gardner
Quantum (1996)

Carrés de carrés

?

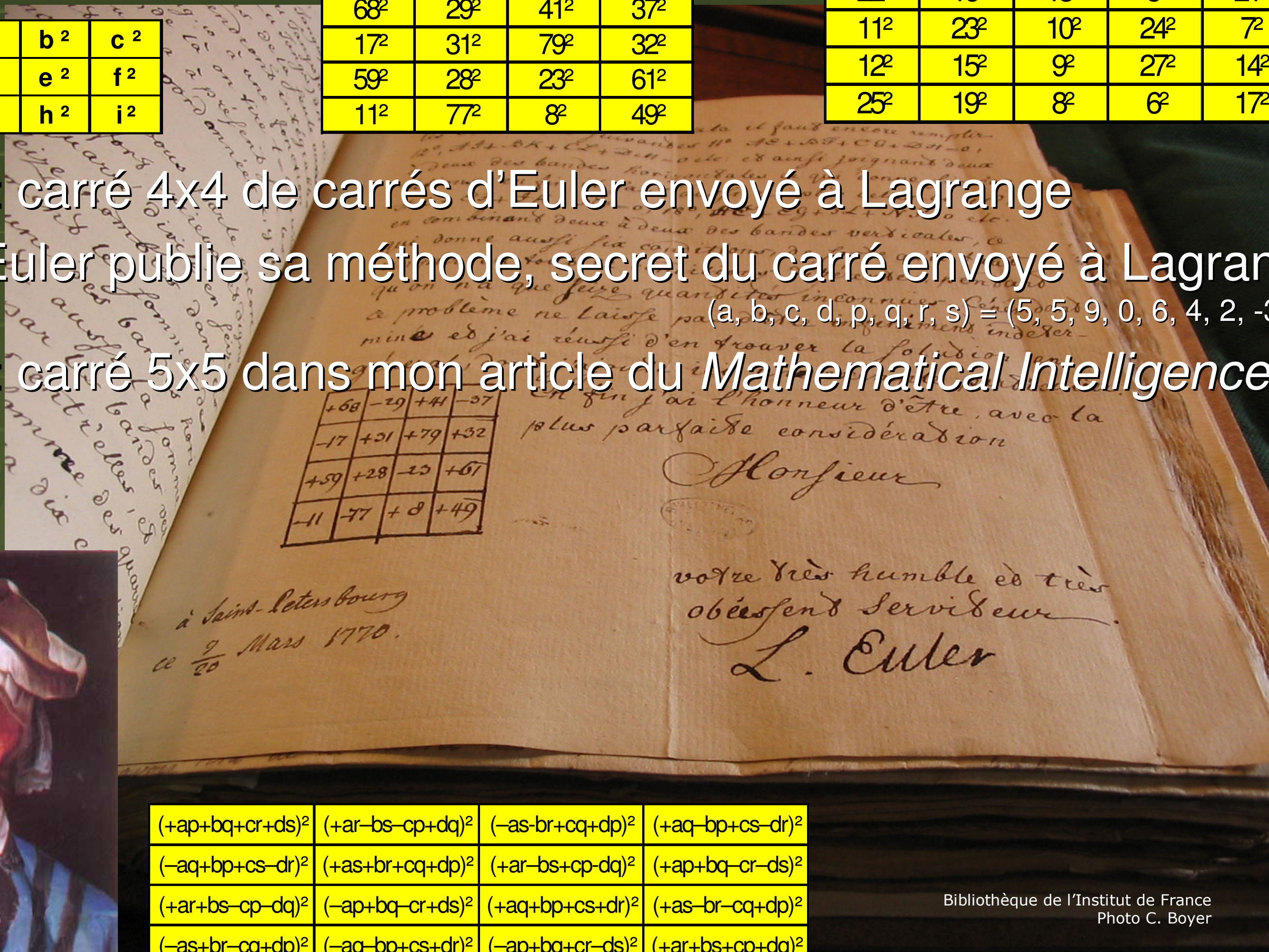
a^2	b^2	c^2
d^2	e^2	f^2
g^2	h^2	i^2

68^2	29^2	41^2	37^2
17^2	31^2	79^2	32^2
59^2	28^2	23^2	61^2
11^2	77^2	8^2	49^2

1^2	2^2	31^2	3^2	20^2
22^2	16^2	13^2	5^2	21^2
11^2	23^2	10^2	24^2	7^2
12^2	15^2	9^2	27^2	14^2
25^2	19^2	8^2	6^2	17^2

- 1770 : carré 4x4 de carrés d'Euler envoyé à Lagrange
- Puis Euler publie sa méthode, secret du carré envoyé à Lagrange

  (a, b, c, d, p, q, r, s) = (5, 5, 9, 0, 6, 4, 2, -3)
- 2005 : carré 5x5 dans mon article du *Mathematical Intelligencer*



Bibliothèque de l'Institut de France
Photo C. Boyer

$(+ap+bq+cr+ds)^2$	$(+ar-bs-cp+dq)^2$	$(-as-br+cq+dp)^2$	$(+aq-bp+cs-dr)^2$
$(-aq+bp+cs-dr)^2$	$(+as+br+cq+dp)^2$	$(+ar-bs+cp-dq)^2$	$(+ap+bq-cr-ds)^2$
$(+ar+bs-cp-dq)^2$	$(-ap+bq-cr+ds)^2$	$(+aq+bp+cs+dr)^2$	$(+as-br-cq+dp)^2$
$(-as+br-cq+dp)^2$	$(-aq-bp+cs+dr)^2$	$(-ap+bq+cr-ds)^2$	$(+ar+bs+cp+dq)^2$

Solution 3x3 proche avec 9 carrés

127^2	46^2	58^2
2^2	113^2	94^2
74^2	82^2	97^2

- Obtenu par informatique, et indépendamment
  - 1996 : Lee Sallows, Université de Nijmegen, Pays-Bas
  - 1996 : Michaël Schweitzer, Göttingen, Allemagne
- OK pour les 9 entiers carrés,
  mais… 7 sommes correctes sur 8
  - S2 = 21609 pour 3 lignes, 3 colonnes, 1 diagonale
    (tiens, épatant, cette somme est aussi un carré = 147^2, pourquoi ?)
  - Hélas S2 = 38307 pour l'autre diagonale
- Beaucoup d'autres solutions connues avec 7 sommes correctes

Edouard Lucas a été le premier à proposer le problème 3x3

- En 1876, dans la rarissime revue *Nouvelle Correspondance Mathématique* du mathématicien belge Eugène Catalan
- Donc plus d'un siècle avant Martin LaBar à qui Martin Gardner attribuait le problème
- Solution paramétrique d'un carré semi-magique
  - **6** sommes correctes S2 = $(p^2+q^2+r^2+s^2)^2$

$(p^2 + q^2 - r^2 - s^2)^2$	$[2(qr + ps)]^2$	$[2(qs - pr)]^2$
$[2(qr - ps)]^2$	$(p^2 - q^2 + r^2 - s^2)^2$	$[2(rs + pq)]^2$
$[2(qs + pr)]^2$	$[2(rs - pq)]^2$	$(p^2 - q^2 - r^2 + s^2)^2$

Plus petits carrés possibles avec la méthode de Lucas

- **6** sommes (3 lignes, 3 colonnes)
  - (p, q, r, s) = (1, 2, 4, 6)
  - $S2 = (1^2+2^2+4^2+6^2)^2 = 57^2$

47^2	28^2	16^2
4^2	23^2	52^2
32^2	44^2	17^2

- **8** sommes, Lucas prouve mathématiquement que sa méthode ne permet pas un carré entièrement magique
- **7** sommes (3 lignes, 3 colonnes, et 1 diagonale)
  Lucas n'avait pas vu que sa méthode le permettait
  - (p, q, r, s) = (1, 3, 4, 11), on retrouve exactement le carré de Sallows et Schweitzer !

127^2	46^2	58^2
2^2	113^2	94^2
74^2	82^2	97^2

  - Et cela explique pourquoi S2 y était un carré
    $S2 = (1^2+3^2+4^2+11^2)^2 = 147^2$

Solution proche avec 8 sommes

373^2	289^2	565^2
360721	425^2	23^2
205^2	527^2	222121

- Obtenu par informatique, et indépendamment
  - 1997 : Lee Sallows, Université de Nijmegen, Pays-Bas
  - 1997 : Andrew Bremner, Arizona State University, USA
- OK pour les 8 sommes (3 lignes, 3 colonnes, 2 diagonales), mais… 7 entiers carrés sur 9
  - $S2 = 3 \cdot \text{centre} = 3 \cdot 425^2 = 541875$
- Seule solution connue de ce type

Le problème reste ouvert

- Martin Gardner proposait 100$ pour un carré magique 3x3 utilisant 9 entiers carrés distincts

- Je propose « travailler moins pour gagner plus » !
  - 1000€ + une bouteille de champagne pour un carré magique 3x3 utilisant au moins 7 entiers carrés distincts
    (différent du seul exemple connu, et de ses rotations, symétries et multiples k^2)

- C'est une de mes 12 énigmes annoncées en 2010 totalisant 8000€

- A suivre dans www.multimagie.com