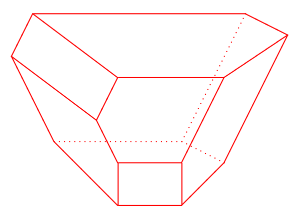
# COMMENT J'AI TROUVÉ L'ASSOCIAÈDRE

JEAN-LOUIS LODAY

## Introduction

La petite histoire de comment j'ai trouvé l'algorithme simple pour construire l'associaèdre de Stasheff. Ou comment TeX peut influer sur la recherche mathématique. Avec en prime une gravure d'Albrecht Dürer.

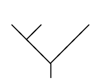
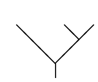


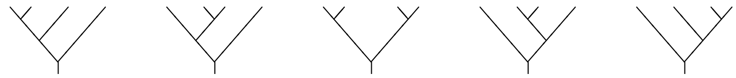
## 1. Construction de l'associaèdre

L'associaèdre de Stasheff [5] est un complexe cellulaire qui peut se réaliser comme un polytope convexe. Jusqu'en 2002 on ne connaissait que des manières très compliquées de le construire. En 2002 j'ai trouvé l'algorithme très simple suivant, publié dans [3]. Les sommets de cet associaèdre sont en bijection avec les arbres binaires planaires enracinés (comptés par les nombres de Catalan). J'associe à tout arbre binaire planaire enraciné $t$ à $n$ sommets internes (donc à $n+1$ feuilles) un point $M(t)$ de $\mathbb{R}^n$ de la manière suivante. Tout arbre $t$ est le greffé de deux autres arbres analogues $t = t^l \vee t^r$, ayant respectivement $p$ et $q$ sommets internes ($p+1+q=n$). Les coordonnées du point $M(t)$ s'obtiennent alors à partir de celles de $t^l$ et $t^r$ de la façon suivante:

$$M(t) = (M(t^l), pq, M(t^r)).$$

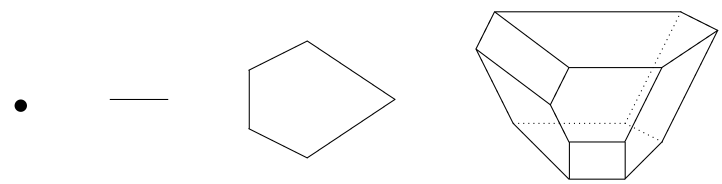
On démarre cette récurrence avec $M(|) = \emptyset$. On voit tout de suite que $M($  $) = (M[|), 0+1+0, M(|)) = (\emptyset, 1, \emptyset) = (1) \in \mathbb{R}$. Puis on obtient

$M\Big($  $\Big) = (1,2)$ , $M\Big($  $\Big) = (2,1),$

$t \quad =$ 

$M(t) \quad = \quad (1,2,3) \qquad (2,1,3) \qquad (1,3,1) \qquad (3,1,2) \qquad (3,2,1)$

Le premier lemme consiste à montrer que la somme des coordonnées de $M(t)$ vaut $\frac{n(n+1)}{2}$. Donc tous les points $M(t)$, pour $t$ parcourant les arbres à $n$ sommets internes, sont dans un même hyperplan. L'associaèdre de Stasheff est l'enveloppe convexe de ces points. C'est un polytope convexe de dimension $n-1$.

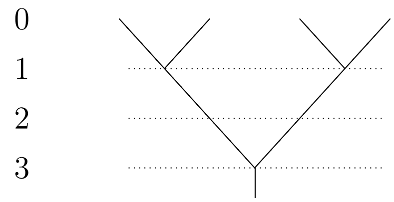


$\mathcal{K}^0 \qquad \mathcal{K}^1 \qquad \mathcal{K}^2 \qquad \mathcal{K}^3$

## 2. Comment je l'ai trouvé

En 2002 je me trouvais à Northwestern University (banlieue nord de Chicago) pour quelques mois, et j'avais été invité par Peter May pour donner un exposé dans son séminaire à University of Chicago. Durant mon exposé j'ai eu à mentionner le polytope de Stasheff. Un auditeur (je crois me rappeler que c'était Beilinson) m'a demandé comment je le construisais. J'ai commencé à faire des dessins, mais il voulait la construction pour tout $n$. Je me suis mis à bafouiller et n'ai pas réussi à répondre correctement. Très remonté contre moi-même de ne pas avoir été à la hauteur, je me suis mis à chercher comment faire, une fois rentré dans mon bureau à NWU. Et c'est sur ce tableau que j'ai trouvé la bonne formule.

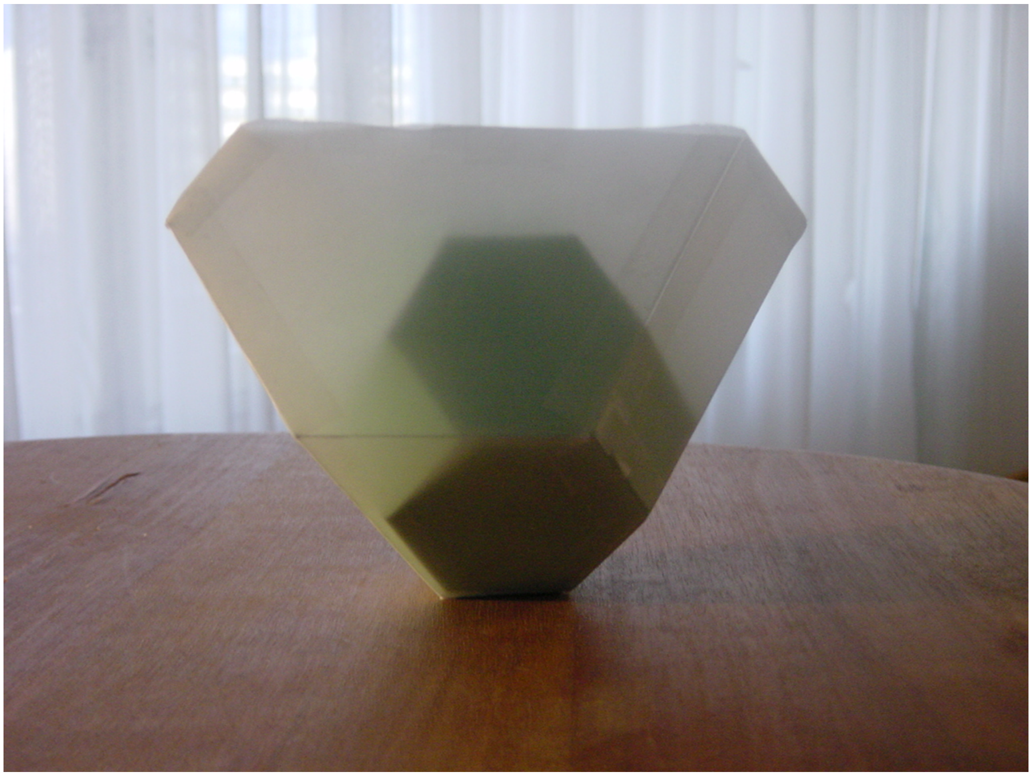
En fait, cette idée n'est pas venue par hasard. Je travaillais à cette époque là sur les algèbres dendriformes,cf. [1, 2]. L'algèbre dendriforme libre sur un générateur a pour base les arbres binaires planaires enracinés. J'avais un problème de rédaction qui était de donner des noms aux arbres pour pouvoir en parler sans avoir à les dessiner à chaque fois, mais surtout pour avoir un codage de macros en TeX. J'ai commencé par coder en utilisant la profondeur à laquelle se trouvent les sommets internes apparaissant dans l'arbre lorsqu'on le construit avec des écartements réguliers des feuilles. Par exemple:




donne le codage $(1, 3, 1)$ pour cet arbre. J'ai remarqué assez vite que ce codage a la propriété suivante. En supposant que les codages de $t^l$ et $t^r$ sont connus, le codage de $t = t^l \vee t^r$ est $c(T) = (c(t^l), n, c(t^r))$. En fait j'utilisais (et utilise toujours) ce codage pour taper en TeX et remplacant 1 par A, 2 par B, etc. C'était très pratique. J'ai eu l'idée d'interpréter ce codage comme un point de $\mathbb{R}^n$. Mais il avait l'inconvénient suivant. Dans le cas $n = 2$, l'une des coordonnées de l'un des cinq arbres n'était pas bonne. En effet pour l'arbre ci-dessus, codé `\ACA`, on a vu que le codage donne $(1, 3, 1)$. La deuxième coordonnée, égale à 3, n'est pas bonne il faudrait mettre 4 pour que ce point soit dans le même hyperplan (d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 6$) que ses petits camarades. C'est alors que j'ai remarqué la relation $n = p + q + 1$ et que, si je remplaçais la somme par le produit, tout se passait bien. La suite était facile à démontrer.

## 3. Le permutoèdre

A la fin de mon séjour à NWU il y eut une conférence à laquelle vint assister Samson Saneblidze qui travaillait aussi sur l'associaèdre. Il m'indiqua alors le résultat de Stasheff et Shnider [4] qui réussissaient à le construire grâce à des hyperplans, plus exactement des intersections de demi-espaces. Donc j'ai regardé un peu plus attentivement les hyperplans qui sortaient naturellement de ma construction. Et là, surprise totale, je découvre que tous ces hyperplans font partie de la famille des hyperplans qui permettent de construire le permutoèdre. Rappelons que l'associaèdre est l'enveloppe convexe des points dont les coordonnées sont données par les permutations de $(1, 2, \ldots, n)$. Commepour l'associaèdre ces points appartiennent à un même hyperplan et on obtient un polytope convexe de dimension $n-1$. . Une conséquence immédiate est que le permutoèdre peut-être obtenu en coupant mon associaèdre par un certain nombre d'hyperplans.



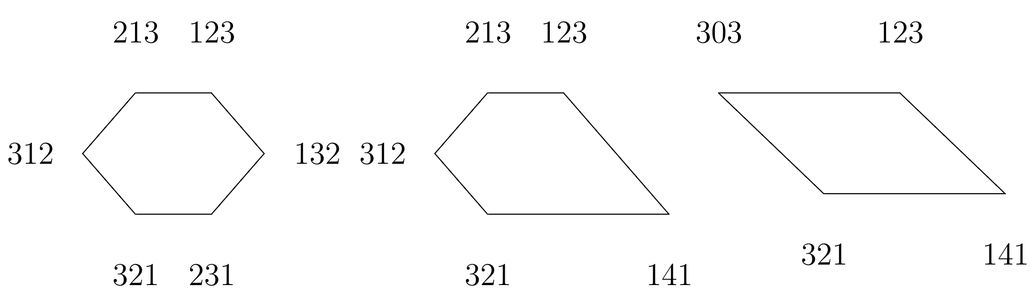
L'emboitement $\mathcal{P}^3 \subset \mathcal{K}^3$

En fait l'associaèdre lui-même peut-être aussi obtenu par troncature d'un rhomboèdre (transformé affine d'un cube) par un certain nombre d'hyperplans. Les coordonnées de ce rhomboèdre sont

$$(1, 2, \ldots, n) + \sum_{i=1}^{n-1} +\epsilon_i(0, \ldots, 0, i(n-i), -i(n-i), 0, \ldots, 0),$$

où les coordonnées non nulles sont en place $i$ et $i+1$, pour le point correspondant au sommet du cube $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n-1})$.

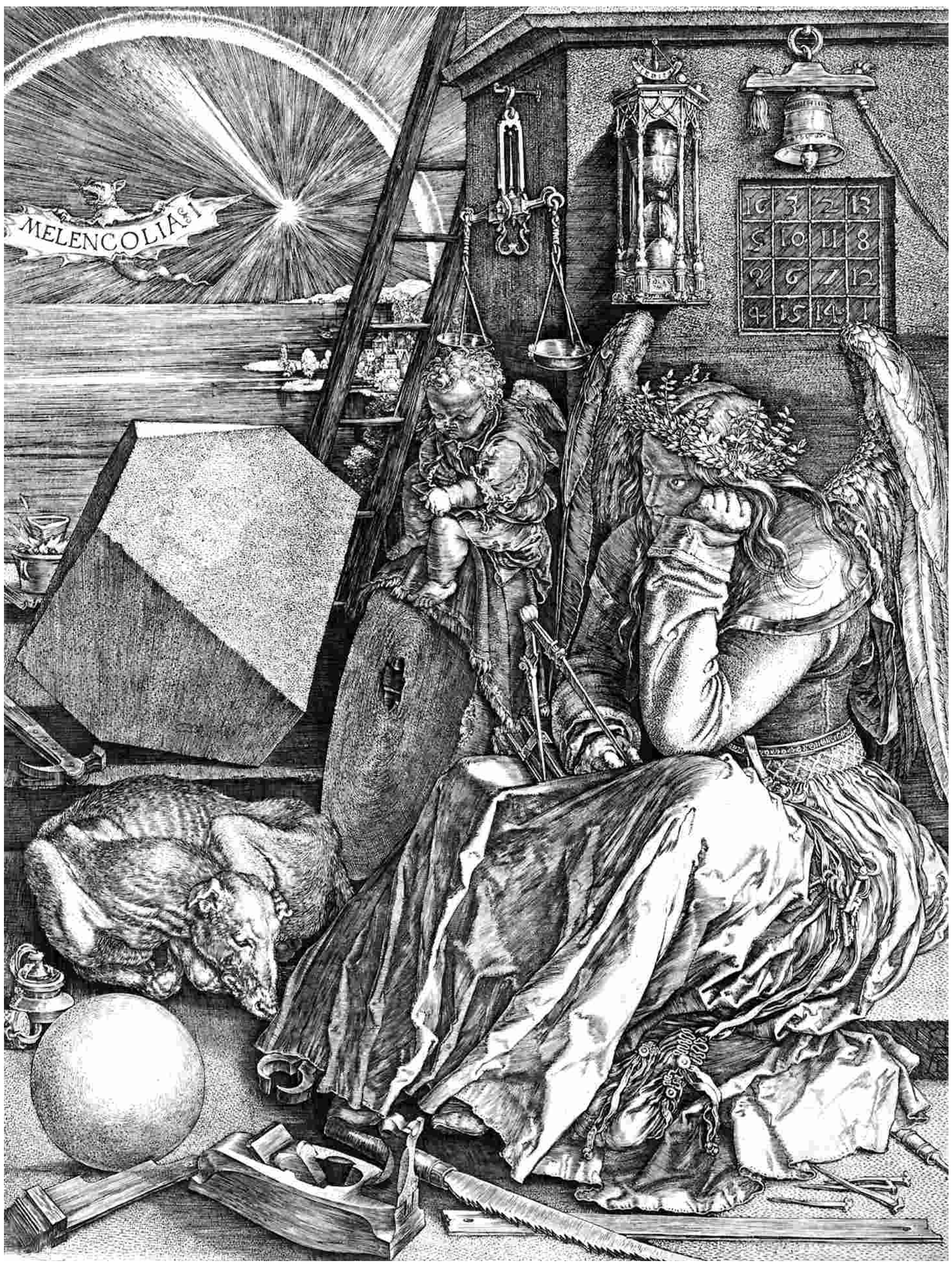
On a donc un emboitement $\mathcal{P}^n \subset \mathcal{K}^n \subset \mathcal{Q}^n$. Soit pour $n = 2$:




$\mathcal{P}^2 \quad \subset \quad \mathcal{K}^2 \quad \subset \quad \mathcal{Q}^2$

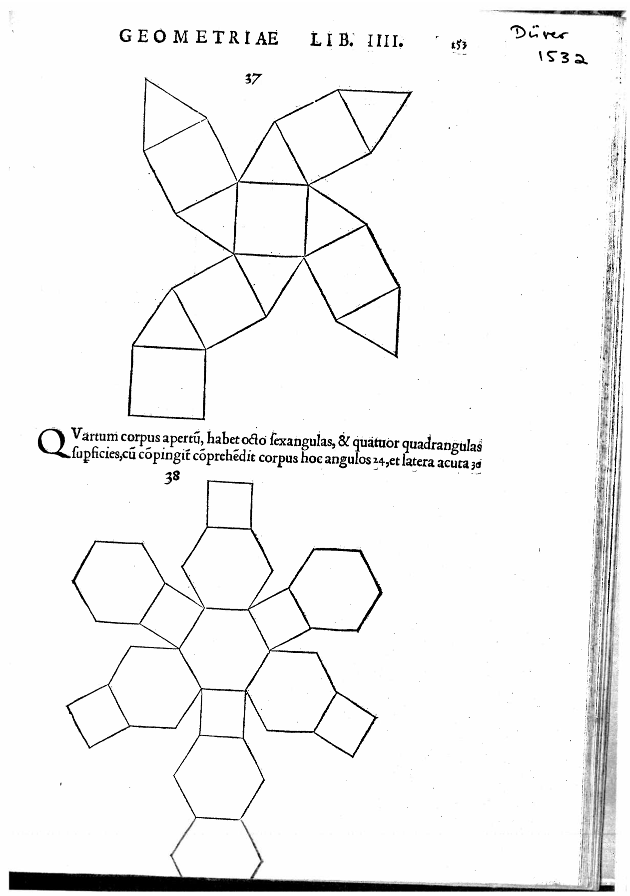
## 4. Quand Dürer s'invite

Quelques temps plus tard, en visitant l'exposition "Mélancolie" au Petit Palais (Paris) je tombe sur une reproduction de la gravure de Dürer intitulée "Melencolia I". Ce fut un choc, car j'y vis immédiatement l'associaèdre ! Incroyable, dans une oeuvre de 1514.



En fait en y regardant de plus près, ce n'est pas l'associaèdre car son polyèdre possède un triangle parmi ses faces. J'avais été induit en erreur par le pentagone, au premier plan, qui a la même forme que celui qui arrive dans ma version de l'associaèdre.

Plusieurs historiens se sont penchés sur la question de savoir comment était construit le polyèdre de Dürer, voir par exemple P. Schreiber [6]. Mon interprétation est la suivante: il est obtenu à partir du rhomboèdre décrit ci-dessus en tronquant par deux hyperplans parallèlles près des sommets extrêmes (de coordonnées dans $\mathbb{R}^4$ égales à $(4,-1,3,4)$ et $(1,6,2,1)$ respectivement). Cette troncature donne un polytope (enfin, un polyèdre car on est en dimension 3) qui a deux triangles et 6 pentagones (exercice: faites le test d'Euler-Poincaré). Pour étayer cette interprétation il faut savoir que Dürer connaissait bien le permutoèdre (et donc très certain le rhomboèdre qui le circonscrit). Dans "???Geometriae" publié en 1532 (et dont un exemplaire se trouve à la bibliotèque de maths de Strasbourg) on trouve un patron du permutoèdre (figure 38) :



## References

[1] *J.-L. Loday*, Algèbres ayant deux opérations associatives (digèbres). C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 321 (1995), no. 2, 141–146.

[2] *J.-L. Loday*, Dialgebras, in "Dialgebras and related operads", Springer Lecture Notes in Math. 1763 (2001), 7-66.

[3] *J.-L. Loday*, Realization of the Stasheff polytope. Arch. Math. (Basel) 83 (2004), no. 3, 267–278.

[4] *J. Stasheff*, The pre-history of operads. Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995), 9–14, Contemp. Math., 202, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[5] *J.D. Stasheff*, Homotopy associativity of $H$-spaces. I, II. Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 275-292; ibid. 293–312.

[6] *P. Schreiber*, A new hypothesis on Dürer's enigmatic polyhedron in his copper engraving "Melencolia I". Historia Math. 26 (1999), no. 4, 369–377.