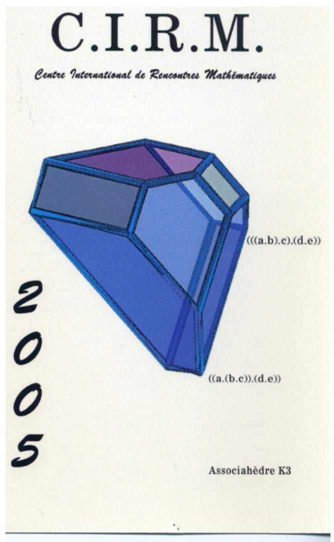
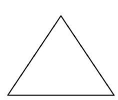
CARTE DE VOEUX À L'ASSOCIAEDRE

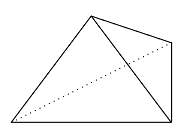
JEAN-LOUIS LODAY



Il y a cinq ans le Centre International de Rencontres Mathématiques de Luminy a envoyé ses voeux avec la carte ci-dessus. L'illustration choisie par Robert Coquereaux, directeur du CIRM à cette époque là, était tout à fait adaptée pour l'an 5 du nouveau millénaire puisque ce polytope comporte plusieurs pentagones parmi ses faces. Mais intéressons-nous d'abord à des polytopes plus simples comme le triangle et le tétraèdre :



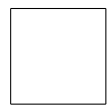
$\mathcal{T}^2$



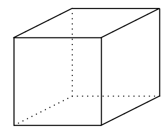
$\mathcal{T}^3$

Ils font partie d'une famille infinie de polytopes appellés les *simplexes standards.* En dimension n le n-simplexe Δ^n a $n+1$ sommets de coordonnées $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$. Ces points appartiennent à un même hyperplan et leur enveloppe convexe est Δ^n. : De même le carré et le cube

Date: December 20, 2009.



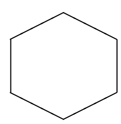
$\mathcal{Q}^2$



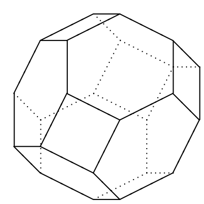
$\mathcal{Q}^3$

sont les deux premiers polytopes d'une famille infinie : les *hypercubes*. Les coordonnées des 2^n sommets de l'hypercube de dimension n sont données par $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ où x_i vaut 0 ou 1.

Si l'on part d'un hexagone, la famille infinie est moins connue, mais tout aussi facile à construire :



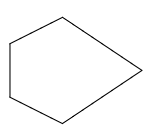
$\mathcal{P}^2$



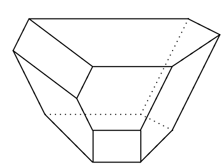
$\mathcal{P}^3$

Ce sont les *permutoèdres*. Il y a un sommet pour chaque permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$. En fait les coordonnées du point de $\mathbb{R}^n$ associé à une permutation sont justement données par la permutation de $(1, 2, \ldots, n)$. Ces points sont évidemment dans l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et leur enveloppe convexe est le permutoèdre $\mathcal{P}^{n-1}$ de dimension $n-1$. Le permutoèdre tri-dimensionnel ci-dessus était déjà connu d'Albrecht Dürer (1471–1528). Il est aussi connu en physique sous le nom de cellule de Birkhoff.

Mais quid du pentagone ? A-t-il un analogue en dimension 3 ? Appartient-il à une famile infinie ? Le polytope de la carte de voeux est précisément le polytope de dimension 3 qui permet de débuter une famille infinie :



$\mathcal{K}^2$



$\mathcal{K}^3$

C'est la famille des associaèdres. Leur histoire commence en 1962 lorsque Jim Stasheff, un mathématicien américain, construit pour tout entier n un complexe cellulaire qui lui permet de résoudre des problèmes importants de topologie algébrique. En 1979 on s'aperçoit que l'on peut construire ces espaces comme des polytopes, mais ce n'est qu'en 2002 qu'une construction explicite et simple apparait.

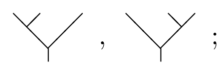
Il faut savoir que les sommets de l'associaèdre sont en bijection avec les parenthésages d'un mot à $n+1$ lettres. Par exemple pour $n = 2$ il y a deux parenthésages possibles :

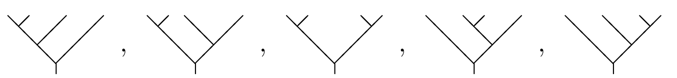
$$((xx)x) \quad \text{et} \quad (x(xx)).$$

Pour $n = 3$ il y en a cinq :

$$(((xx)x)x), \quad (((x(xx))x), \quad ((xx)(xx)), \quad (x((xx)x)), \quad (x(x(xx))).$$

Il est, dans notre cas, plus visuel de remplacer les parenthésages par des arbres binaires planaires enracinés (on dira simplement "arbre") :





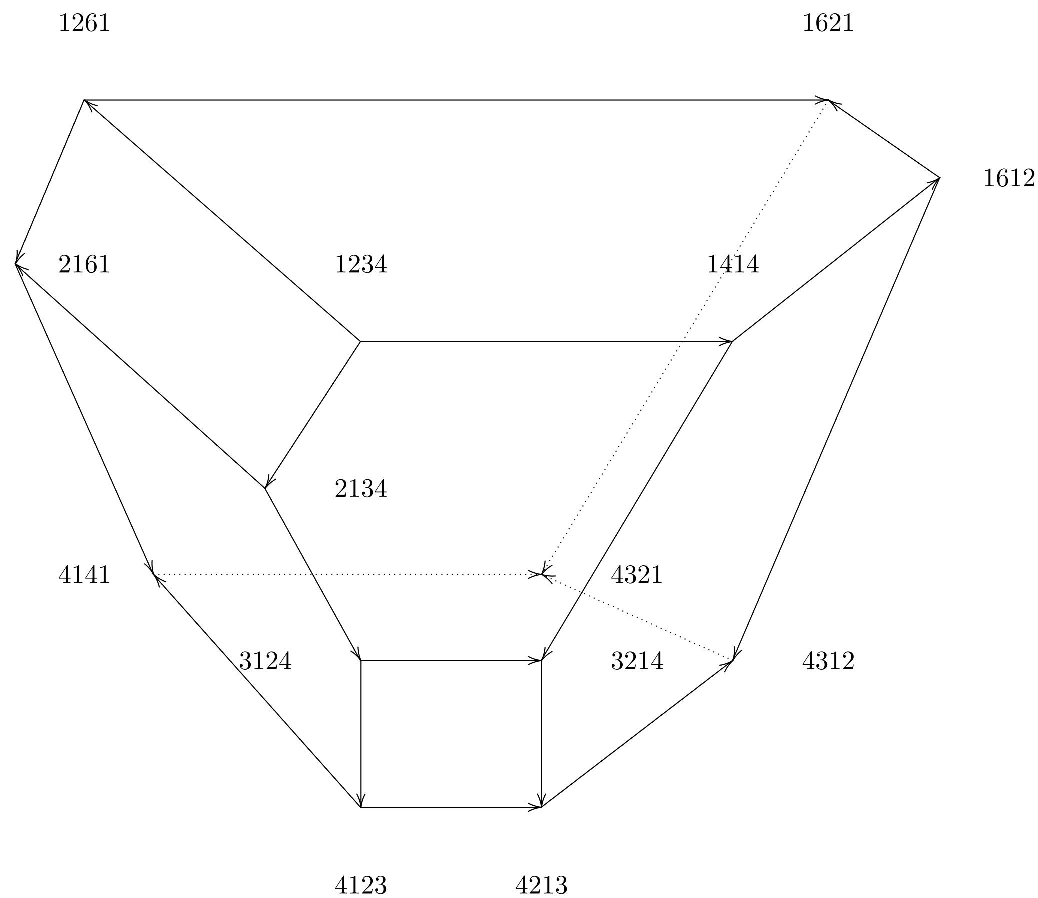
Pour construire l'associaèdre, on va associer à tout arbre t à n sommets internes (donc à $n+1$ feuilles), un point $M(t)$ de $\mathbb{R}^n$. Ses coordonnées explicites sont les suivantes :

$$M(t) := (a_1b_1, \ldots, a_nb_n)$$

où les entiers a_i et b_i sont déterminés comme suit. Tout d'abord on numérote les sommets internes de 1 à n (si vous laissez tomber une bille entre les feuilles i et $i+1$ elle arrive au sommet numéro i). Le sommet numéro i possède une branche de gauche et une branche de droite. Sur sa branche de gauche il y a a_i feuilles et sur sa branche de droite il y a b_i feuilles. Le produit a_ib_i est la i-ème coordonnées du point $M(t)$. Cet algorithme définit les entiers a_i et b_i et donc on a construit les points $M(t)$ pout tout arbre t. Lorsque t parcourt les arbres à $n+1$ feuilles on obtient ainsi $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ points de $\mathbb{R}^n$ (c'est le fameux nombre de Catalan). Bien que ce ne soit pas immédiatement perceptible, ces points appartiennent à un même hyperplan car la somme de leurs coordonnées est constante (démonstration facile par récurrence) :

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

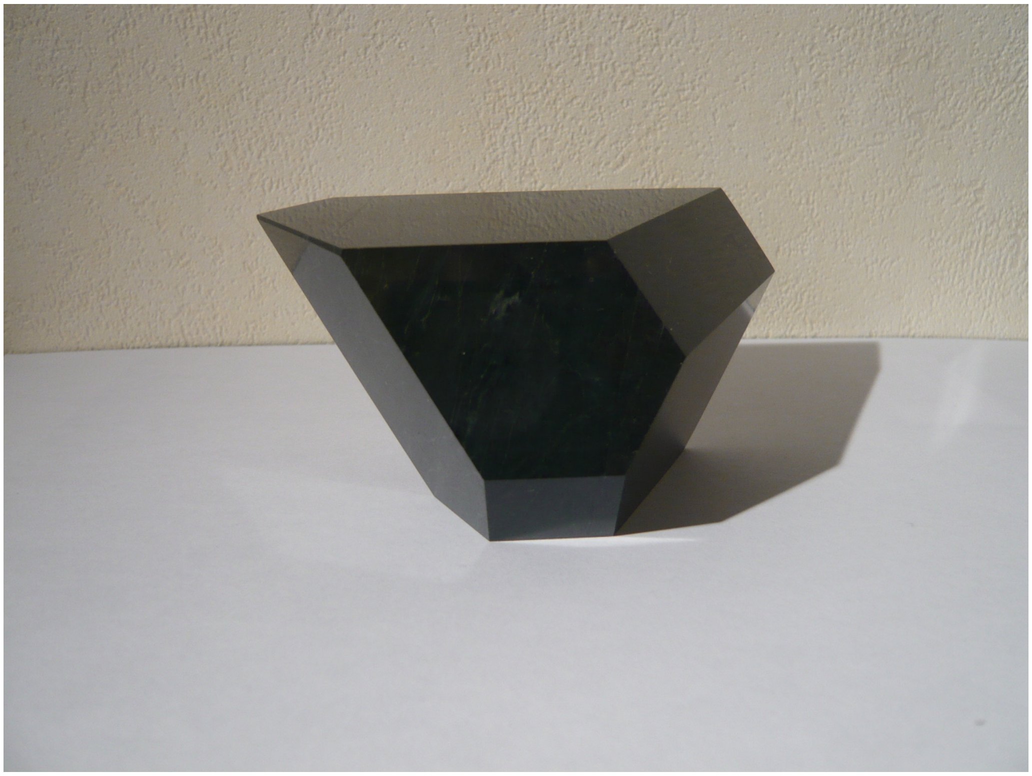
On démontre dans [J.-L. Loday, Realization of the Stasheff polytope. Arch. Math. (Basel) 83 (2004), no. 3, 267–278.] que l'enveloppe convexe des points $M(t)$ est le polytope de Stasheff $\mathcal{K}^{n-1}$ de dimension $n-1$, appelé aussi *associaèdre*. Voici $\mathcal{K}^3$ et ses coordonnées dans $\mathbb{R}^4$:



Regardé comme un ovni dans le monde mathématique lors de son apparition dans les années soixante, l'associaèdre est devenu un object incontournable dans de nombreux problèmes : espaces de lacets, algèbres à homotopie près, (A_∞-algèbres), algèbres amassées, groupes de Thompson, compactification d'espaces de modules, algèbres dendriformes (renormalisation), fonctions parking (informatique théorique). Mais en fait ce n'est pas si surprenant car il touche à une notion fondamentale en mathématiques : l'associativité. Plus précisément il mesure le défaut d'associativité de certaines structures. Vous trouverez à l'adresse suivante :

`www-irma.u-strasbg.fr/∼loday/MISC/associaedreHistoire.pdf`

la petite histoire de la découverte évoquée ci-dessus, ainsi que le lien avec l'artiste-mathématicien Albrecht Dürer.



Un associaèdre en jaspe de l'Oural

JLL : Institut de Recherche Mathématique Avancée, CNRS et Université de Strasbourg, 7 rue R. Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

E-mail address: `loday@math.u-strasbg.fr`