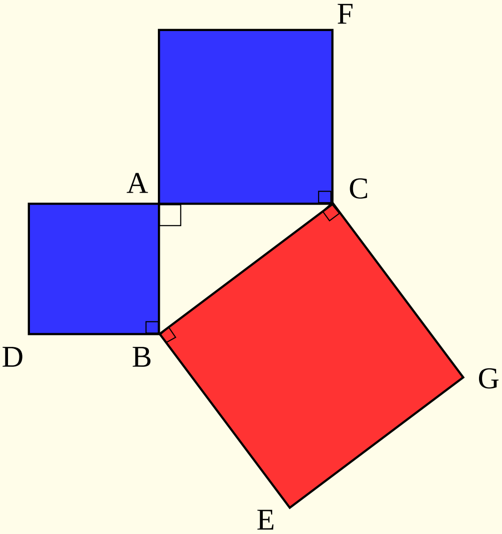
Le Théorème de Pythagore

François Dubois [1]

Kafemath
"La Coulée Douce", Paris 12ième
jeudi 23 avril 2009

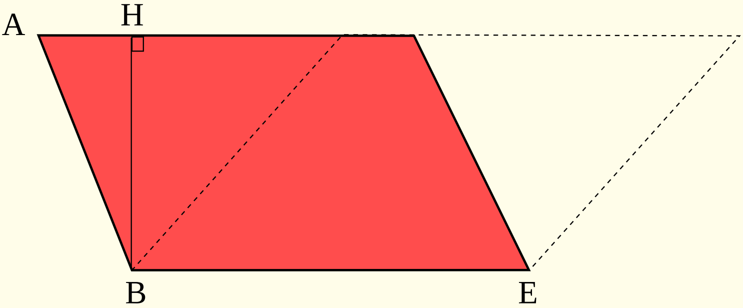
[1] animateur du Kafemath, café mathématique à Paris.

Théorème de Pythagore



Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse
est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

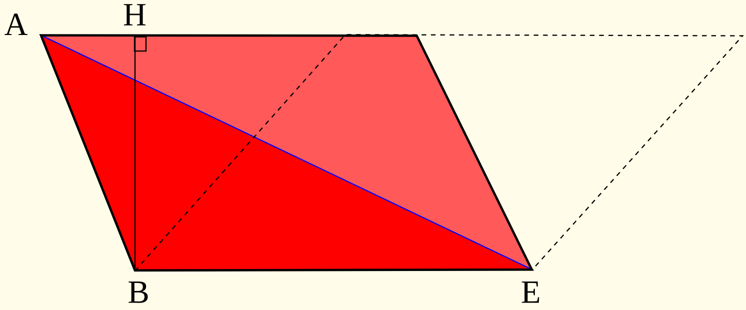
Surface d'un triangle



La surface commune aux deux parallélogrammes est égale

à la base BE multipliée par la hauteur BH .

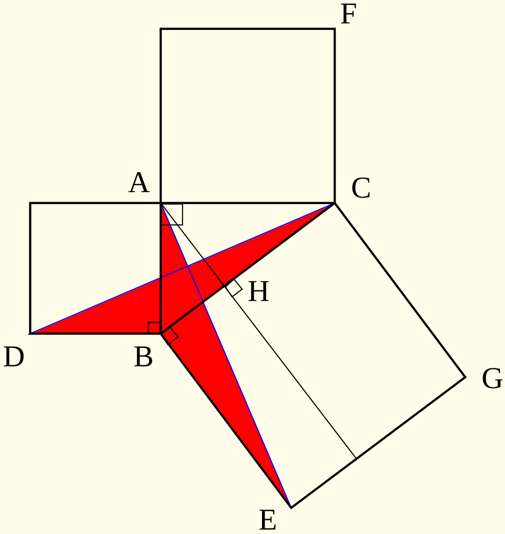
Surface d'un triangle (ii)



La surface du triangle BEA est égale

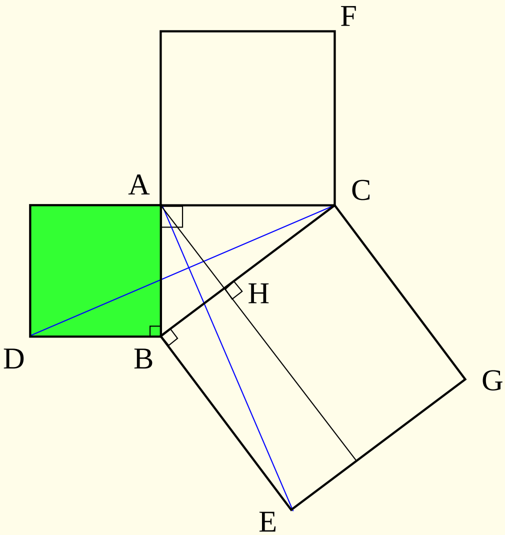
à la moitié de la surface du parallélogramme.

Preuve d'Euclide (moulin à vent)



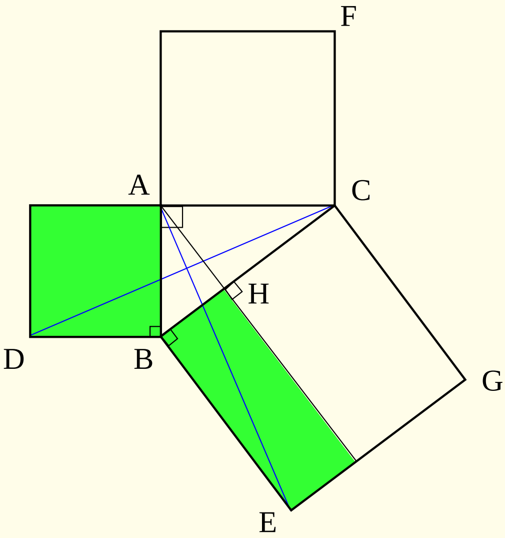
Les deux triangles DBC et ABE sont égaux.

Preuve d'Euclide (moulin à vent) (ii)



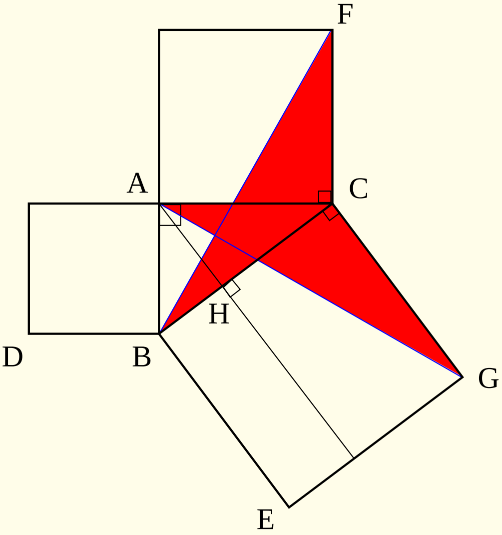
La surface du carré vert est le double de celle du triangle DBC.

Preuve d'Euclide (moulin à vent) (iii)



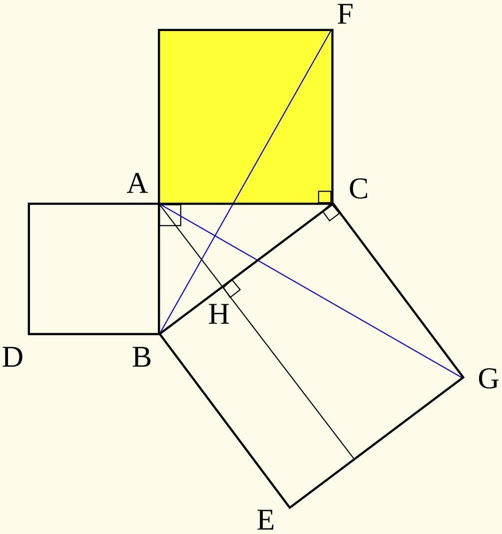
La surface du rectangle vert est le double de celle du triangle ABE.

Preuve d'Euclide (moulin à vent) (iv)



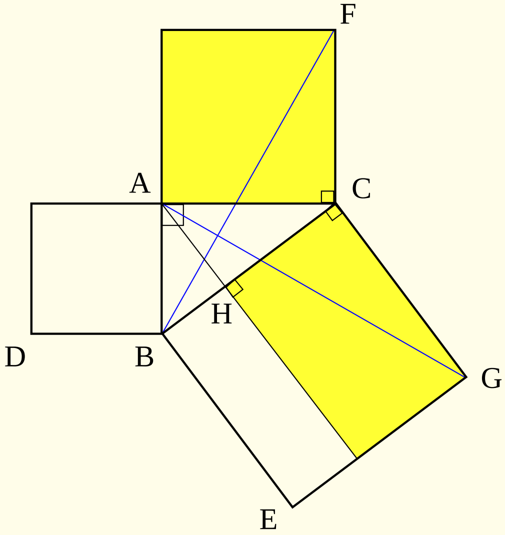
Même chose de l'autre côté. Les triangles GCA et BCF sont égaux.

Preuve d'Euclide (moulin à vent) (v)



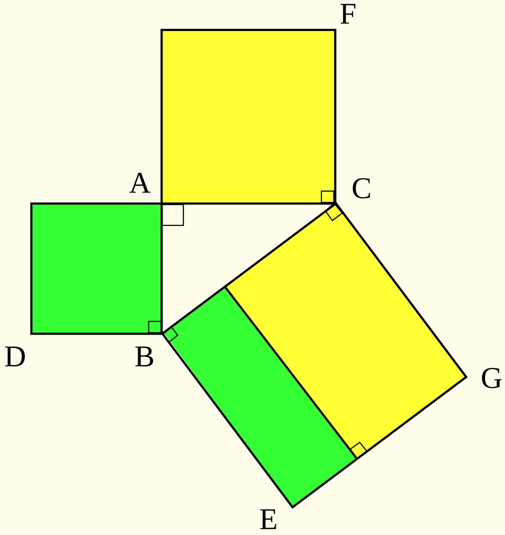
La surface du carré jaune est le double de celle du triangle BCF.

Preuve d'Euclide (moulin à vent) (vi)



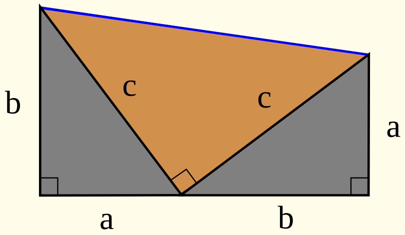
La surface du rectangle jaune est le double de celle du triangle GCA.

Preuve d'Euclide (moulin à vent) (vii)



On réunit les deux propriétés ; le théorème de Pythagore est établi.

Preuve de James Garfield (1876)



On calcule de deux façons l'aire du trapèze

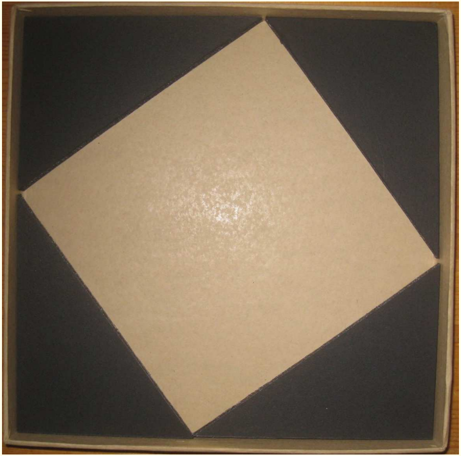
première façon : $(a+b)\dfrac{a+b}{2}$

seconde façon : $\dfrac{c^2}{2} + 2\dfrac{ab}{2}$

Donc $\dfrac{a^2+b^2}{2} + \dfrac{2ab}{2} = \dfrac{c^2}{2} + ab$

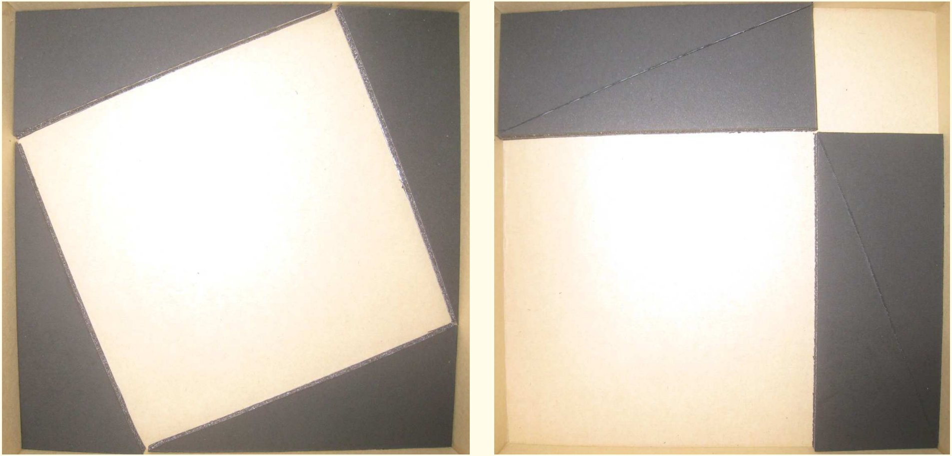
et $a^2 + b^2 = c^2$

Preuve de James Garfield : illustration expérimentale



Les deux surfaces claires sont égales.

Preuve de Garfield : seconde illustration expérimentale



Les deux surfaces claires sont égales.

Application physique

Les masses sont proportionnelles aux surfaces.
Le théorème de Pythagore exprime que la masse du grand carré est la somme des masses des deux plus petits.

Application physique (ii)

Pas si mal !

Application physique (iii)

Mais tout de même... On change de partenaire et on va à la Menuisierie Allain, 19 rue Gabriel Péri à Saint Cyr l'Ecole

Les carrés ont été un peu diminués...

Application physique (iv)

L'écart des masses est maintenant imputable à la balance !

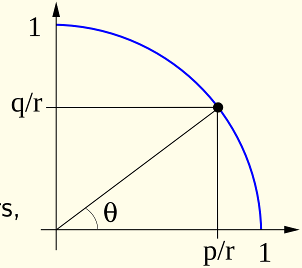
Triplets pythagoriciens

Relation “magique” : $3^2 + 4^2 = 5^2$ car $9 + 16 = 25.$
Les trois côtés sont des nombres entiers.
Cette relation était connue de Pythagore.
Y a-t-il d’autres solutions ?

Chercher p, q et r entiers ≥ 1 tels que $p^2 + q^2 = r^2$

c’est à dire $\left(\frac{p}{r}\right)^2 + \left(\frac{q}{r}\right)^2 = 1$

On introduit l’angle θ
associé à ce point du cercle unité.
Donc $\cos\theta = \frac{p}{r}$ et $\sin\theta = \frac{q}{r}$
sont des quotients de deux nombres entiers,
c’est à dire des nombres rationnels.



Triplets pythagoriciens (ii)

On paramètre de manière très classique $\cos\theta$ et $\sin\theta$ par la tangente t de l'angle moitié :

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Alors $t = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ est rationnel également.

On peut l'écrire sous la forme $t = \dfrac{\alpha}{\beta}$ où α et β sont des entiers positifs premiers entre eux.

On établit sans difficulté que t est compris entre 0 et 1, donc $1 \le \alpha < \beta$

On tire des relations précédentes

$$\cos\theta = \frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta^2+\alpha^2} = \frac{p}{r} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{2\alpha\beta}{\beta^2+\alpha^2} = \frac{q}{r}.$$

Donc, comme p, q, r, α et β sont des entiers positifs, il existe ℓ entier positif tel que

$$p = \ell\,(\beta^2-\alpha^2), \quad q = 2\,\ell\,\alpha\,\beta, \quad r = \ell\,(\beta^2+\alpha^2).$$

Triplets pythagoriciens (iii)

On a complètement résolu l'équation Diophantienne $p^2 + q^2 = r^2$
c'est à dire avec pour inconnues des nombres entiers
[Diophante d'Alexandrie, quatrième siècle après Jesus Christ].

Il existe ℓ entier, il existe $1 \leq \alpha < \beta$ entiers premiers entre eux
de sorte que $p = \ell\,(\beta^2 - \alpha^2)\,,\quad q = 2\,\ell\,\alpha\,\beta\,,\quad r = \ell\,(\beta^2 + \alpha^2)\,.$

Concrètement, en se limitant à $\ell = 1$,

α	β	p	q	r	p^2	q^2	r^2
1	2	3	4	5	9	16	25
1	4	15	8	17	225	64	289
2	3	5	12	13	25	144	169
2	5	21	20	29	441	400	841
2	7	45	28	53	2025	784	2809
3	4	7	24	25	49	576	625
3	5	16	30	34	256	900	1156
4	5	9	40	41	81	1600	1681
4	7	33	56	65	1089	3136	4225

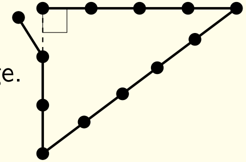
...

Un peu d'histoire...

Tablette d'argile "Plimpton 322" (Babylone, 1800 avant J.C.)
Triplets pythagoriciens ?

Inde. Baudhayana, 800 avant J.C.
"Sulba-Sutra", traité de construction des autels.
Preuves dans des cas particuliers et triplets pythagoriciens.

Corde à treize noeuds
en Mésopotamie, Inde, Egypte et au Moyen-Âge.
Angle droit grâce au triangle (3, 4, 5).



Pythagore
Né vers 570 avant J.C. dans l'île de Samos, au large de la Turquie
Aurait été l'élève de Thalès à Milet
Voyage en Egypte et à Babylone ?
Fonde une école scientifique et mystique à Crotone (Italie)
Ecole pythagoricienne (jusqu'à 400 av J.C.) : "Tout est nombre"

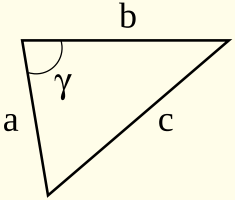
Un peu d'histoire (ii)

"Zhoubi Suanjing", premier livre de mathématiques chinois
(200 avant J.C.)

Texte de la dynastie Shang sur le sujet six siècles plus tôt.
Théorème de Gougu
Enoncé avec démonstration dans le cas (3, 4, 5).
Enoncé dans le cas général.

Ghiyath al-Kashi, mathématicien perse, 1380-1429.
Généralisation du théorème de Pythagore
dans un triangle quelconque

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma$$



Problèmes d'arithmétique associés

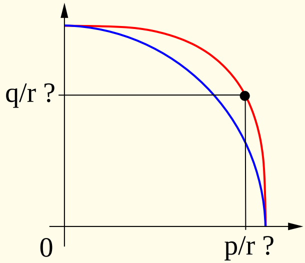
Triplets pythagoriciens :

chercher des points
à coordonnées rationnelles
sur le cercle unité.

Quid sur une courbe d'équation

$x^n + y^n = 1$

où n est un entier ≥ 3 ?



Tout nombre entier est-il somme de quatre carrés ?
(Lagrange, 1736-1813)

Tout nombre entier est-il somme de trois carrés ?
(Gauss, 1777-1855)

Tout nombre entier pair ≥ 4 est-il somme
de deux nombres premiers ? (Goldbach, 1742)

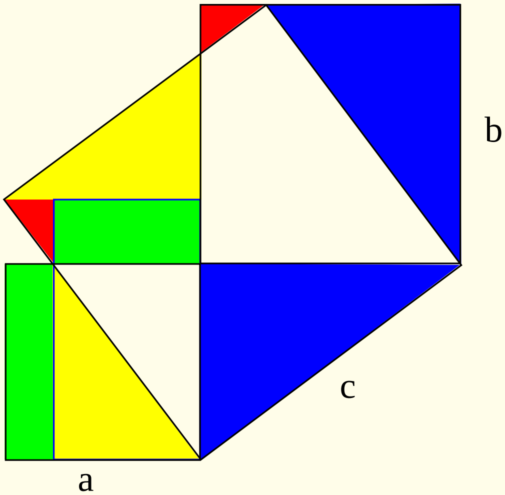
Références indispensables...

Alain Bouvier, Michel George et François Le Lionnais
Dictionnaire des mathématiques
Presses Universitaires de France, 2005.

Amy Dahan-Dalmedico et Jeanne Peiffer
Une histoire des mathématiques. Routes et Dédales
Editions du Seuil, Paris, 1986.

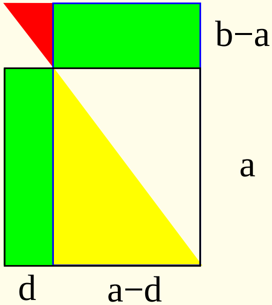
Richard Mankiewicz *L'histoire des mathématiques*
Editions du Seuil, Paris, 2001.

Bonus : une preuve (re)trouvée en avril 1998...



Il est clair que les triangles bleus, rouges et jaunes sont isométriques.
Il suffit de montrer que les deux rectangles verts ont même surface.

Zoom de la partie en bas à gauche



On applique le Théorème de Thalès

dans les deux triangles qui ne sont pas coloriés.

Donc $\dfrac{b-a}{a} = \dfrac{d}{a-d}$

et les deux rectangles en vert ont la même surface.

La preuve est plausible puisque selon A. Dahan et J. Peiffer,

Pythagore aurait été élève de Thalès à Milet...