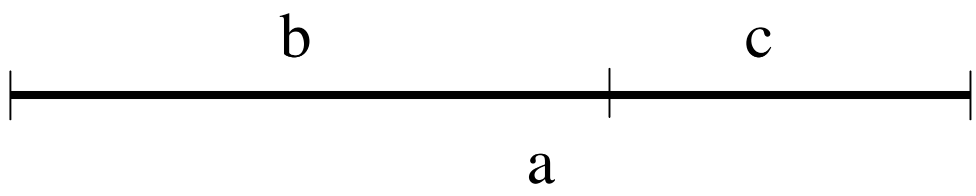
Le nombre d'or

ϕ

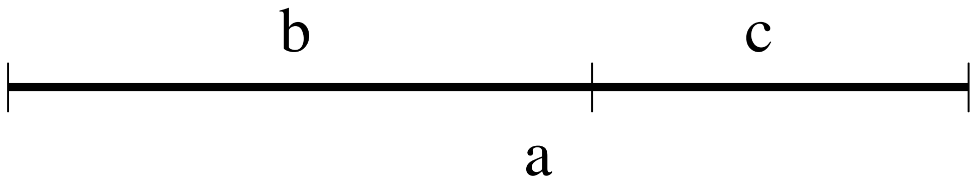
Nombre d'or, divine proportion ....

ce n'est ni une mesure, ni une dimension,
c'est un rapport entre deux grandeurs homogènes



*« Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison
lorsque la droite entière est à son plus grand segment
ce que le plus grand segment est au plus petit »*

Euclide « Les éléments »



« Il y a, de la petite partie à la grande,
le même rapport que de la grande au tout »

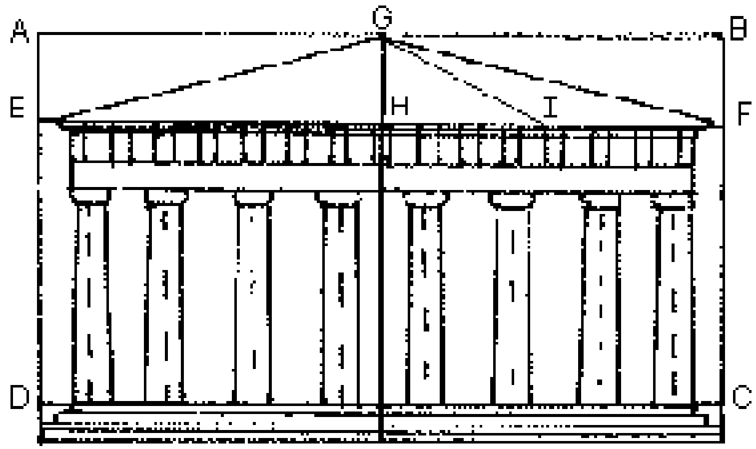
Vitruve, architecte romain 1er siècle avant notre ère

soit $b/a = c/b$

et si $b = 1$ $a = 1{,}618 \ldots = \phi$

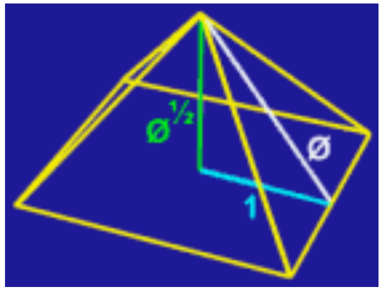
L'histoire du nombre d'or ...

- son nom « ϕ » (phi) est un hommage au sculpteur grec Phidias qui utilise le nombre d'or pour décorer le Parthénon à Athènes, au *V-ième siècle avt JC.*



- Phidias utilise également la racine carrée de 5 comme rapport dans l'architecture du monument.

- mais bien avant, en *2800 avt JC*, la pyramide de Khéops a des proportions qui montrent l'importance que ses architectes attachaient au nombre d'or



- *III-ième siècle avt JC*, le mathématicien Euclide évoque le partage d'un segment en « extrême » et « moyenne » raisons

- *1498*, Fra Luca Pacioli, moine et mathématicien, écrit « De divina Proportione »

- *XIXème siècle*, Adolf Zeising, philosophe allemand, s'y intéresse, non pas à l'aspect géometrie, mais plutôt en ce qui concerne l'esthétique et introduit le côté mythique du nombre d'or

- début *XXème siècle*, Matila Ghyka, diplomate roumain, s'appuie sur les travaux du physicien allemand Gustav Theodor Fechner et écrit deux ouvrages qui insistent sur l'importance du nombre d'or et établissent définitivement le mythe :

- *l'esthétique des proportions dans la nature et dans les arts (1927)*

- *le nombre d'or : rites et rythmes phytagoriciens dans le développement de la civilisation occidentale (1931)*

- **Définition et valeur du nombre d'or :**

Le nombre d'or est la solution à l'équation :

$$n^2 - n - 1 = 0$$

$$n^2 = n + 1$$

qui, une fois résolue, arrive à la valeur $\dfrac{1 + \text{racine de } 5}{2}$

$$= 1{,}6180339... = \phi$$

• Deux particularités du nombre ϕ

$$\phi^2 = \phi + 1$$

$$1/\phi = \phi - 1$$

et un rapport particulier au chiffre 5,

par exemple :

$$\phi = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}$$

Puissances du nombre ϕ :

$$\phi^2 = 1 + \phi$$
$$\phi^3 = 1 + 2\phi$$
$$\phi^4 = 2 + 3\phi$$
$$\phi^5 = 3 + 5\phi$$
$$\phi^6 = 5 + 8\phi$$
$$\phi^7 = 8 + 13\phi$$

il apparait les chiffres de
la suite de Fibonacci !

... à voir plus loin

- ϕ est égal à la plus simple des racines continues régulières

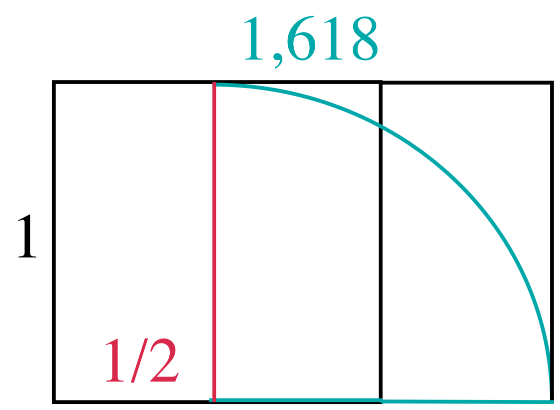
$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}}}}$$

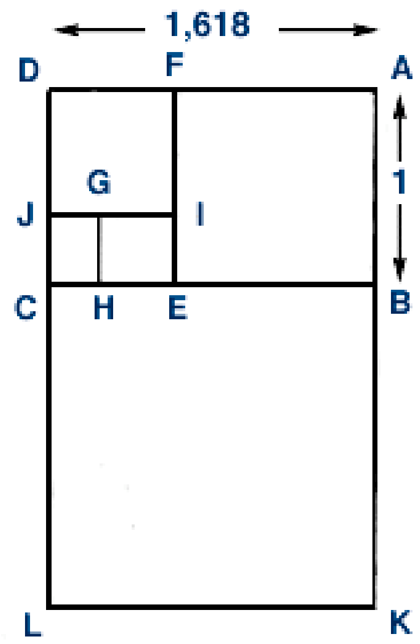
- ... et à la plus simple des fractions continues régulières

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\Phi}}}}}}}}} \quad \text{etc...}$$

Ces proportions du nombre d'or permettent de tracer des figures géométriques « harmonieuses »

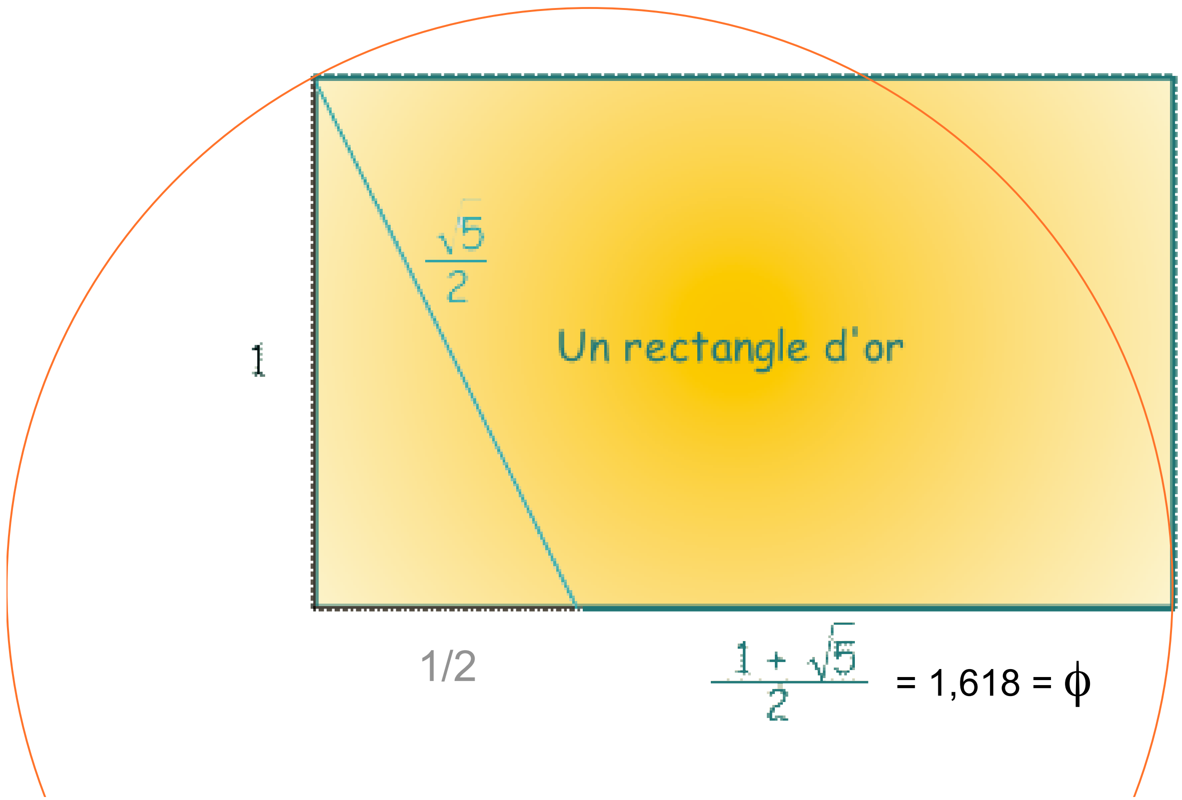
Le rectangle d'or

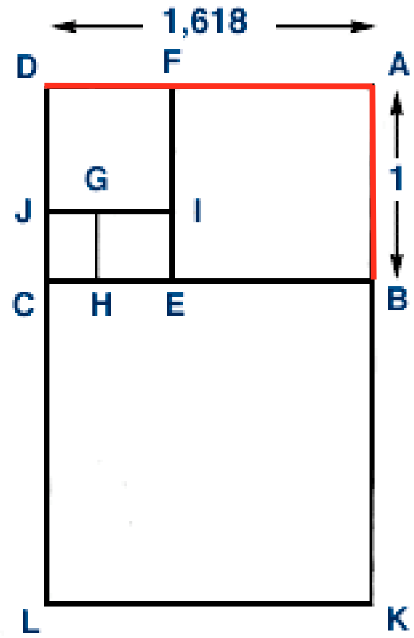




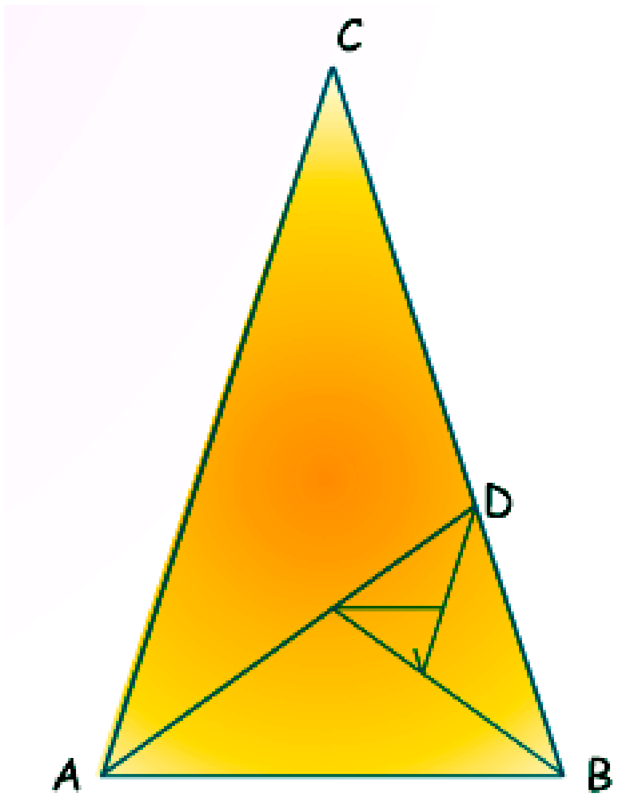
Ces proportions du nombre d'or permettent de tracer des figures géométriques « harmonieuses »

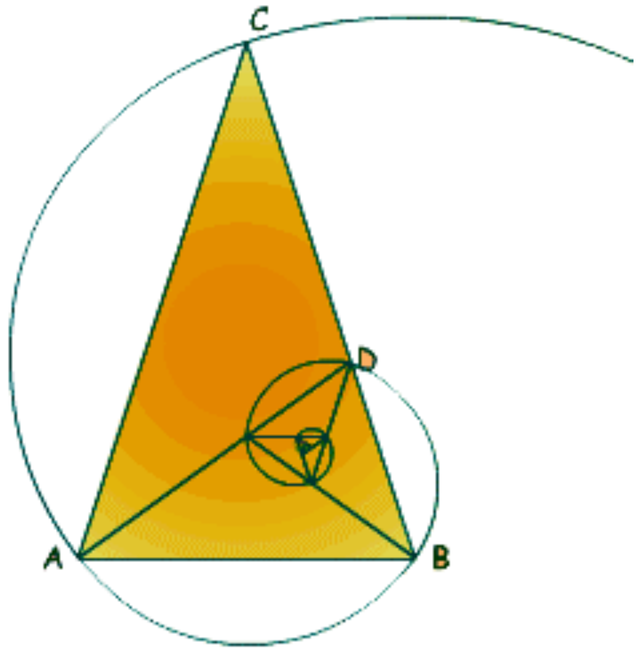
Le rectangle d'or



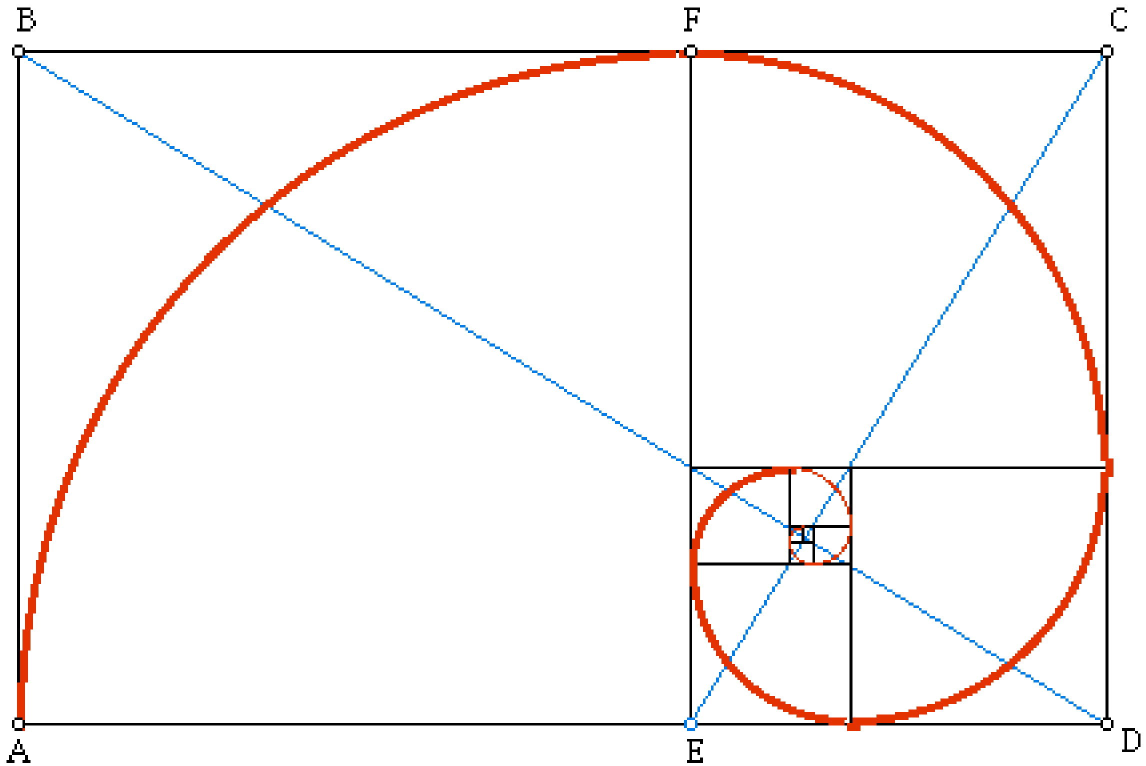


Le triangle d’or

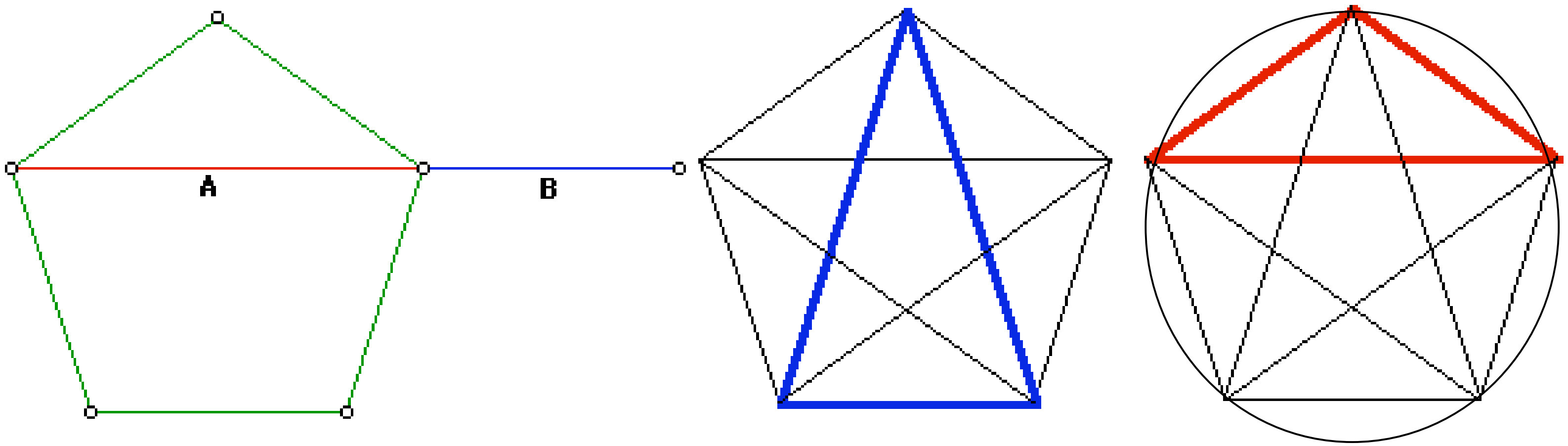




La spirale d'or

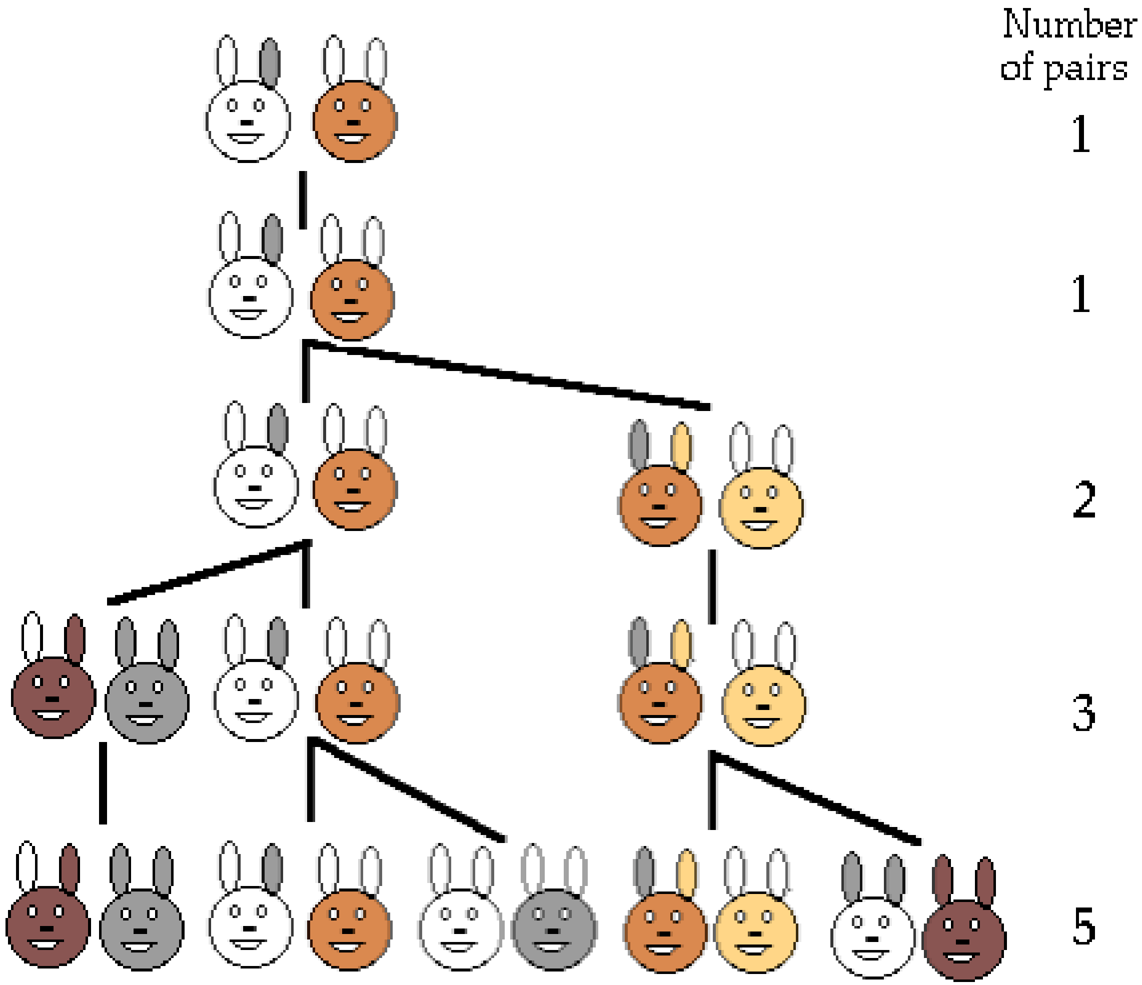


Et le pentagone d'or, et le cercle, et l'ellipse, et d'autres encore ....



Fibonacci et l'histoire des petits lapins

Léonard de Pise



etc …

et voilà la « Suite de Fibonacci » !

- En fait,

chaque nombre de la Suite de Fibonacci s'obtient en ajoutant les deux nombres précédents de la suite :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,
610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ...

… et le rapport entre le nombre d'or
et la suite de Fibonacci ?…

Chaque n-iéme nombre de la suite est un multiple de ϕ^n

0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ...

par exemple :

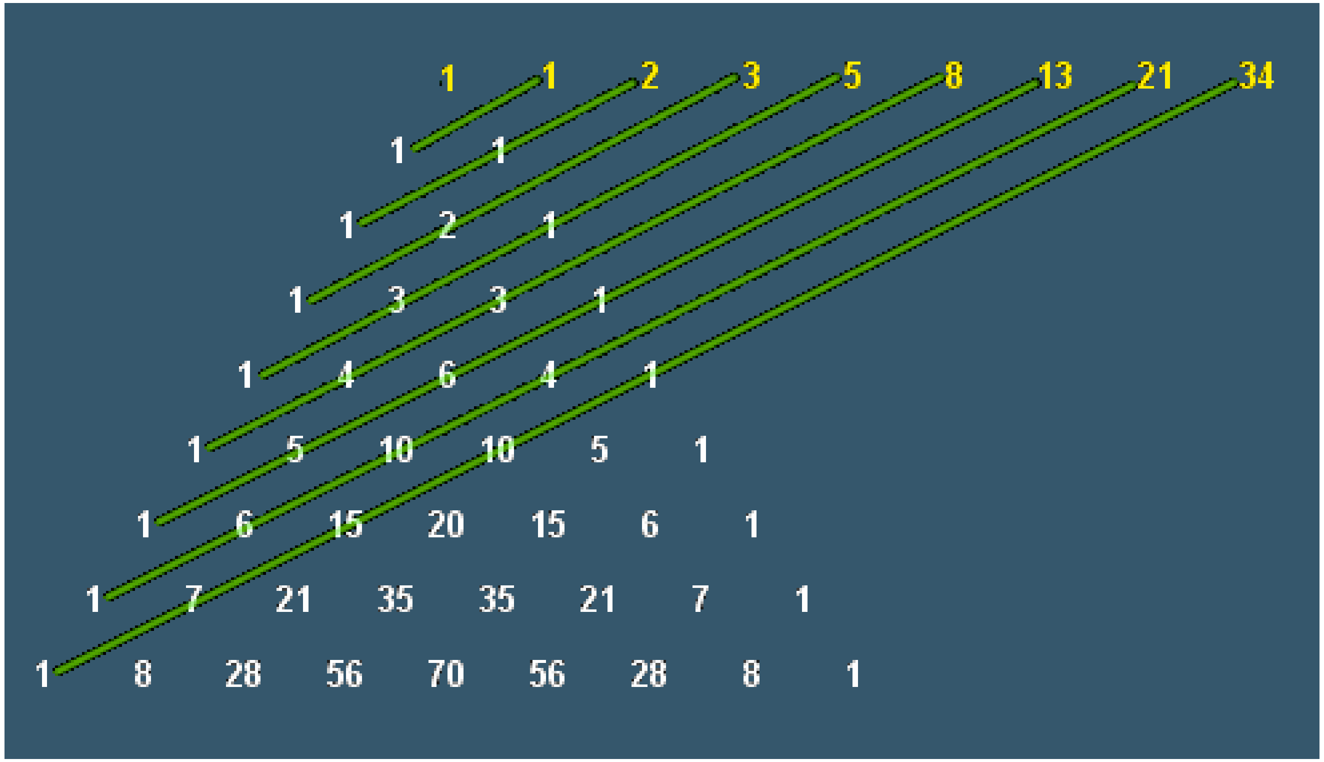
• *tous les 4ièmes nombre de la série, soit :*

3, 21, 144 et 987 sont tous multiples de ϕ^4 qui est 3

• *tous les 5ièmes nombre de la série, soit :*

5, 55, 610 et 6765 sont tous multiples de ϕ^5 qui est 5

Triangle de Pascal et Suite de Fibonacci



Et pour le fun
(et les Mordus) ! …

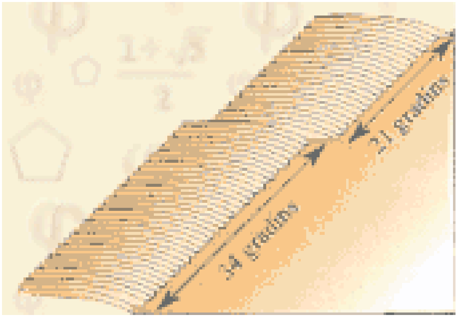
une formule qui relie π et le Nombre d'Or

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\varphi^{-2k-1}+\varphi^{-6k-3}\right)=4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left((\varphi-1)^{2k+1}+(2\varphi-3)^{2k+1}\right)$$

mais le nombre d'or n'est pas qu'algèbre et géométrie,

souvent, il flirte avec les Muses ou Dame Nature !…

Le théatre d'Epidaure

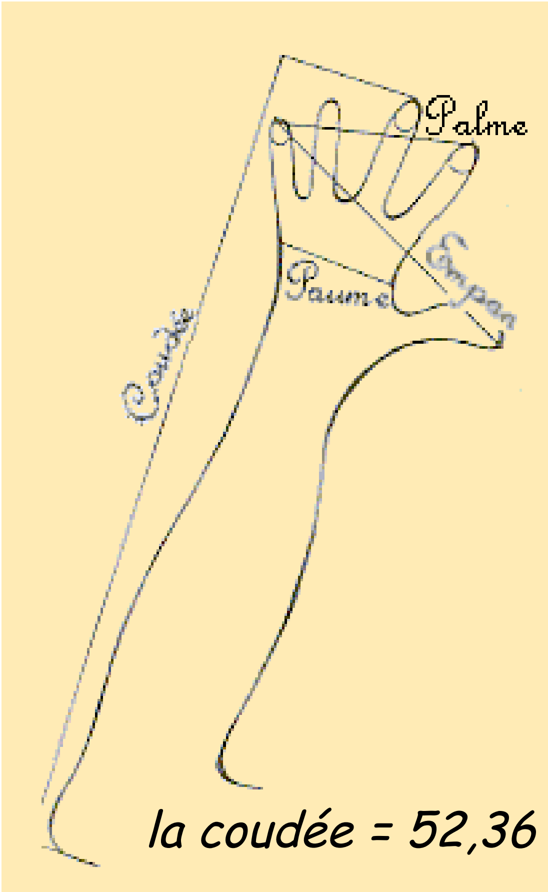


Il y a 55 gradins répartis en 34 et 21 rangs :

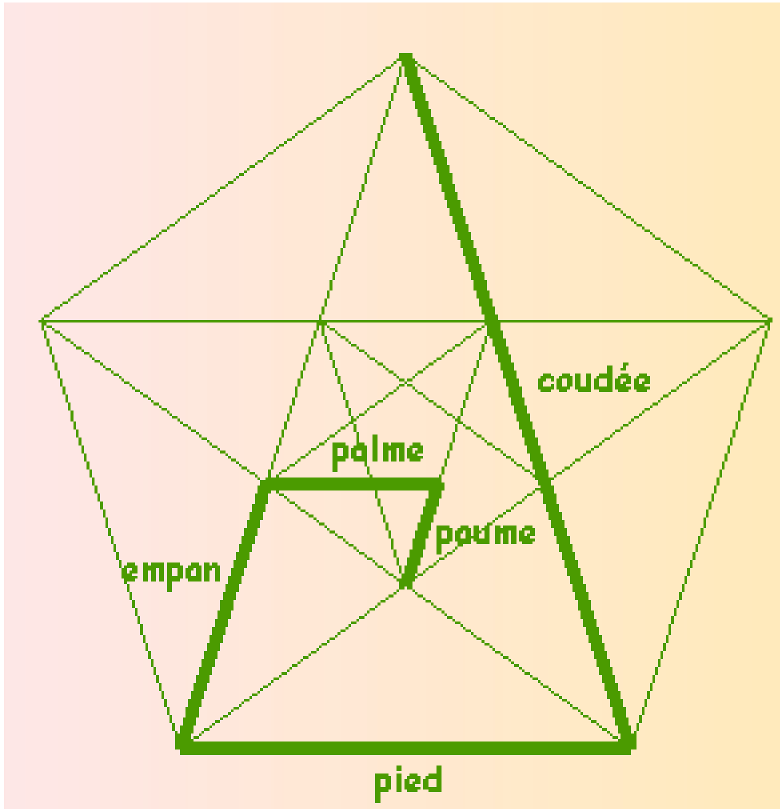
soit trois nombres successifs de la Suite de Fibonacci et les rapports 34/21 et (34+21)/34 sont très proches du Nombre d'Or.

Les gradins sont donc partagés en « extrême et moyenne raisons »

Le quine : une série de cinq mesures utilisées par les architectes du 19ième



la coudée = 52,36 cm



La quine a comme étalon le grain d'orge dans sa longueur
= 1 ligne (± 0,2257 cm)

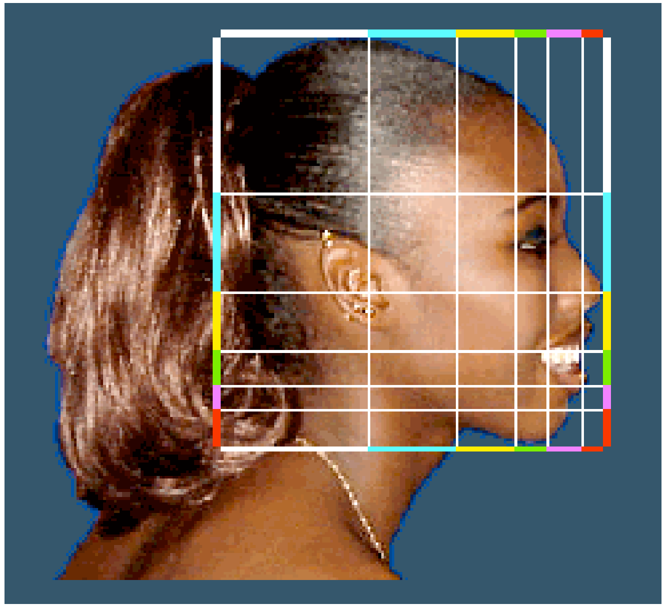
Paume : 34 lignes
Palme : 55 lignes
Empan : 89 lignes
Pied : 144 lignes
Coudée : 233 lignes

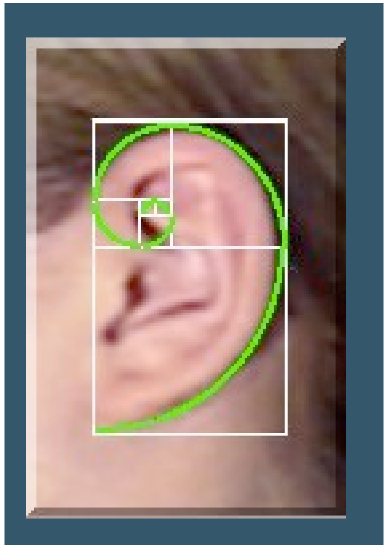
… Encore la suite de Fibonacci

Michel-Ange

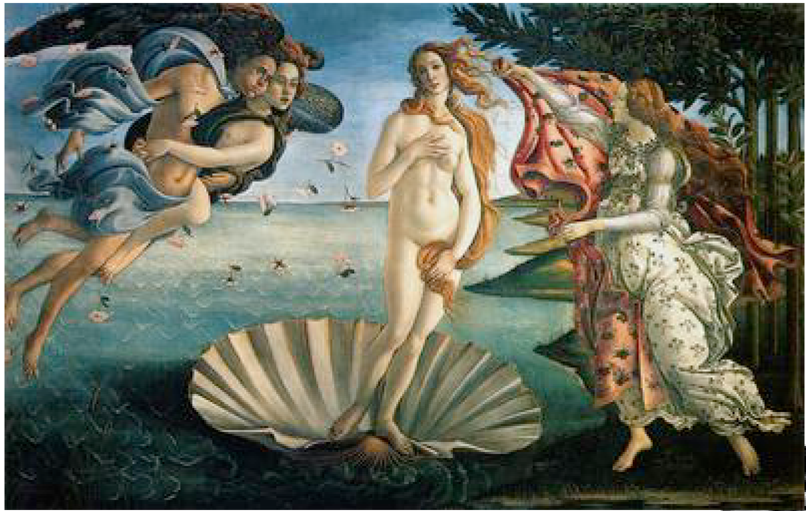
détail de « La Création de l'Homme »

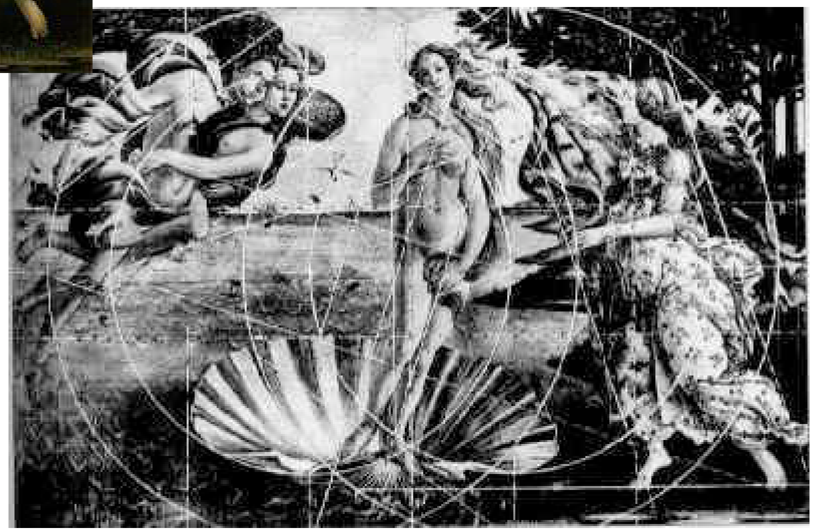
La phalange, la phalangine et la phalangette de l'index ont des longueurs qui sont en proportion d'or. Autrement dit, elles sont en progression géométrique de raison Φ = 1,6.





Dans les arts ...

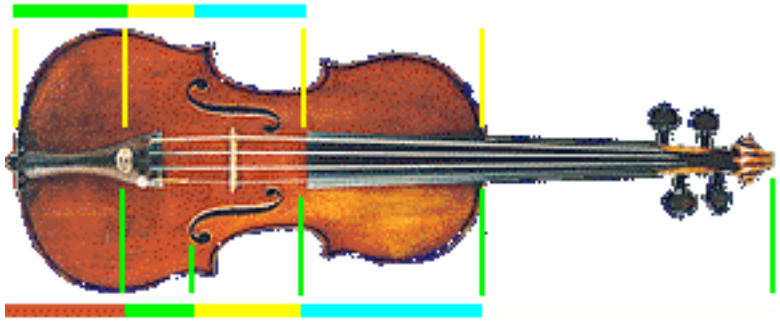


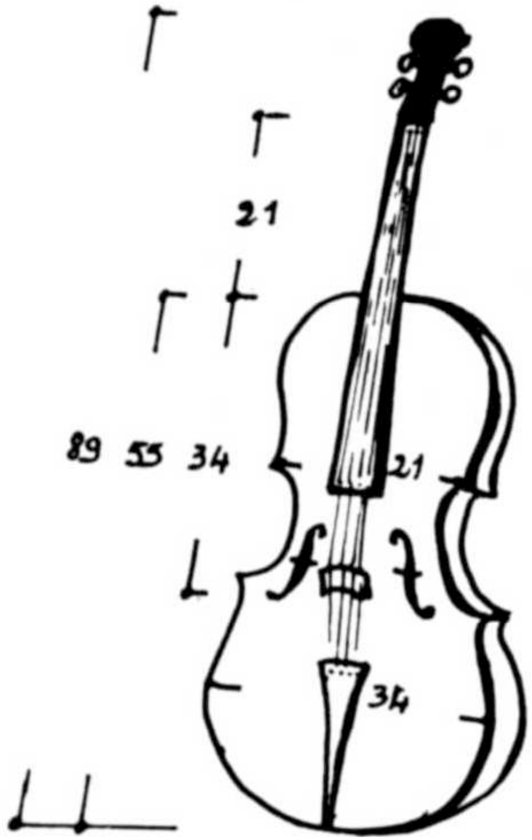


Boticelli

La Naissance de Vénus

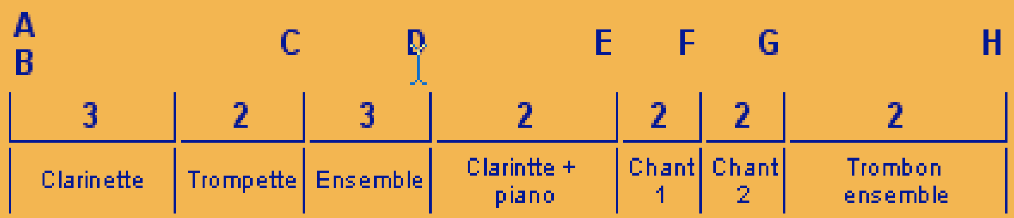
Mais c'est un Stradivarius ! ...



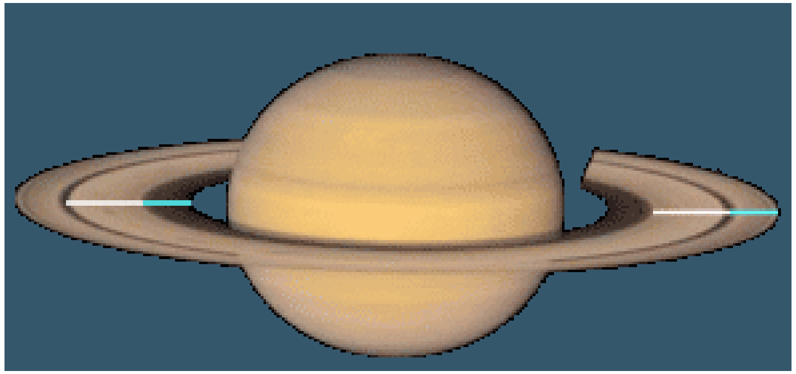


En chronométrant l'interprétation de
« The Last Time par le Hot Five » de Louis Amstrong,
on remarque des sections dorées dans le temps !

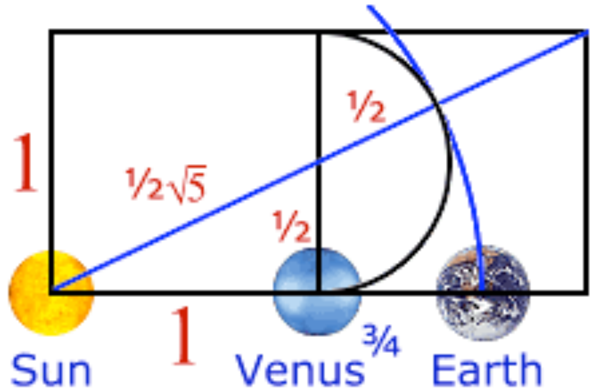
Enfin, la section dorée peut être retrouvée partout, pourvu qu'on veuille bien la chercher. En chronométrant la célèbre interprétation de The Last Time par le Hot Five de Louis Armstrong (1925), nous avons obtenu le schéma suivant :
Si la seconde partie est construite suivant les canons les plus simples, en revanche, on peut remarquer que AEH, ACD, ABD, ABC, BCD, CDE sont approximativement des sections dorées dans le temps. On peut penser qu'elles ne sont pas étrangères à l'impression d'équilibre que produit indéniablement cette face.



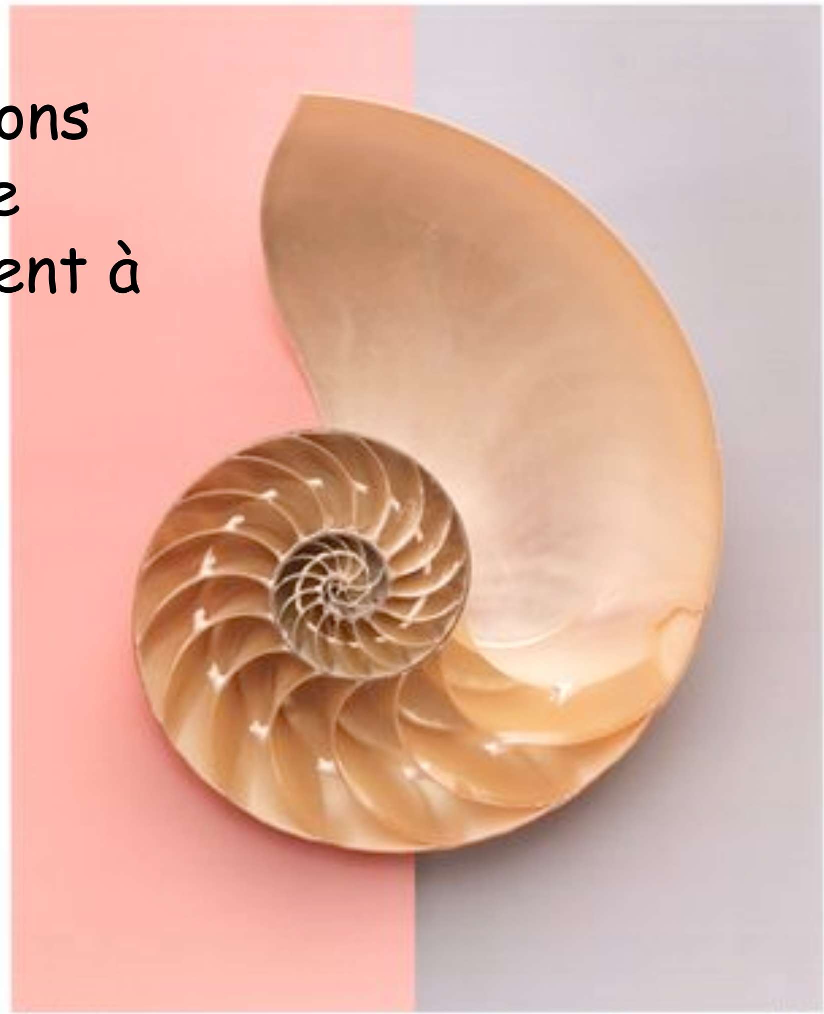
Les anneaux de Saturne



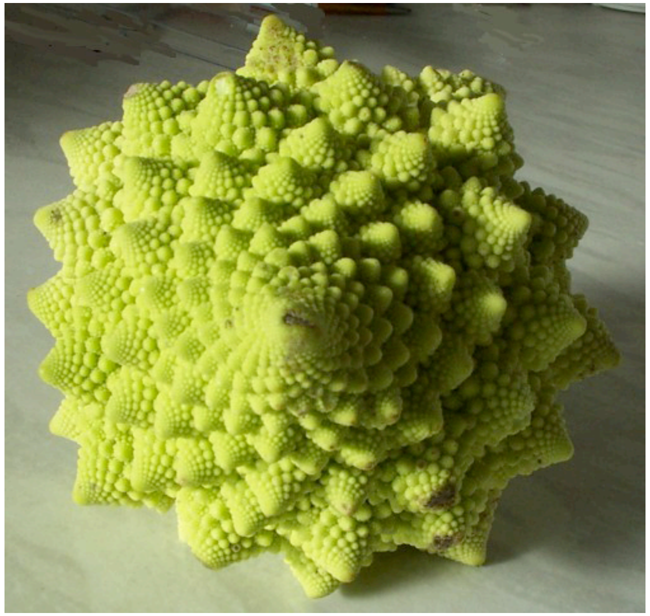
et le système solaire

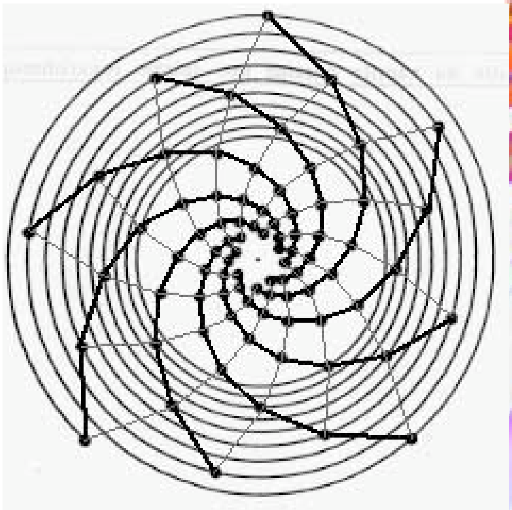


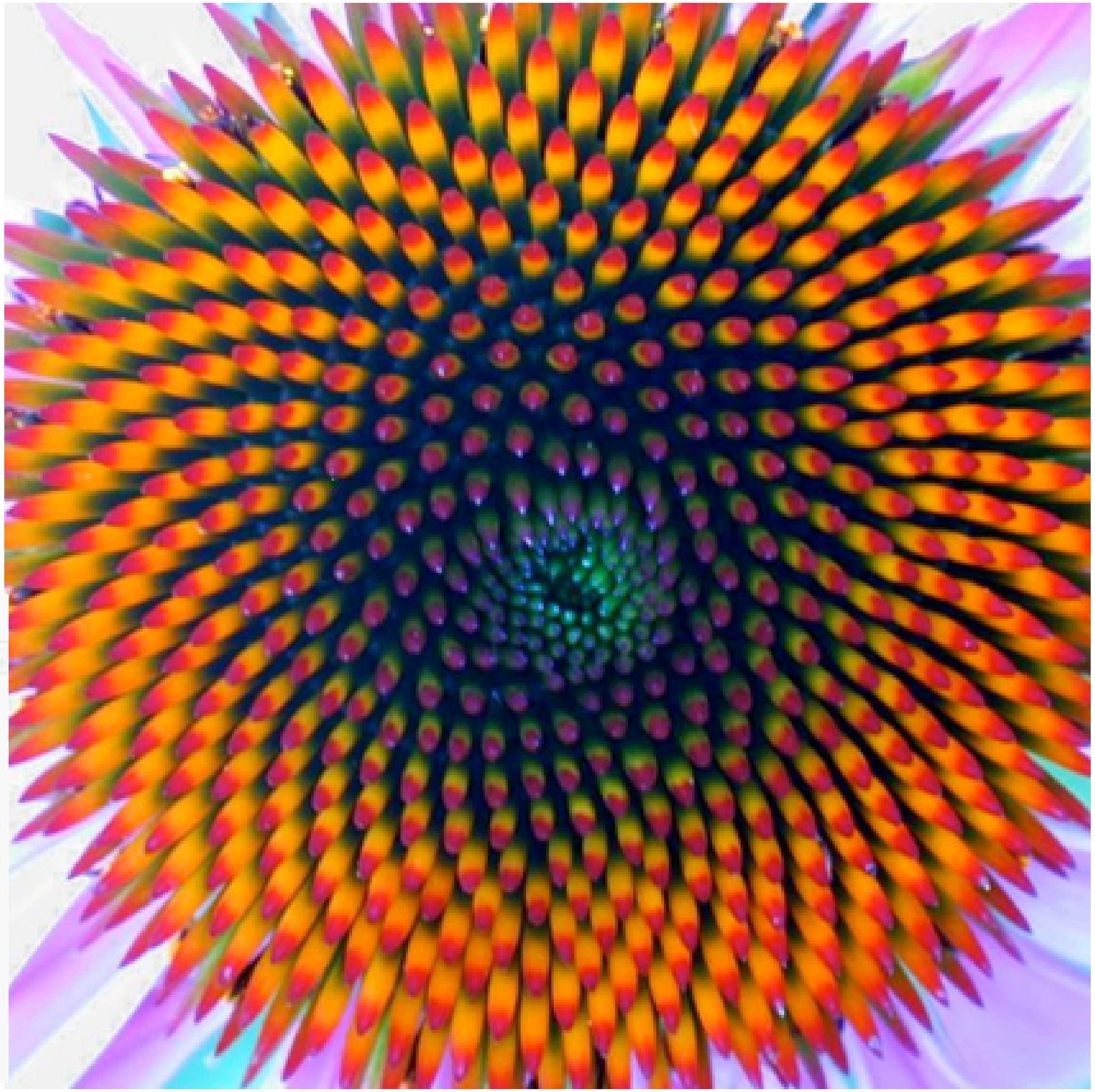
Dans la nature, les cloisons intérieures du Nautile correspondent parfaitement à la spirale d'or



et partout dans le monde végétal !...







ϕ

Un nombre étonnant, mystérieux et magique pour avoir fait parler de lui depuis la plus haute antiquité dans de nombreux domaines tels que la *géométrie*, l'architecture, la peinture, la nature ...

L'expression d'harmonie, d'esthétique et de beauté dans les arts ....

.... ou simplement une coïncidence ... ??

The end !